

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Фрязинский филиал**

На правах рукописи

**Алексеев Алексей Эдуардович**

**Волоконная интерферометрия рассеянного излучения и ее  
применение для регистрации акустических воздействий**

Специальность:

01.04.03 – радиоп физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:

д.т.н., профессор Потапов В.Т.

Москва 2014

**Посвящается моему отцу  
Эдуарду Ивановичу Алексееву**

## Оглавление

Введение .....	7
Глава 1. Статистические закономерности интенсивности обратно – рассеянного волокном излучения.....	23
1.1. Модель рассеивающей среды .....	24
1.2. Автокорреляционная функция излучения полупроводникового лазера.....	28
1.3. Усредненная интенсивность обратно – рассеянного волокном излучения .....	32
1.3.1. Интенсивность полностью поляризованного обратно – рассеянного излучения .....	37
1.3.2. Интенсивность частично поляризованного обратно – рассеянного излучения .....	39
1.4. Дисперсия интенсивности обратно – рассеянного волокном излучения.....	40
1.4.1. Дисперсия полностью поляризованного обратно – рассеянного излучения .....	41
1.4.2. Дисперсия частично поляризованного обратно – рассеянного излучения .....	43
1.5. Плотность распределения интенсивности монохроматического обратно – рассеянного излучения .....	46
1.5.1. Случай полностью поляризованного обратно – рассеянного излучения .....	46
1.5.2. Случай частично поляризованного обратно – рассеянного излучения .....	49
1.6. Плотность распределения интенсивности квазимонохроматического обратно – рассеянного излучения .....	51
1.6.1. Случай полностью поляризованного обратно – рассеянного излучения .....	52
1.6.2. Случай частично поляризованного обратно – рассеянного излучения .....	63

1.7. Математическое моделирование процесса обратного – рассеяния квазимонохроматического излучения.....	70
1.8. Экспериментальный метод получения статистически независимых распределений коэффициентов рассеяния .....	74
1.9. Экспериментальное исследование статистических распределений интенсивности обратно – рассеянного излучения.....	81
1.10. Выводы .....	88
Глава 2. Усредненная спектральная плотность мощности шума (СПМШ) интенсивности на выходе ВИРИ .....	
2.1. Усредненная СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ .....	91
2.2. Усредненная СПМШ интенсивности на выходе двухканального ВИРИ .....	115
2.3. Предельные значения средней СПМШ интенсивности на выходе ВИРИ .....	127
2.4. Экспериментальное исследование усредненной СПМШ интенсивности на выходе двухканального ВИРИ.....	131
2.5. Выводы .....	134
Глава 3. Среднее отношение сигнала к шуму для ВИРИ при внешнем гармоническом воздействии на оптическое волокно .....	
3.1. Средняя мощность полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ при внешнем гармоническом фазовом воздействии .....	137
3.2. Сравнение средней мощности полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ и интерферометра Маха – Цендера.....	146
3.3. Средняя мощность полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ при внешнем гармоническом фазовом воздействии .....	150
3.4. Связь средней мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ с дисперсией интенсивности рассеянного излучения по ансамблю независимых рассеивающих участков.....	167
3.5. Среднее отношение сигнала к шуму (ОСШ) для одноканального и двухканального ВИРИ при внешнем гармоническом воздействии на оптическое волокно.....	171

3.6. Экспериментальное измерение среднего ОСШ для одноканального и двухканального ВИРИ .....	180
3.6.1. Описание экспериментальной установки для измерения среднего ОСШ .....	180
3.6.2. Калибровка зависимости амплитуды фазового воздействия на волокно от напряжения, подаваемого на пьезокерамический цилиндр .....	182
3.6.3. Метод измерения среднего ОСШ для ВИРИ .....	186
3.6.4. Результаты эксперимента .....	191
3.7. Выводы .....	206
Глава 4. Регистрация внешнего акустического воздействия на оптическое волокно с помощью ВИРИ методом фазового разнесения .....	208
4.1. Регистрация и демодуляция рассеянного излучения методом фазового разнесения .....	209
4.2. Фединг сигнала, восстановленного методом фазового разнесения .....	216
4.3. Методы устранения фединга восстановленного сигнала .....	218
4.4. Экспериментальное детектирование сигнала внешнего фазового воздействия с помощью двухканального ВИРИ .....	220
4.5. Выводы .....	228
Заключение .....	229
Список литературы .....	233
Список работ автора по теме диссертации .....	242
Приложения .....	244
1. Приложение 1 .....	244
2. Приложение 2 .....	245
3. Приложение 3 .....	245
4. Приложение 4 .....	247
5. Приложение 5 .....	250
6. Приложение 6 .....	252

7. Приложение 7 .....	252
8. Приложение 8 .....	256
9. Приложение 9 .....	257
10. Приложение 10 .....	262
11. Приложение 11 .....	268
12. Приложение 12 .....	270
13. Приложение 13 .....	271
14. Приложение 14 .....	272
15. Приложение 15 .....	273
16. Приложение 16 .....	274
17. Приложение 17 .....	278
18. Приложение 18 .....	280
19. Приложение 19 .....	281
20. Приложение 20 .....	282

## Введение

Волоконная когерентная интерферометрия, в настоящее время, является хорошо разработанным методом, для детектирования различных физических величин [1, 2]. Волоконно-оптические интерферометры на основе одномодовых оптических волокон (интерферометры Маха-Цандера, Майкельсона, Фабри-Перо и Саньяка) широко используются для прецизионных измерений в различных измерительных системах [3]. Последовательное объединение этих интерферометров в каскад позволяет сконструировать распределенные волоконные датчики, фиксирующие физические величины и их динамически изменяющиеся характеристики на полной пространственной протяженности каскада. Одним из перспективных принципов построения распределенных волоконных датчиков и измерительных систем является использование интерференционных эффектов, возникающих при *обратном релеевском рассеянии когерентного излучения в одномодовом оптическом волокне*. Преимущество таких распределенных датчиков перед датчиками, использующими каскад стандартных интерферометров, заключается в том, что в качестве каскада в них может быть представлен любой протяженный волоконный тракт одномодового оптического волокна, по которому распространяется импульс когерентного излучения. Интерференционные эффекты в датчиках, использующих когерентное рассеяние, возникают при сложении большого количества полей, рассеянных средой одномодового волокна, в направлении обратном направлению распространения оптического излучения. Внешнее воздействие на отрезок оптического волокна, рассеивающего излучение в обратном направлении, приводит к фазовой модуляции рассеянных полей и, следовательно, к изменению суммарной интенсивности на выходе рассеивающего волокна, которое может быть зафиксировано измерительной системой.

Обратно релеевское рассеяние происходит на неоднородностях показателя преломления среды («вмороженными» в оптическую среду термодинамическими флуктуациями плотности и концентрации), которые образуются в процессе

вытяжки волокна [4]. Размер неоднородностей или *центров рассеяния* много меньше длины волны излучения [5]. Центры рассеивают падающее на них излучение во всех направлениях, часть рассеянного излучения захватывается оптическим волокном и распространяется в направлении обратном направлению распространения импульса. Доля мощности обратно – рассеянного волокном излучения от полной мощности, заводимой в волокно, довольно мала [6 – 9], например, средняя мощность излучения, *вызванного обратным релеевским рассеянием* оптического излучения, для стандартного одномодового волокна SMF-28 длиной 40 м, меньше мощности заводимого излучения на 57 дБ. Таким образом, малое значение мощности рассеянного излучения приводит к необходимости использовать оптические усилители и чувствительные фотоприемники для его приема.

Первыми моделями датчиков на основе обратно-рассеянного излучения были распределенные датчики, которые, получили название импульсных волоконно-оптических рефлектометров [10, 11], они использовали источники с невысокой степенью когерентности и анализировали распределение потерь в протяженном волоконном тракте. Датчики такого типа, в настоящее время, широко применяются для анализа волоконно-оптических линий связи. Источники излучения, используемые в таких датчиках, как правило, имеют относительно широкую спектральную полосу излучения, например, применяются полупроводниковые лазеры с распределенной обратной связью на основе гетероструктуры InGaAsP [4], с шириной спектральной полосы:  $\Delta\nu = 0.2$  нм и длиной когерентности:  $L_{coh} = 0.004$  м. В силу того, что пространственные протяженности зондирующих импульсов в рефлектометрах составляют более 10 м, интерференционные эффекты, возникающие при рассеянии них, *не проявляются*. Применение лазеров с более высокими степенями когерентности, такими, что длины когерентности их излучения сравнимы или превосходят длительности зондирующих импульсов в рефлектометре, приводит к появлению интерференционных эффектов при обратном рассеянии. В этом случае излучение, обратно-рассеянное участком волокна, занимаемого импульсом, сохраняет



достаточную степень когерентности и может создавать интерференционную картину определенной видности или контраста. При этом, поля излучений, рассеянных центрами, расположенными в разных частях рассеивающего волокна, занимаемого импульсом, сохраняют высокую степень корреляции, а сами центры рассеяния попарно образуют в этом случае, своего рода, *элементарные интерферометры Майкельсона*, в которых они выступают в роли зеркал. Совокупность всех этих элементарных интерферометров Майкельсона, расположенных в рассматриваемом отрезе и образуют рассеивающую среду волокна.

Как и любой интерферометр, интерферометр, образованный совокупностью рассеивающих центров, чувствителен к изменению разности оптических путей обратно-рассеянных интерферирующих лучей; изменение этой разности приводит к изменению интерференционной картины на входе рассеивающего волоконного участка. При этом, каждый элементарный интерферометр этого участка создает также определенный уровень шумовых флуктуаций интенсивности. В результате, последовательно анализируя интенсивности излучений, рассеянных каждым из участков занимаемых импульсом когерентного излучения, можно фиксировать динамические воздействия на протяжении всего волоконного тракта рефлектометра с когерентным источником.

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных изучению обратно-рассеянного в волокне когерентного излучения, а также рефлектометрам с когерентными источниками излучения или *когерентным рефлектометрам* [12 – 29]. Интерес к данной теме вызван главным образом тем, что на основе когерентного рефлектометра можно создавать высокочувствительные распределенные датчики и системы измерения физических величин [19 – 27], использующих, в качестве чувствительного элемента лишь одно протяженное рассеивающее волокно.

В ранних работах по рефлектометрии [12 – 16] высокая когерентность источника была необходима для реализации гетеродинного приема излучения, рассеянного волокном, с целью увеличения чувствительности и динамического

диапазона рефлектометра. Интерференционные эффекты, возникающие при сложении полей рассеянного излучения и гетеродина, воспринимались как нежелательный *когерентный шум*. В этих работах также отмечалась аналогия между когерентным рассеянием излучения в оптическом волокне и эффектом образования *спекл – картины* от шероховатой поверхности: оба процесса имеют случайную природу, в основе которой лежит суммирование полей рассеянного излучения *со случайными амплитудами и фазами*. Впервые демонстрируется когерентная рефлектограмма, которая имеет вид шумоподобного сигнала с высоким контрастом, и также отмечается ключевая особенность в поведении интенсивности когерентного излучения, рассеянного средой, - возникновение так называемого эффекта *замирания* или *фединга* (от английского fading). Эффект фединга возникает при многолучевой интерференции полей со случайными амплитудами и фазами и состоит в том, что интенсивность излучения, рассеянного каким – либо участком становится близкой к нулю. В результате, для некоторых участков волокна происходит практически полная потеря сигнала рефлектометра, на рефлектограмме это проявляется в виде близких к нулю минимумов интенсивности рассеянного излучения, поэтому на соответствующих участках становится невозможным определение дефектов волокна.

В работах [17, 18] отмечены основные методы устранения фединга: усреднение по множеству реализаций когерентной рефлектограммы, при изменении центральной длины волны и состояния поляризации излучения источника. При усреднении флуктуации интенсивности на рефлектограмме, вызванные интерференционными эффектами, уменьшались, в результате, шумоподобный вид рефлектограммы, становился более гладким, аналогичным виду рефлектограммы от источника с невысокой степенью когерентности, и на ней становились заметны искомые статические дефекты волоконного тракта.

Возможность использования интерференционных эффектов, возникающих при обратном релеевском рассеянии, для детектирования *динамических воздействий* на отрезок оптического волокна, впервые продемонстрирована в работах [19, 20] . Работу [21] можно, по – видимому, считать первой работой,

посвященной исследованию когерентного рефлектометра, в котором регистрируется динамическое воздействие на *протяжении всего волоконного тракта длиной 11 км*. Применение когерентного рефлектометра для систем предотвращения несанкционированного доступа впервые предложено в работе [22], дальнейшим продолжением которой послужили работы [23 – 25]. В качестве источника когерентного излучения использовался волоконный лазер с узкой спектральной шириной полосы, менее 3 кГц. Место воздействия детектировалось с помощью вычисления разности рефлектограмм, записанных в разные моменты времени, в итоге, место воздействия проявлялось как возмущение на горизонтальной линии, соответствующей разности рефлектограмм. Для устранения эффекта замирания использовалась методика поляризационного разнесения рассеянного излучения. Возможность создания распределенного датчика вибраций на основе когерентного рефлектометра с применением сигнала опорного гомодина продемонстрирована в работе [26].

Основными российскими работами по использованию когерентного рефлектометра в системах распределенного мониторинга внешних воздействий являются работы [27 – 29], в которых предлагаются различные модификации схем рефлектометра с целью улучшения его параметров.

Несмотря на большое число работ по когерентной рефлектометрии, до настоящего времени остается нерешенным ряд вопросов, связанных с определением основных характеристик когерентного рефлектометра, таких как: спектральный состав шума интенсивности на выходе рефлектометра, его пороговая чувствительность к внешним воздействиям на волокно и возможность идентификации этих воздействий. Решение указанных вопросов позволит значительно расширить область применения когерентного рефлектометра, как распределенного датчика внешних воздействий. Ответы на эти вопросы в значительной степени могут дать исследования особенностей интерференции обратно-рассеянного когерентного излучения в отрезке одномодового волокна – *волоконном интерферометре рассеянного излучения (ВИРИ)*, являющегося ключевым составным элементом волоконного тракта когерентного

рефлектометра. В связи с этим, задача исследования интерференции обратно-рассеянного излучения в ВИРИ и возможностей его применения в качестве датчика внешних воздействий является актуальной.

Протяженный волоконный тракт, когерентного рефлектометра, можно представить, как каскад соединенных независимых рассеивающих участков, *последовательно* занимаемых импульсом при его прохождении. Каждый независимый рассеивающий участок, занимаемый оптическим импульсом, представляет собой *отдельный интерферометр*, на выходе которого, *то есть в его начале*, происходит интерференция полей излучений, рассеянных центрами рассеяния рассматриваемого участка. Все интерферирующие поля имеют случайные амплитуды и фазы, поэтому такой интерферометр можно рассматривать только статистически. *В силу того, что все рассеивающие участки волоконного тракта когерентного рефлектометра статистически идентичны друг другу, усредненные характеристики всего волоконного тракта будут эквивалентны усредненным характеристикам любого из рассеивающих участков.* ***Волоконный интерферометр рассеянного излучения (ВИРИ), таким образом, представляет собой отрезок волокна, в котором происходит многолучевая интерференция полей, обратно-рассеянного средой волокна излучения, имеющих случайные амплитуды и фазы.*** Отметим, что в настоящей работе для исследования ВИРИ используется когерентный источник излучения, *работающий в непрерывном режиме генерации, без какой – либо модуляции.* При анализе когерентного рефлектометра необходимо учитывать импульсную модуляцию зондирующего излучения, которая приводит к дополнительному уширению его спектральной линии. Можно сказать, что каждая точка рефлектограммы когерентного рефлектометра отображает мгновенную интенсивность на выходе какого-либо конкретного ВИРИ, образованного центрами рассеяния, расположенными в пределах половины пространственной протяженности распространяющегося оптического импульса [9], а рефлектограмма в целом отображает совокупность мгновенных интенсивностей всех ВИРИ волоконного тракта. *Иными словами, рефлектограмма является,*

*своего рода, периодической (с периодом, равным периоду следования оптических импульсов), дискретной выборкой мгновенных интенсивностей на выходах всех интерферометров волоконного тракта. ВИРИ с непрерывным источником излучения, анализируемый в настоящей работе, с этой точки зрения является более общим объектом, по отношению к ВИРИ, составляющим протяженный волоконный тракт рефлектометра, так как позволяет производить непрерывное наблюдение за ним и установить основные закономерности его работы.*

При исследовании свойств ВИРИ и когерентного рефлектометра важной задачей является выбор оптимального источника лазерного излучения. В когерентных рефлектометрах, в качестве таких источников обычно выступают полупроводниковые лазеры с распределенной обратной связью. Различная степень когерентности используемых источников приводит к различным характеристикам рефлектограмм и интерферограмм, различным уровням шумов интенсивности, вызванных флуктуациями фазы поля источника, а также к различной пороговой чувствительности к внешним воздействиям на оптическое волокно.

Суммарное поле излучения, рассеянного отрезком волокна или ВИРИ, имеет случайную амплитуду и фазу. Объективной характеристикой такого поля может служить статистическая плотность распределения значения его амплитуды, интенсивности и фазы. Плотность распределения, показывающая, с какой вероятностью интенсивность рассеянного излучения принимает различные значения, позволяет определить степень контраста или видность интерферограммы и рефлектограммы, и установить, как часто наблюдаются области фединга. Установление связи статистического распределения интенсивности со степенью когерентности лазерного источника позволит ответить на вопрос об условиях максимального контраста рефлектограммы или интерферограммы и пороговой чувствительности отрезка волокна или ВИРИ к внешним воздействиям.

Статистика интенсивности излучения, рассеянного одномодовым оптическим волокном, впервые была рассмотрена в работах Healey [30, 31].

Рассмотрение производилось на основании приближения импульсного квазимонохроматического излучения лазера, заводимого в оптическое волокно, совокупностью *цугов*, следующих друг за другом, длина каждого цуга, при этом, была равна длине когерентности источника. Данная модель заимствована из теории интегрированной спекл – картины, детально разработанной Гудманом [32 – 34]. Результатом расчёта с применением данной модели являлась плотность распределения вероятностей для интенсивности излучения, рассеянного волоконным трактом. Эта плотность имела вид гамма – распределения с единственным параметром  $M$  – равным числу цугов излучения лазера, укладываемых в область рассеяния (половину пространственной протяженности зондирующего импульса). Как отмечает Гудман [32], метод, используемый в работах, является приближенным, в силу того, что четкого деления квазимонохроматического излучения лазера на цуги не существует. Точное решение нахождения плотности распределения вероятностей для интенсивности рассеянного излучения, основанное на разложении Карунена – Лоэва квазимонохроматического поля источника, по нашим сведениям, до сих пор не производилось.

Важным вопросом, нерассмотренным до настоящего времени, является вопрос о пороговой чувствительности отрезка волокна или ВИРИ к внешним фазовым воздействиям. Решение данной задачи для ВИРИ позволит в дальнейшем, при учёте импульсного характера излучения в рефлектометре, перейти к определению пороговой чувствительности когерентного рефлектометра в целом. Пороговая чувствительность ВИРИ определяется двумя параметрами: *средней мощностью полезного сигнала на выходе интерферометра*, которая сама по себе, является случайной и *средней мощностью шума интенсивности на выходе интерферометра, определяемого, в основном, случайными флуктуациями фазы источника излучения*. Первыми работами по определению спектральных характеристик интенсивности рассеянного волокном излучения являются работы Staubli и Gysel [35 – 40], в них приводится вывод спектральной плотности мощности шума (далее для краткости обозначаемой СПМШ) интенсивности

излучения, рассеянного отрезком оптического волокна, в предположении невысокой степени когерентности источника, а также большой протяженности рассеивающего участка. В этих работах показано, что при указанных условиях кривая СПМШ интенсивности на выходе рассеивающего участка имеет лоренцевскую форму с полушириной равной удвоенной спектральной ширине линии излучения лазерного источника. Данный вывод, однако, не справедлив для рассеивающего участка с длиной, сравнимой с длиной когерентности излучения, что имеет место в ВИРИ, соответственно, эта задача остается нерешенной. Вопрос о средней мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ, при внешнем воздействии на его оптическое волокно, по нашим сведениям, не рассматривался. Также не исследованным остается вопрос о пороговой чувствительности ВИРИ или минимально возможном сигнале внешнего воздействия, детектируемом рассеивающим волокном.

Еще одним малоизученным вопросом, является вопрос о демодуляции рассеянного излучения, с целью определения формы сигнала воздействия на оптическое волокно. Существующие в настоящее время когерентные рефлектометры позволяют зафиксировать лишь факт воздействия на том или ином участке и его величину, однако, сам вид воздействия остается неизвестным [22 – 29]. Однако, восстановление формы сигнала воздействия является ключевым фактором, необходимым для его идентификации и определения источника воздействия. Для интерференционных датчиков вопрос демодуляции излучения является довольно хорошо изученным [41 – 46]. В основе одного из методов демодуляции лежит *принцип фазового разнесения* ( *phase diversity* ), с использованием оптического гибрида, впервые предложенный группой Naval Research Laboratory [43]. Данный метод, по сути, является аналогом метода квадратурной обработки сигнала с угловой модуляцией, рассмотренной в [47]. Впервые применение техники фазового разнесения для определения величины натяжения волокна в когерентном рефлектометре было применено в [48], однако, детальное описание данного метода нами обнаружено не было. Возможности использования техники фазового разнесения для демодуляции рассеянного

излучения для ВИРИ с целью идентификации фазового акустического воздействия на оптическое волокно к настоящему времени не исследованы.

Таким образом, работа по исследованию ВИРИ, как самостоятельного объекта, является в настоящее время актуальной, так как позволяет получить ответы на многие прикладные вопросы интерферометрии и рефлектометрии, и достичь более глубокой степени понимания закономерностей процесса рассеяния когерентного излучения в оптическом волокне. Таким образом, цель настоящей работы можно сформулировать следующим образом.

*Целью настоящей диссертационной работы является анализ интерференционных эффектов обратно-рассеянного излучения в волоконно-оптическом интерферометре рассеянного излучения (ВИРИ), дающий теоретическую и практическую основу для его применения в качестве датчика внешних фазовых воздействий на оптическое волокно.*

**Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:**

- Исследование статистических закономерностей распределения интенсивности излучения, рассеянного оптическим волокном, для полупроводниковых лазеров с различными степенями когерентности;
- Анализ спектральной плотности мощности шума (сокращенно СПМШ) интенсивности рассеянного излучения на выходе различных схем ВИРИ;
- Определение зависимости средней мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ, при внешнем гармоническом воздействии на волокно, от его параметров;
- Определение зависимости среднего отношения сигнал/шум (сокращенно ОСШ) на выходе ВИРИ и пороговой чувствительности интерферометра от его параметров,
- Разработка метода регистрации и демодуляции обратно-рассеянного в ВИРИ излучения для определения формы сигнала внешнего фазового воздействия, с применением метода фазового разнесения;



- Исследование причин возникновения замираний (фединга) восстановленного сигнала и способов его устранения.

**Объектом исследования настоящей работы** является процесс интерференции случайных полей, образующихся при рассеянии когерентного излучения в одномодовом оптическом волокне и его усредненные характеристики.

**Предметом исследования настоящей работы** является волоконный интерферометр рассеянного излучения (ВИРИ), используемый в качестве датчика внешнего фазового воздействия на оптическое волокно.

**Теоретическую и методологическую основу работы** составили труды зарубежных и отечественных авторов по статистике, интерферометрии, статистической оптике и спектральному анализу лазерного излучения. Значительное влияние на исследование оказали работы Дж. Гудмена ( Joseph. W Goodman) по статистической оптике и теории спеклов. При исследовании спектральных характеристик использовалась методология, предложенная К. Петерманом (К. Petermann), а также Б. Мослехи (B. Moslehi). Исследование методов демодуляции рассеянного излучения во многом базировалось на работах группы Naval Research Laboratory: А. Данридж (A. Dandridge), А. Б. Твитен (A. B. Tveten), Р. Г. Прист ( R. G. Priest).

**Основными методами научного исследования, применяемыми в настоящей работе, являются:**

- метод формализации, дающий решение задач в общем математическом виде и связывающий различные параметры исследуемого процесса с помощью аналитических выражений,
- метод математического моделирования с применением ЭВМ, позволяющий получить численное решение рассматриваемых задач, исходя из понимания их закономерностей и базовых физических принципов,

- экспериментальные методы, предполагающие исследования процесса с использованием экспериментальных установок и получение его реальных физических закономерностей.

Совместное применение всех трех основных методов исследования позволяет достичь глубокой степени понимания исследуемого явления, а также обеспечить объективность полученных выводов и результатов.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1) Интенсивность излучения, образованного в результате обратного релеевского рассеяния когерентного излучения одномодовым оптическим волокном имеет случайное значение, в зависимости от статистического распределения рассеивающих центров и их комплексных амплитуд рассеяния. Статистическая плотность распределения этой интенсивности определяется степенью когерентности используемого источника излучения, длиной рассеивающего волокна и степенью поляризации рассеянного излучения. При уменьшении степени когерентности источника излучения, при неизменной длине рассеивающего волокна, функция плотности распределения изменяется, переходя от близкой к обратной экспоненциальной, к близкой к гауссовской, дисперсия распределения при этом снижается.

2) Интенсивность на выходе волоконного интерферометра рассеянного излучения (ВИРИ) имеет шумовую составляющую. Причина возникновения этого шума лежит в случайных флуктуациях фазы излучения полупроводникового лазерного источника. Шум интенсивности на выходе ВИРИ характеризуется средней спектральной плотностью мощности шума (СПМШ), которая зависит от степени когерентности источника излучения и длины рассеивающего участка ВИРИ.

3) Внешнее фазовое воздействие на ВИРИ приводит к появлению отклика на его выходе. Величина этого отклика характеризуется средней мощностью

полезного сигнала, которая зависит от амплитуды внешнего воздействия, степени когерентности источника излучения, длины рассеивающего участка ВИРИ, а также расположением на нем области внешнего воздействия.

4) При условии воздействия на оптическое волокно ВИРИ в области максимального отклика, среднее отношение сигнал/шум (ОСШ) на его выходе, а также его пороговая чувствительность к внешнему фазовому воздействию, выше ОСШ и пороговой чувствительности волоконного интерферометра Маха-Цандера с эквивалентным значением максимальной временной задержки интерферирующих лучей. Это обусловлено как более низким средним уровнем мощности шума, так и более высоким средним уровнем мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ.

5) ВИРИ эффективен для регистрации внешних акустических воздействий на оптическое волокно. Демодуляция рассеянного ВИРИ излучения может быть выполнена методом фазового разнесения, сигнал внешнего воздействия восстанавливается при этом с точностью до масштабного коэффициента. Восстановленный сигнал содержит области замирания или фединга, которые могут быть устранены путем изменения состояния поляризации заводимого в волокно интерферометра излучения или изменения его длины волны.

### **Научная новизна**

1) Теоретически решена задача о нахождении статистической плотности распределения интенсивности рассеянного волокном излучения с применением разложения Карунена-Лоэва. Установлена ее связь со степенью когерентности лазерного источника, длиной области рассеяния и степенью поляризации рассеянного излучения. Теоретические расчёты и результаты математического моделирования подтверждены результатами экспериментов.

2) Впервые теоретически и экспериментально получены зависимости для средней СПМШ интенсивности на выходах одноканальной и двухканальной схем ВИРИ, от степени когерентности лазера, а также от длины рассеивающих участков ВИРИ. Рассмотрены предельные случаи СПМШ интенсивности на

выходе ВИРИ: при низких (акустических) частотах, а также низкой степени когерентности источника и большой протяженности рассеивающего участка.

3) Получены выражения для средних мощностей полезных сигналов одноканальной и двухканальной схем ВИРИ, при внешних гармонических воздействиях на них. Теоретически и экспериментально определена пороговая чувствительность ВИРИ и ее связь со степенью когерентности источника, длиной рассеивающего участка и местом внешнего воздействия на него.

4) Впервые реализована демодуляция излучения двухканального ВИРИ методом фазового разнесения. Доказана эффективность метода для регистрации внешнего акустического воздействия в виде тонового сигнала и музыки. Проанализированы причины возникновения замирания восстановленного сигнала и предложены методы его устранения.

### **Научная и практическая значимость работы**

Научная значимость работы заключается в установлении более глубокой степени понимания физических закономерностей процесса многолучевой интерференции излучения, обратно-рассеянного оптическим волокном. Ряд впервые установленных теоретических зависимостей, подтвержденных экспериментально, дает в общем виде связь детерминированных параметров системы, таких, как степень когерентности источника излучения и длина рассеивающего участка, со случайными параметрами, описание которых может быть сделано только статистически: плотность распределения интенсивности рассеянного излучения, средние спектральные характеристики шумов интенсивности, средний уровень полезного сигнала на выходе интерферометра и его пороговая чувствительность.

Практическая значимость работы определяется тем, что полученные в ней результаты анализа свойств ВИРИ и разработанные методы демодуляции рассеянного излучения и восстановления фазового воздействия на волокно, позволяют существенно расширить функциональные возможности распределенных датчиков на основе когерентного рефлектометра. Результаты

работы использованы в НИР ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН «Цирконий», «Цикламен», «Цуг».

### **Апробация работы**

Основные результаты диссертационного исследования докладывались на Всероссийской конференции по волоконной оптике (г. Пермь, 2011), 8-м и 9-м Конкурсах молодых ученых ИРЭ РАН, имени Ивана Анисимкина (2011 и 2012 годы), обсуждались на научных семинарах ИРЭ РАН.

### **Публикации**

По теме работы опубликовано 9 печатных работ, включая 6 работ в рецензируемых журналах из перечня ВАК, 1 доклад в сборнике трудов Всероссийской конференции по волоконной оптике, 2 тезиса докладов, представленных на 8-й и 9-й конкурсы работ молодых ученых ИРЭ РАН, имени Ивана Анисимкина.

### **Личный вклад автора**

- 1) Решение задачи о нахождении плотности распределения значения интенсивности рассеянного волокном излучения с использованием разложения Карунена – Лоэва. Математическое моделирование процесса рассеяния. Экспериментальное подтверждение статистической зависимости с использованием ВИРИ.
- 2) Вывод аналитического выражения для средней СПМШ ВИРИ, вызванного флуктуациями фазы излучения полупроводникового лазерного источника, в зависимости от степени когерентности лазерного излучения и длины рассеивающего участка. Спектральный анализ шума на выходах одноканальной и двухканальной схем ВИРИ. Экспериментальное исследование шумов ВИРИ.
- 3) Вывод аналитического выражения для средней мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ при внешнем гармоническом воздействии на волокно интерферометра.

- 4) Разработка и экспериментальная проверка метода оценки пороговой чувствительности одноканальной и двухканальной схем ВИРИ.
- 5) Определяющий вклад в исследование демодуляции излучения на выходе ВИРИ с использованием техники фазового разнесения. Экспериментальное применение техники для регистрации и идентификации внешнего акустического воздействия на оптическое волокно.
- 6) Теоретическое и экспериментальное исследование эффекта фединга, возникающего при демодуляции рассеянного интерферометром излучения.

## Глава 1. Статистические закономерности интенсивности обратно – рассеянного волокном излучения

ВИРИ является объектом, в основе работы которого лежат принципиально случайные процессы, которые могут быть проанализированы с помощью статистических методов. Характеристики этого интерферометра случайны как во времени, так и при переходе от одной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров в рассеивающей среде к другой. Временные характеристики ВИРИ в работе будут характеризоваться временными средними значениями, обозначаемыми далее:  $E_T \langle \rangle$ , статистические характеристики будут характеризоваться статистическими средними, обозначаемыми далее:  $E_p \langle \rangle$ . С временным усреднением:  $E_T \langle \rangle$  связаны интенсивность рассеянного излучения, фиксируемая фотоприёмником, и шумовой спектр интенсивности, *определяемые независимо для каждой конкретной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров в среде*. При изменении реализации этого распределения (например, при рассмотрении другого статистически эквивалентного рассеивающего участка) обе эти *средние по времени характеристики* изменяются случайным образом, однако, для этих изменений можно ввести *статистические параметры*, такие как плотность распределения и средние значения, по ансамблю распределений коэффициентов рассеяния центров:  $E_p \langle \rangle$ . *Временные характеристики рассеянного излучения определяются свойствами источника излучения, статистические характеристики определяются свойствами рассеивающей среды*. Поэтому в дальнейшем будем считать, что эти два усреднения: временное и статистическое можно производить независимо друг от друга.

В настоящей главе будет рассмотрена *статистическая плотность распределения интенсивности рассеянного излучения по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров*. При этом мы будем считать,

что квадратичный оптический приемник, регистрирующий интенсивность рассеянного излучения, достаточно медленный, для того, чтобы производить требуемое временное усреднение мгновенной интенсивности рассеянного излучения:  $E_T \langle \rangle$ , и что шумовые флуктуации интенсивности также усредняются. Заметим, что при рассмотрении шумовых характеристик рассеянного излучения в одной из следующих глав, будет предполагаться, что оптический приемник, напротив, достаточно быстрый для наблюдения шумовых флуктуаций интенсивности. Статистическая плотность распределения характеризует, с какой вероятностью интенсивность (воспринимаемая фотоприёмником) принимает те или иные значения. С ней связаны две основные характеристики случайной интенсивности: *ее среднее значение и дисперсия* по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров, которая, как будет показано ниже, соответствует контрасту или видности интерферограммы. Далее будет показано, что с дисперсией можно связать также и среднюю величину мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ, вызванного внешним воздействием.

В настоящей главе выводится выражение для плотности распределения случайной интенсивности излучения, рассеянного участком волокна, и устанавливается ее связь со степенью когерентности источника излучения и длиной рассеивающего участка. Рассматривается также зависимость плотности распределения от степени поляризации рассеянного излучения.

### 1.1. Модель рассеивающей среды

Сформулируем основные физические предположения относительно свойств рассеивающей среды, на основании которых будут базироваться дальнейшие теоретические выкладки. В качестве модели рассеивающей среды примем протяженный отрезок волокна длиной  $L$  с равномерно распределенными по объему центрами рассеяния – микроскопическими неоднородностями показателя преломления [49, А1–А5]. Количество центров зависит от температуры затвердевания волокна при его вытяжке. Размер каждого центра много меньше



длины волны излучения, поэтому само рассеяние можно считать релеевским [5]. Отметим, что процессы вынужденного рассеяния Манделъштама – Бриллюэна, а также вынужденного комбинационного рассеяния в настоящей работе не рассматриваются, вследствие малых протяженностей рассматриваемых рассеивающих участков и относительно небольших мощностей излучений, заводимых в оптическое волокно. При распространении излучения, в диапазоне длин волн 1555 нм в оптическом волокне, потери мощности излучения, вследствие релеевского рассеяния являются преобладающими: часть оптической мощности рассеивается центрами рассеяния. Угловая зависимость напряженности рассеянного каким-либо центром поля совпадает с угловой зависимостью излучения электрического диполя, ориентированного в направлении вектора напряженности падающего на него поля [5]. Некоторая доля рассеянного излучения, которая удовлетворяет условиям распространения в волокне, захватывается волокном и распространяется в обратном направлении [7], то есть происходит так называемое обратное рассеяние. На входе рассеивающего волокна при этом происходит многолучевая интерференция полей излучений, рассеянных большим количеством центров рассматриваемой среды. Как отмечалось в ранних работах по статистике обратного – рассеянного волокном излучения [12, 13, 30, 31], процесс многолучевой интерференции полей рассеянного излучения аналогичен процессу образования спекл – картины при освещении шероховатой поверхности излучением лазера. Соответственно, для описания процесса интерференции рассеянного излучения могут быть применены методы, разработанные в теории спеклов. Обширный материал по теории спеклов содержится, прежде всего, в монографиях Гудмана [32 – 34].

Обозначим  $\rho_n$  – комплексный амплитудный коэффициент рассеяния какого – либо центра, соответствующий доле излучения рассеянного центром, и захваченного волокном в обратном направлении [35]. Статистическую реализацию распределения комплексных коэффициентов рассеяния центров в среде волокна будем обозначать:  $\{\rho\} = \{\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_n\}$ . Сформулируем физические предположения относительно статистических свойств ансамбля

различных реализаций распределений коэффициентов рассеяния центров в оптическом волокне  $\{\rho\}$ , аналогичные свойствам коэффициентов рассеяния, используемым в теории образования спекл – картин [32 – 34]:

- Амплитуда  $|\rho_n|$  и фаза  $\arg(\rho_n)$  каждого комплексного коэффициента рассеяния статистически (по ансамблю) независимы друг от друга, а также от амплитуд и фаз комплексных коэффициентов рассеяния других центров рассеяния,
- Фазы комплексных коэффициентов рассеяния центров распределены равномерно на интервале:  $(-\pi, \pi)$ .

В силу отсутствия в стандартном одномодовом волокне анизотропии рассеяния, будем считать, что комплексный амплитудный коэффициент рассеяния  $\rho$  представляет собой *круговую комплексную гауссовскую случайную величину с нулевым средним значением* (zero – mean circular complex Gaussian random variable) [32 – 35]. Это означает, что его действительная и мнимая части:  $\text{Re}(\rho)$ ,  $\text{Im}(\rho)$  имеют гауссовские распределения по ансамблю каждая, причем, дисперсии действительной и мнимой частей равны друг другу. Физически это предположение эквивалентно тому, что при рассеянии происходит умножение комплексной амплитуды поля источника на случайные величины, имеющие гауссовские распределения действительной и мнимой частей с нулевыми средними значениями.

Рассмотрим теперь малый объем волокна с длиной  $\Delta l$ , расположенный на расстоянии  $z$  от начала рассеивающего участка, пусть число центров рассеяния, расположенных в этом объеме равно  $N$ , а коэффициент обратного захвата излучения при рассеянии на каком – либо центре равен  $s_i$ , тогда суммарный амплитудный коэффициент рассеяния данного объема равен:  $\Delta\rho(z) = \sum_{i=1}^N s_i \rho_i$ . В силу того, что коэффициенты рассеяния всех центров по предположению являются некоррелированными круговыми комплексными гауссовскими

случайными величинами,  $\Delta\rho(z)$  также будет является круговой комплексной гауссовской случайной величиной, с нулевым средним значением, так как является суммой таких величин [33]. Введем теперь *дифференциальный комплексный коэффициент рассеяния* участка волокна бесконечно малой длины  $dl$ , расположенный на расстоянии  $z$  от начала рассеивающего участка, путем определения предела:  $\rho(z) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} (\Delta\rho(z)/\Delta l)$ , который также будет является круговой комплексной гауссовской случайной величиной с нулевым средним значением. Таким образом, можно заменить равномерное пространственное распределение центров рассеяния осевым, с дифференциальным коэффициентом рассеяния  $\rho(z)$ . Далее, говоря о центрах рассеяния, мы будем иметь в виду именно *осевое приближение*.

Математически некоррелированность комплексных коэффициентов рассеяния центров с продольными координатами:  $z_m$  и  $z_n$ , а также равенство дисперсий их действительных и мнимых частей можно записать в виде двух выражений [32]:

$$E_\rho \langle \rho(z_n) \rho(z_m) \rangle = 0 \quad (1.1),$$

$$E_\rho \langle \rho^*(z_n) \cdot \rho(z_m) \rangle = \rho_0 \cdot \delta(z_n - z_m) \quad (1.2),$$

где  $E_\rho \langle \rangle$  – как упомянуто раньше, обозначает усреднение по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  или усреднение по ансамблю независимых рассеивающих участков,  $z_n, z_m$  – координаты центров рассеяния, расположенных на оси волокна,  $\rho_0/2$  – дисперсия по ансамблю действительной и мнимой частей коэффициентов рассеяния  $\rho$ ,  $\delta$  – дельта функция. Первое выражение обозначает равенство дисперсий действительной и мнимой частей каждого коэффициента рассеяния  $\rho$ , второе – некоррелированность коэффициентов рассеяния центров по ансамблю  $\{\rho\}$ .

## 1.2. Автокорреляционная функция излучения полупроводникового лазера

В настоящей работе рассматривается ВИРИ, в котором в качестве источника используется полупроводниковый лазер с распределенной обратной связью. Данный вид источников чаще всего применяется и в когерентной рефлектометрии [27 – 29], хотя в некоторых работах предлагается использование волоконных лазеров [23 – 25]. Полупроводниковые лазеры обычно имеют довольно узкую спектральную ширину линии, а также высокую температурную стабильность. Рассмотрим некоторые важные особенности излучения полупроводниковых лазеров.

Пусть лазерный источник генерирует излучение, аналитическое представление вектора напряженности электрического поля которого может быть записано в виде [35]:

$$\vec{U}_s(t) = \vec{A}_s(t) \cdot \exp(i\omega_0 t) \quad (1.3),$$

$$\vec{A}_s(t) = \vec{p}_s \cdot \sqrt{I_s} \cdot \exp(i\varphi_s(t)) \quad (1.4),$$

где  $\vec{A}_s(t)$  – вектор комплексной амплитуды поля источника,  $\vec{p}_s$  – вектор поляризации излучения источника,  $I_s$  – интенсивность излучения,  $\varphi_s(t)$  – фаза излучения источника,  $\omega_0$  – оптическая частота.

Основной причиной уширения спектральной линии полупроводникового лазера являются случайные флуктуации фазы  $\varphi_s(t)$  генерируемого им оптического поля. Эти флуктуации вызваны случайными актами спонтанной эмиссии, происходящей в среде лазера [50, 51]. Случайность актов спонтанной эмиссии учитывается в классических скоростных уравнениях для полупроводникового лазера путем добавления случайных сил Ланжевена [50]. В силу большого количества случайных актов спонтанной эмиссии, а также в силу Центральной Предельной Теоремы, силы Ланжевена имеют гауссовскую плотность распределение по величине. Малое значение фазовых флуктуаций позволяет линеаризовать скоростные уравнения, при этом уравнение для фазы поля становится аналогичным уравнению для случайного блуждания под

воздействием гауссовских сил Ланжевена. Поэтому, плотность распределения для приращения фазы генерируемого излучения полупроводникового лазера также описывается гауссовской плотностью распределения [51]. Кроме того, при условии, что генерация происходит над порогом генерации, флуктуации интенсивности излучения лазера пренебрежимо малы [52]. В качестве модели случайного изменения фазы обычно принимают Винеровский случайный процесс [52], который является предельным случаем процесса случайного блужданий при стремлении числа шагов к бесконечности. Согласно данной модели случайный процесс изменения фазы нестационарен (его плотность распределения зависит от времени) и имеет нормальную (гауссовскую) плотность распределения с нулевым средним значением:

$$p_{\varphi}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} \cdot \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\alpha t}\right) \quad (1.5),$$

где  $\alpha$  – параметр, определяемый конкретной физикой процесса, его физический смысл будет ясен позднее,  $t$  – время. Среднеквадратичное отклонение фазы определяется как:

$$E_{\varphi} \langle \varphi^2(t) \rangle = \alpha \cdot t \quad (1.6),$$

$E_{\varphi} \langle \rangle$  – обозначает статистическое усреднение по все возможным значениям  $\varphi$ .

Автокорреляционная функция Винеровского процесса определяется как [53]:

$$R_{\varphi}(t_1, t_2) = E_{\varphi} \langle \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \rangle = \alpha \min(t_1, t_2) \quad (1.7),$$

где  $t_1, t_2$  – произвольные моменты времени,  $\min$  – обозначает выбор минимального из значений. Важное свойство Винеровского процесса заключается в том, что, несмотря на его нестационарность, его приращения стационарны во времени и подчиняются гауссовскому распределению с нулевым средним значением. Таким образом, разница фаз:  $\Delta\varphi(t_1, t_2) = \varphi(t_1) - \varphi(t_2)$ , подчиняется распределению:

$$p_{\Delta\varphi}(\Delta\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_{\Delta\varphi}}} \cdot \exp\left(-\frac{\Delta\varphi^2}{2 \cdot \sigma_{\Delta\varphi}^2}\right) \quad (1.8).$$

где  $\sigma_{\Delta\varphi}^2$  – среднеквадратичное отклонение случайной разности фаз, которое, согласно (1.6) и (1.7) зависит только от разности моментов времени [52, 54]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta\varphi}^2 &= E_{\varphi} \left\langle \left( \varphi(t_1) - \varphi(t_2) \right)^2 \right\rangle = E_{\varphi} \left\langle \varphi(t_1)^2 \right\rangle + E_{\varphi} \left\langle \varphi(t_2)^2 \right\rangle - 2E_{\varphi} \left\langle \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \right\rangle = \\ &= \alpha t_1 + \alpha t_2 - 2\alpha \min(t_1, t_2) = \alpha |t_1 - t_2| = \alpha |\tau|\end{aligned}\quad (1.9)$$

Рассмотрим теперь статистическую автокорреляционную функцию излучения полупроводникового лазера. По определению, автокорреляционная функция случайного процесса, которым в данном случае является процесс флуктуаций комплексной амплитуды поля источника излучения, с учетом (1.3) и (1.4) представляется в виде:

$$R_s(t, t + \tau) = E_{\varphi} \left\langle \vec{U}_s(t + \tau) \cdot \vec{U}_s^*(t) \right\rangle = I_s \cdot \exp(i\omega_0\tau) \cdot E_{\varphi} \left\langle \exp(i\Delta\varphi(\tau)) \right\rangle \quad (1.10).$$

Среднее значение в (1.10) вычислено в *приложении 1*. Таким образом, с учетом (1.9) статистическая автокорреляционная функция случайного процесса флуктуации поля полупроводникового лазера равна:

$$R_s(t, t + \tau) = E_{\varphi} \left\langle A_s(t + \tau) \cdot A_s^*(t) \right\rangle \cdot \exp(i\omega_0\tau) \quad (1.11),$$

где

$$E_{\varphi} \left\langle A_s(t + \tau) \cdot A_s^*(t) \right\rangle = I_s \cdot \exp\left(\frac{-\alpha \cdot |\tau|}{2}\right) \quad (1.12).$$

Важным обстоятельством, которым мы воспользуемся далее, является *эргодичность* флуктуаций комплексной амплитуды поля лазерного источника [52]. В связи с этим, статистическое усреднение  $E_{\varphi} \left\langle \right\rangle$ , можно заменить усреднением по времени, которое производит регистрирующий фотоприёмник:

$$E_T \left\langle F(t) \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt, \quad \text{где } F(t) \text{ – функция, подлежащая усреднению.}$$

Таким образом, справедливо:

$$E_T \left\langle A_s(t + \tau) \cdot A_s^*(t) \right\rangle = E_{\varphi} \left\langle A_s(t + \tau) \cdot A_s^*(t) \right\rangle = I_s \cdot \exp\left(\frac{-\alpha \cdot |\tau|}{2}\right) \quad (1.13)$$

Автокорреляционная функция поля источника излучения также называется *функцией собственной когерентности оптического сигнала*  $\Gamma_s(\tau)$ .

Нормированная функция собственной когерентности называется комплексной степенью когерентности оптического сигнала [33]:  $\gamma_s(\tau)$ . Согласно определению, введенному Манделем [52], время когерентности  $\tau_{coh}$  определяется как интеграл от квадрата модуля комплексной степени когерентности сигнала по всем временным задержкам  $\tau$  :

$$\tau_{coh} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_s(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \exp\left(\frac{-\alpha \cdot |\tau|}{2}\right) \right|^2 d\tau = \frac{2}{\alpha} \quad (1.14),$$

что и определяет физический смысл константы пропорциональности  $\alpha$  .

Выражение для автокорреляционной функции случайного поля источника можно теперь записать в виде:

$$R_s(t, t + \tau) = I_s \cdot \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_{coh}}\right) \cdot \exp(i\omega_0\tau) \quad (1.15),$$

а для автокорреляционной функции комплексной огибающей этого поля в виде:

$$E_T \langle A_s(t + \tau) \cdot A_s^*(t) \rangle = I_s \cdot \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_{coh}}\right) \quad (1.16)$$

Заметим, что рассматриваемый случайный процесс флуктуации комплексной амплитуды поля источника является стационарным в широком смысле [32, 33], так как его автокорреляционная функция не зависит от конкретных значений границ временного интервала, а зависит лишь от временной задержки  $\tau$  . Для случайных процессов стационарных в широком смысле справедлива теорема Винера – Хинчина, согласно которой, автокорреляционная функция случайного процесса и его спектральная плотность мощности являются Фурье – образами друг друга [33]. Производя Фурье – преобразование автокорреляционной функции (1.15) , получаем выражение для спектральной плотности мощности излучения полупроводникового лазера:

$$S_s(\nu) = \frac{2\tau_{coh}}{1 + [2\pi\tau_{coh}(\nu - \nu_0)]^2} \text{ или } S_s(\nu) = \frac{2/(\pi\Delta\nu)}{1 + [2(\nu - \nu_s)/\Delta\nu]^2} \quad (1.17),$$

где  $\Delta\nu = 1/\pi\tau_{coh}$  – полуширина спектральной линии. Таким образом, случайный процесс с автокорреляционной функцией (1.15) имеет лоренцевский спектр, а

полупроводниковый лазер имеет лоренцевскую форму спектральной линии [50 – 52]. В дальнейшем будем считать, что ширина спектральной линии лазерного источника мала, то есть для нее выполняется соотношение:  $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$  и излучение является квазимонохроматическим.

### 1.3. Усредненная интенсивность обратно – рассеянного волокном излучения

Основной характеристикой оптического излучения, которая может быть непосредственно измерена в эксперименте с помощью фотоприемника, является его интенсивность. При рассеянии непрерывного ( не модулированного ) излучения лазера средой волокна значение интенсивности рассеянного излучения, как было указано ранее, зависит от конкретной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  в нем, при неизменной реализации, интенсивность рассеянного излучения будет неизменна, при изменении реализации интенсивность изменяется случайным образом. Заметим, что изменение реализации  $\{\rho\}$  эквивалентно замене конкретного рассеивающего участка на другой участок статистически подобный первому. *Для излучения, рассеянного случайной средой оптического волокна, таким образом, можно ввести среднее значение, характеризующее распределение интенсивности по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  или по ансамблю независимых статистически эквивалентных рассеивающих участков.* Поясним это на примере. При освещении классического интерферометра Майкельсона или Маха – Цендера квазимонохроматическим излучением, при неизменной разнице длин плеч, на его выходе будет наблюдаться интерференционная картина, значение интенсивности в которой будет неизменно. В зависимости от разности оптических путей в плечах интерферометра, значение интенсивности на его выходе будет расположено в диапазоне от минимального до максимального [55]. При этом диапазон изменения интенсивности на выходе интерферометра будет определяться функцией



собственной когерентности источника  $\Gamma_s(\tau)$ . Отметим также, что кроме неизменного значения интенсивности, на выходе интерферометра будут наблюдаться временные шумовые флуктуации интенсивности, причина которых лежит в конечной ширине спектра лазерного источника.

Аналогичные выводы справедливы и для интерференции излучения, рассеянного на случайных неоднородностях среды, то есть для ВИРИ. При неизменном взаимном расположении центров рассеяния, интенсивность рассеянного излучения *будет неизменной*, в то же самое время вокруг значения интенсивности будут наблюдаться шумовые флуктуации, вызванные конечной шириной спектра источника, эти временные флуктуации рассматриваются в одной из следующих глав. Если комплексные амплитуды коэффициентов рассеяния центров будут меняться, переходя от одной случайной реализации распределения к другой реализации, то будет также меняться и значение интенсивности на выходе интерферометра и ее зашумленность. В результате, при плавном переходе от одной реализации  $\{\rho\}$  к другой, значение интенсивности *на выходе ВИРИ, в начале рассеивающего участка*, будет испытываться случайный дрейф, амплитуда шумовых флуктуаций также будет изменяться, см. рисунок 1.1.

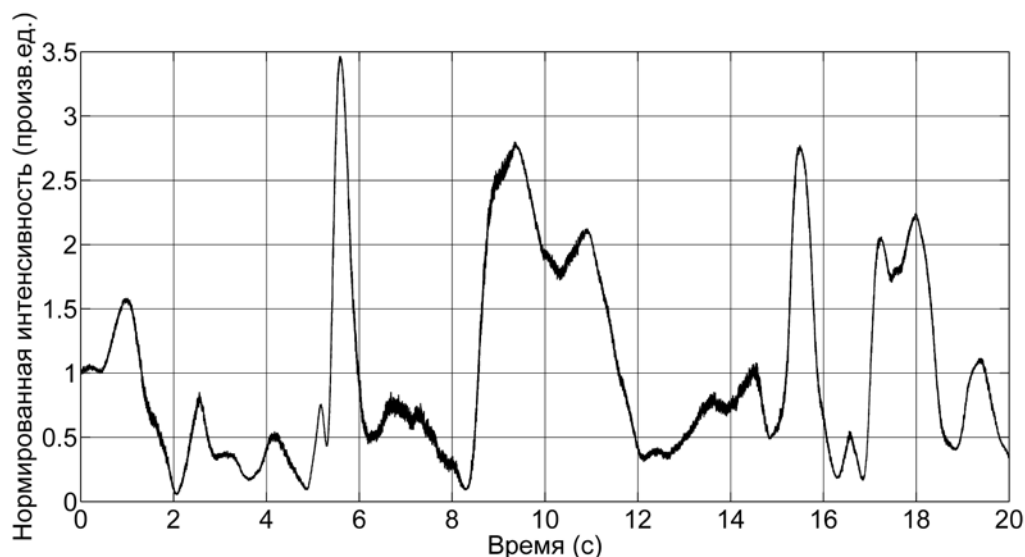
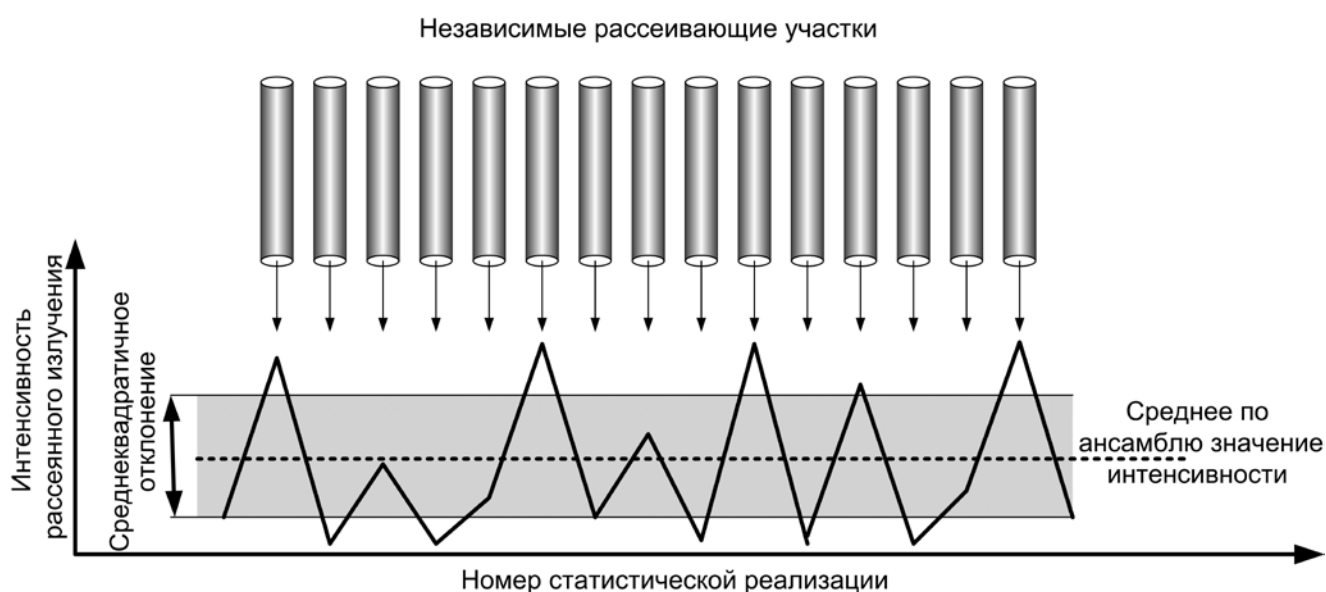


Рисунок 1.1 – Экспериментальная кривая, изображающая случайный дрейф интенсивности на выходе одноканального ВИРИ (см. рисунок 1.16), при плавном изменении реализации распределения центров рассеяния из – за температурного дрейфа, видна меняющаяся во времени зашумленность.

Плавный случайный дрейф интенсивности рассеянного излучения наблюдается в случае, если отрезок волокна находится под влиянием температурных дрейфов, изменяющих случайным образом комплексные амплитуды полей рассеянного излучения.

Если теперь предположить, что комплексные амплитуды коэффициентов рассеяния центров меняются так, что их корреляцией при переходе от реализации к реализации можно пренебречь, то мы переходим к предельному случаю шумовых флуктуаций – *когерентному шуму*. Его формирование поясняет рисунок 1.2.



*Рисунок 1.2 – Иллюстрация процесса формирования статистического распределения интенсивности при переходе от одной независимой реализации распределения коэффициентов рассеяния центров к другой. Пунктирной линией показано среднее по ансамблю значение интенсивности рассеянного излучения, заштрихованная область показывает среднеквадратичное отклонение интенсивности рассеянного излучения по ансамблю.*

Отметим, что именно этот когерентный шум (флуктуация интенсивности при переходе от одной реализации распределения  $\{\rho\}$  к другой) наблюдается на выходе когерентного рефлектометра, он и представляет собой когерентную рефлектограмму, так как неперекрывающиеся рассеивающие участки, последовательно занимаемые импульсом при его прохождении по волоконному тракту, можно считать участками с некоррелированными, но статистически

эквивалентными распределениями коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ .

Вычислим среднее значение интенсивности на выходе рассеивающей среды по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , оно показано пунктирной линией на рисунке 1.2. Данная процедура аналогична вычислению среднего значения рефлектограммы когерентного рефлектометра, в предположении малого затухания в среде.

Пусть в рассматриваемый отрезок рассеивающей среды (оптического волокна) длиной  $L$  вводится излучение полупроводникового лазера, аналитическое представление вектора напряженности электрического поля которого может быть записано в виде [35] (1.3), (1.4). Отклик фотоприемника, регистрирующего излучение, определяется средней по времени интенсивностью. Мгновенное значение интенсивности определяется как квадрат аналитического сигнала. Так как несущая частота  $\omega_0$  не влияет на итоговую интенсивность, регистрируемую фотоприемником, то дальнейший анализ можно вести с использованием только вектора комплексной амплитуды (1.4). Вектор комплексной амплитуды поля излучения источника, падающего на рассеивающий центр, расположенный на удалении  $z$  от начала волокна, можно записать в виде [A1]:

$$\vec{A}_{inc}(t, z) = \mathbf{P}(z) \cdot \vec{A}_s(t - z/v_{gr}) \cdot \exp(-\alpha z/2) \cdot \exp(-ikz) \quad (1.18),$$

где  $\mathbf{P}(z)$  – матрица Джонса, описывающая изменение состояния поляризации излучения при его распространении вдоль оси волокна  $z$ ,  $\alpha$  – погонный коэффициент затухания мощности излучения в волокне,  $k = \omega_0/c$  – постоянная распространения излучения,  $v_{gr}$  – групповая скорость излучения. Комплексная амплитуда поля излучения в начале волокна, рассеянного центром, расположенным на расстоянии  $z$  от начала волокна, может быть записана в виде:

$$\vec{A}_{scat}(t, z) = \mathbf{M}(z) \cdot \vec{A}_s(t - 2z/v_{gr}) \cdot \exp(-\alpha z) \cdot \exp(-2ikz) \cdot \rho(z) \quad (1.19),$$

где  $\mathbf{M}(z) = \mathbf{P}(z)^T \cdot \mathbf{P}(z)$  – матрица Джонса, описывающая изменение состояния поляризации излучения, при его распространении до точки  $z$  и обратно. При

распространении по волокну *состояние поляризации излучения изменяется случайным образом*, это изменение происходит вследствие наличия случайного двулучепреломления в оптическом волокне, а также перераспределения энергии поляризационных мод вследствие случайных поворотов осей двулучепреломления – связывания поляризационных мод [56 – 59]. В зависимости от соотношения параметров: длины рассеивающего участка, двулучепреломления участка и характерной длины связи поляризационных мод, состояние и степень поляризации излучения, распространяющегося по волокну, изменяется. Изотропное оптическое волокно, обычно моделируется каскадом следующих друг за другом секций, каждая из которых имеет случайную величину двулучепреломления и случайную ориентацию осей [56, 57]. При этом, в пределе, при стремлении количества независимых секций к бесконечности, излучение, занимающее рассеивающий участок, становится *полностью деполяризованным в среднем по времени, в том смысле, что излучение может принимать любое состояние поляризации с равной вероятностью*. Вектор Стокса такого деполяризованного по времени излучения может принимать любые значения на сфере Пуанкаре. При рассеянии, как было указано ранее, предлагается, что состояние поляризации не изменяется. Полностью деполяризованное излучение после рассеяния и распространения в обратном направлении *частично восстанавливает степень поляризации* таким образом, что состояние поляризации на входе рассеивающего участка совпадает с состоянием поляризации исходного излучения, заводимого в волокно, степень поляризации в указанном пределе становится равна  $1/3$  [56, 57, 59]. Отметим важное обстоятельство: под деполяризацией в данной работе мы понимаем *временную деполяризацию*, вызванную только влиянием случайного двулучепреломления в волокне, деполяризацией вследствие конечной ширины спектральной характеристики излучения, мы пренебрегаем в силу узости этой характеристики [58]. Будем считать, что для различных реализаций распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , степень поляризации рассеянного излучения одинакова и равна  $P$ , которая в пределе равна  $1/3$ . Далее, в каждом

пункте настоящей главы мы будем отдельно рассматривать два случая: (а) случай неизменной поляризации излучения, распространяющегося по оптическому волокну, соответствующий полной поляризованности рассеянного излучения и (б) случай случайного изменения состояния поляризации излучения, распространяющегося по оптическому волокну, приводящего к тому, что степень поляризации рассеянного излучения снижается, в пределе стремясь к значению  $P = 1/3$ .

### 1.3.1. Интенсивность полностью поляризованного обратно – рассеянного излучения

Полное поле излучения, рассеянного волокном, и приходящего на фотоприемник в момент времени  $t$ , будет представлять собой векторную сумму полей излучений, рассеянных каждым отдельным центром с продольной координатой  $z_n$ , для их комплексных амплитуд справедливо:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{scat}^{\rho}(t) &= \sum_{n=1}^N \vec{A}_{scat}(t, z_n) = \\ &= \sum_{n=1}^N \mathbf{M}(z_n) \cdot \vec{A}_s(t - 2z_n/v_{rg}) \cdot \exp(-\alpha z_n) \cdot \exp(-2ikz_n) \cdot \rho(z_n) \end{aligned} \quad (1.20),$$

где  $N$  – число центров рассеяния в рассматриваемом отрезке волокна, индекс  $\rho$  указывает на то, что полное поле рассчитано, для какой – либо конкретной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , при другой реализации  $\{\rho\}$  суммарное поле, как отмечалось ранее, будет иметь другое значение. Переходя в выражении (1.20) к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , учитывая, что число центров рассеяния велико, суммирование в выражении можно заменить интегрированием, в итоге получим:

$$\vec{A}_{scat}^{\rho}(t) = \int_0^L \mathbf{M}(z) \cdot \vec{A}_s(t - 2z/v_{gr}) \cdot \exp(-\alpha z) \cdot \exp(-2ikz) \cdot \rho(z) dz \quad (1.21).$$

Без ограничения общности можно считать, что в волокно вводится линейно поляризованное излучение. Так как состояние и степень поляризации рассеянного

излучения по предположению неизменны, матрица Джонса:  $\mathbf{M}(z)$  – единичная и ее можно опустить. Также учтем, что в пределах рассматриваемого отрезка волокна вектор комплексной амплитуды излучения затухает слабо, то есть погонный коэффициент затухания  $\alpha$  достаточно мал (что имеет место на практике для характерных длин волокна  $L \sim 100$  м). Тогда для мгновенной интенсивности рассеянного излучения получим :

$$\left( I_{scat}^{\rho}(t) \right)_{inst} = \int_0^L \int_0^L A_s^* \left( t - 2z_1/v_{gr} \right) A_s \left( t - 2z_2/v_{gr} \right) \exp(2ikz_1) \exp(-2ikz_2) \cdot \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \quad (1.22),$$

Интенсивность, измеряемая фотоприемником, определяется как среднее по времени значение мгновенной интенсивности, то есть:

$$\begin{aligned} I_{scat}^{\rho} &= E_T \left\langle \left( I_{scat}^{\rho}(t) \right)_{inst} \right\rangle = \\ &= \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle A_s^* \left( t - 2z_1/v_{gr} \right) A_s \left( t - 2z_2/v_{gr} \right) \right\rangle \exp(2ikz_1) \exp(-2ikz_2) \cdot \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (1.23),$$

с учетом (1.16) выражение (1.23) можно записать в виде:

$$I_{scat}^{\rho} = I_s \int_0^L \int_0^L \exp \left( -\frac{2}{v_{gr}} \frac{|z_2 - z_1|}{\tau_{coh}} \right) \exp(2ikz_1) \exp(-2ikz_2) \cdot \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \quad (1.24).$$

Выражение (1.24) представляет собой общее выражение для интенсивности излучения, рассеянного средой с конкретной фиксированной реализацией распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ . Рассмотрим теперь среднее значение этой интенсивности по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , для этого вычислим среднее значение см. рисунок 1.2:

$$I_{scat}^{mean} = E_{\rho} \left\langle I_{scat}^{\rho} \right\rangle \quad (1.25).$$

Учитывая исходные статистические предположения относительно свойств комплексных амплитудных коэффициентов рассеяния центров (1.1) и (1.2), при усреднении (1.24) по ансамблю можно положить  $z_n = z_m$ . В итоге получаем [35]:

$$I_{scat}^{mean} = I_s \int_0^L \rho_0 dz = I_s L \rho_0 = I_s \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 T \quad (1.26),$$

где введено обозначение максимальной временной задержки между интерферирующими лучами:  $T = 2L / v_{gr}$ . Выражение (1.26) представляет собой среднее значение для интенсивности излучения, вычисленное по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  или по ансамблю независимых рассеивающих участков, оно также равно среднему значению когерентной рефлектограммы, в предположении, что на протяженности волоконного тракта затухание излучения мало. Выражение для среднего значения с учетом затухания в волоконном тракте получено в [35], однако, для дальнейшего анализа ВИРИ, в котором протяженность рассеивающего участка невелика, достаточным будет выражение (1.26).

### 1.3.2. Интенсивность частично поляризованного обратно – рассеянного излучения

Обозначим степень поляризации рассеянного излучения через  $P$ . Эрмитова матрица когерентности квазимонохроматического частично поляризованного излучения может быть диагонализирована с помощью некоторого унитарного преобразования [33, 55, 60]. В результате, в новом базисе, частично поляризованное квазимонохроматическое излучение с интенсивностью  $|A|^2$  можно представить в виде суммы двух некоррелированных излучений, имеющих в общем случае эллиптическую поляризацию и поляризованных ортогонально, в смысле ортогональности векторов Джонса этих излучений. Интенсивности каждой из двух ортогональных поляризационных компонент при этом равны:  $|A|^2(1-P)/2$  и  $|A|^2(1+P)/2$  [33]. Запишем суммарную интенсивность рассеянного излучения для конкретной реализации распределения  $\{\rho\}$  в виде двух некоррелированных интенсивностей:

$$\begin{aligned}
& (I_{scat}^\rho)_{partpol} = \\
& = \frac{1-P}{2} \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle A_s^*(t-2z_1/v_{gr}) A_s(t-2z_2/v_{gr}) \right\rangle \exp(2ikz_1) \exp(-2ikz_2) \cdot \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 + \\
& + \frac{1+P}{2} \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle A_s^*(t-2z_1/v_{gr}) A_s(t-2z_2/v_{gr}) \right\rangle \exp(2ikz_1) \exp(-2ikz_2) \cdot \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2
\end{aligned} \tag{1.27}$$

При усреднении по ансамблю  $\{\rho\}$ , с учетом замены  $z_n = z_m$ , получаем:

$$I_{scat}^{mean} = I_s \int_0^L \left( \frac{1-P}{2} + \frac{1+P}{2} \right) \rho_0 dz_2 = I_s L \rho_0 = I_s \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 T \tag{1.28}$$

*Таким образом, учет случайного изменения состояния поляризации распространяющегося в рассеивающей среде излучения и результирующей частичной деполяризации рассеянного излучения не ведет к изменению среднего по ансамблю значения интенсивности рассеянного излучения.*

Важный вывод, который следует из (1.26) и (1.28), заключается в том, что среднее значение интенсивности по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  не зависит от степени когерентности лазерного источника, а определяется только длиной рассеивающего участка и интенсивностью заводимого в волокно излучения. Из (1.28) также следует, что средняя по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивность рассеянного излучения не зависит от степени его деполяризации.

#### **1.4. Дисперсия интенсивности обратно – рассеянного волокном излучения**

Другой важной характеристикой рассеянного излучения является дисперсия интенсивности рассеянного излучения по ансамблю реализаций коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  или по ансамблю независимых рассеивающих участков, среднеквадратичное отклонение (квадратный корень из дисперсии) показано заштрихованной областью на рисунке 1.2. Эта величина характеризует отклонение случайного значения интенсивности рассеянного излучения от среднего по ансамблю значения (1.26) при переходе от одной реализации



распределения  $\{\rho\}$  к другой. Как будет ясно позднее, с дисперсией интенсивности можно связать контраст рефлектограммы когерентного рефлектометра или видность интерференционной картины для интерферометра, а также чувствительность интерферометра к внешним фазовым воздействиям на оптическое волокно.

Дисперсия интенсивности рассеянного излучения по ансамблю  $\{\rho\}$  определяется как статистическое среднее по ансамблю от произведения интенсивностей для разных реализаций  $\{\rho\}$ , за вычетом квадрата среднего значения интенсивности (1.26), то есть:

$$D(I_{scat}) = E_{\rho} \left\langle E_T \left\langle (I_{scat}^{\rho_1}(t))_{inst} \right\rangle E_T \left\langle (I_{scat}^{\rho_2}(t))_{inst} \right\rangle \right\rangle - (I_{scat}^{mean})^2 = E_{\rho} \left\langle I_{scat}^{\rho_1} I_{scat}^{\rho_2} \right\rangle - (I_{scat}^{mean})^2 \quad (1.29),$$

где индексы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  обозначают различные реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ .

#### 1.4.1. Дисперсия полностью поляризованного обратно – рассеянного излучения

С учетом (1.23) для второго момента интенсивности по ансамблю  $\{\rho\}$  получим:

$$E_{\rho} \left\langle I_{scat}^{\rho_1} I_{scat}^{\rho_2} \right\rangle = E_{\rho} \left\langle \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \right\rangle \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \cdot \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \times \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle A_s^*(t - 2z_3/v_{gr}) A_s(t - 2z_4/v_{gr}) \right\rangle \exp(2ikz_3 - 2ikz_4) \cdot \rho^*(z_3) \rho(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \quad (1.30).$$

В силу того, что амплитуды коэффициентов рассеяния центров, для каждой конкретной реализации распределения  $\{\rho\}$  и комплексные амплитуды полей статистически независимы друг от друга, их усреднение можно производить

независимо [35]. Выражение (1.30), преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
E_\rho \langle I_{scat}^{\rho 1} I_{scat}^{\rho 2} \rangle = & \\
= \int_0^L \int_0^L \int_0^L \int_0^L & \left[ E_T \langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \rangle \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \times \right. \\
& \times E_T \langle A_s^*(t - 2z_3/v_{gr}) A_s(t - 2z_4/v_{gr}) \rangle \exp(2ikz_3 - 2ikz_4) \left. \right] \times \\
& \times E_\rho \langle \rho^*(z_1) \rho(z_2) \rho^*(z_3) \rho(z_4) \rangle dz_1 dz_2 dz_3 dz_4
\end{aligned} \quad (1.31).$$

Воспользуемся далее теоремой о гауссовском моменте для случайных комплексных величин, какими по предположения являются комплексные коэффициенты рассеяния  $\rho$  [61] :

$$E_\rho \langle \rho_{i1}^* \rho_{i2}^* \dots \rho_{iN}^* \rho_{j1} \rho_{j2} \dots \rho_{jM} \rangle = \begin{cases} 0 & N \neq M \\ \sum_{\substack{\text{all pairs} \\ ij}} E_\rho \langle \rho_{i1}^* \rho_{j1} \rangle E_\rho \langle \rho_{i2}^* \rho_{j2} \rangle \dots E_\rho \langle \rho_{iN}^* \rho_{jM} \rangle & N = M \end{cases} \quad (1.32),$$

тогда получим для среднего значения:

$$\begin{aligned}
E_\rho \langle \rho^*(z_1) \rho(z_2) \rho^*(z_3) \rho(z_4) \rangle = & \\
= E_\rho \langle \rho^*(z_1) \rho(z_2) \rangle E_\rho \langle \rho^*(z_3) \rho(z_4) \rangle + E_\rho \langle \rho(z_2) \rho^*(z_3) \rangle E_\rho \langle \rho^*(z_1) \rho(z_4) \rangle = & \\
= \rho_0^2 \delta(z_1 - z_2) \delta(z_3 - z_4) + \rho_0^2 \delta(z_2 - z_3) \delta(z_1 - z_4) & \\
\end{aligned} \quad (1.33).$$

С учетом (1.33), выражение для второго момента (1.31) примет вид:

$$\begin{aligned}
E_\rho \langle I_{scat}^{\rho 1} I_{scat}^{\rho 2} \rangle = & \\
= \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L & |A_s(t - 2z_1/v_{gr})|^2 |A_s(t - 2z_2/v_{gr})|^2 dz_1 dz_2 + \\
+ \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L & E_T \langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \rangle E_T \langle A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) A_s(t - 2z_1/v_{gr}) \rangle dz_1 dz_2
\end{aligned} \quad (1.34).$$

В последнем выражении исключена разность фаз, обусловленная разностью координат центров рассеяния. Воспользовавшись теперь (1.4) и (1.16), получим:

$$E_\rho \langle I_{scat}^{\rho 1} I_{scat}^{\rho 2} \rangle = \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L I_s^2 dz_1 dz_2 + \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \exp\left(-\frac{4}{v_{gr}} \frac{|z_2 - z_1|}{\tau_{coh}}\right) dz_1 dz_2 \quad (1.35).$$

Делая замену переменных:

$$\tau_1 = 2z_1/v_{gr}, \tau_2 = 2z_2/v_{gr}, T = 2L/v_{gr} \quad (1.36),$$

перейдем к более удобной для дальнейшего рассмотрения записи:

$$E_\rho \langle I_{scat}^{\rho 1} I_{scat}^{\rho 2} \rangle = \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 d\tau_1 d\tau_2 + \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (1.37).$$

Выражение для второго центрального момента, то есть дисперсии, с учетом (1.26) примет вид:

$$D(I_{scat}) = E_\rho \langle I_{scat}^{\rho 1} I_{scat}^{\rho 2} \rangle - (I_{scat}^{mean})^2 = \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (1.38).$$

#### 1.4.2. Дисперсия частично поляризованного обратно – рассеянного излучения

С учетом (1.27) и некоррелированности полей двух ортогональных поляризаций, для второго момента случайного значения интенсивности по ансамблю  $\{\rho\}$  получим:

$$\begin{aligned} E_\rho \left\langle \left( I_{scat}^{\rho 1} \right)_{partpol} \left( I_{scat}^{\rho 2} \right)_{partpol} \right\rangle &= \left( \frac{1-P}{2} \right)^2 E_\rho \langle I_{scat}^{\rho 1} I_{scat}^{\rho 2} \rangle + \left( \frac{1+P}{2} \right)^2 E_\rho \langle I_{scat}^{\rho 1} I_{scat}^{\rho 2} \rangle + \\ &+ 2 \left( \frac{1-P^2}{4} \right) (I_{scat}^{mean})^2 = \frac{1+P^2}{2} E_\rho \langle I_{scat}^{\rho 1} I_{scat}^{\rho 2} \rangle + \frac{1-P^2}{2} (I_{scat}^{mean})^2 \end{aligned} \quad (1.39),$$

где  $E_\rho \langle I_{scat}^{\rho 1} I_{scat}^{\rho 2} \rangle$  определяется выражением (1.30).

В результате, с учетом частичной деполаризации рассеянного излучения, дисперсия распределения интенсивности по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  уменьшается в  $(1+P^2)/2$  раз, выражение для дисперсии (1.38) примет вид:

$$D(I_{scat})_{partpol} = \frac{1+P^2}{2} \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (1.40).$$

Важный вывод, который сразу следует из (1.38) или учитывающего частичную деполаризацию (1.40), заключается в том, что дисперсия

интенсивности по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , зависит от степени когерентности источника излучения. Этот вывод является интуитивно понятным, его аналогией в применении к интерферометру Майкельсона или Маха – Цендера является изменение видности интерференционной картины при использовании источников с разной степенью когерентности. Из (1.38) следует, что при использовании источника с малой длиной когерентности дисперсия стремится к нулю. Напротив, при использовании источника с большой длиной когерентности дисперсия достигает максимума, равного квадрату среднего значения (1.26), для полностью поляризованного рассеянного излучения, и уменьшается в  $(1+P^2)/2$  раз для частично поляризованного рассеянного излучения. Статистические закономерности интенсивности рассеянного излучения для идеализированного случая бесконечно узкой спектральной линии – случай монохроматического излучения источника, будут рассмотрены в следующем пункте.

Вычислим выражение для дисперсии (1.38), для этого рассмотрим интеграл см. приложение 2:

$$J = \int_0^T \int_0^T \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{\text{ког}}}\right) d\tau_1 d\tau_2 = \tau_{\text{coh}} \left( \frac{\tau_{\text{coh}}}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{\text{coh}}}\right) - \frac{\tau_{\text{coh}}}{2} + T \right) \quad (1.41).$$

Выражение для дисперсии полностью поляризованного рассеянного излучения по ансамблю  $\{\rho\}$ , таким образом, принимает вид:

$$D(I_{\text{scat}}) = I_s^2 \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \left( \frac{\tau_{\text{coh}}^2}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{\text{coh}}}\right) - \frac{\tau_{\text{coh}}^2}{2} + T\tau_{\text{coh}} \right) \quad (1.42),$$

с учетом деполяризации рассеянного излучения, оно равно:

$$D(I_{\text{scat}})_{\text{partpol}} = \frac{1+P^2}{2} D(I_{\text{scat}}) \quad (1.43).$$

Для интерференции излучения, рассеянного оптической средой, можно ввести определение аналогичное видности интерференционной картины классических интерферометров. Примем в качестве контраста интерферограммы ВИРИ отношение среднеквадратичного отклонения интенсивности к его

среднему значению по ансамблю  $\{\rho\}$  [32]:

$$C = \frac{\sqrt{D(I_{scat})}}{I_{scat}^{mean}} = \frac{1}{T} \left( \frac{\tau_{coh}^2}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}^2}{2} + T\tau_{coh} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\tau_{coh}}{T} \left( \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) + \frac{T}{\tau_{coh}} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.44).$$

График зависимости контраста от отношения максимальной задержки излучения в ВИРИ к времени когерентности  $T/\tau_{coh}$  показан на рисунке 1.3.

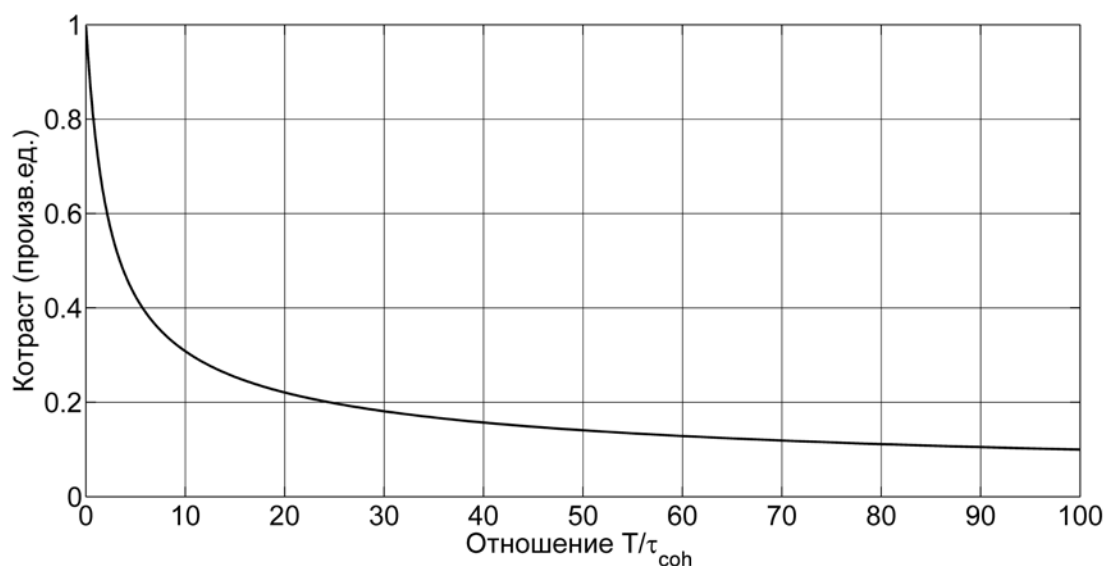


Рисунок 1.3 – Зависимость контраста интерферограммы ВИРИ от отношения максимальной задержки излучения ко времени когерентности  $T/\tau_{coh}$ . Видно монотонное уменьшение контраста с уменьшением времени когерентности.

При уменьшении времени когерентности, контраст уменьшается, при этом:

$$\lim_{\tau_{coh} \rightarrow 0} (C) = \frac{1}{\sqrt{T/\tau_{coh}}} = 0 \quad (1.45),$$

при увеличении времени когерентности контраст стремится к 1:

$$\lim_{\tau_{coh} \rightarrow \infty} (C) = \frac{1}{T} \left( \frac{\tau_{coh}^2}{2} \left( 1 - \frac{2T}{\tau_{coh}} + \frac{2T^2}{\tau_{coh}^2} + \dots \right) - \frac{\tau_{coh}^2}{2} + T\tau_{coh} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (1.46).$$

При учете частичной деполяризации рассеянного излучения, контраст уменьшается в  $\sqrt{(1+P^2)}/2$  раз:

$$C_{partpol} = \frac{\sqrt{D(I_{scat})_{partpol}}}{I_{scat}^{mean}} = \sqrt{\frac{1+P^2}{2}} \frac{\sqrt{D(I_{scat})}}{I_{scat}^{mean}} \quad (1.47).$$

## 1.5. Плотность распределения интенсивности монохроматического обратно – рассеянного излучения

Как указывалось ранее, при переходе от одной реализации распределения комплексных коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  к другой, интенсивность излучения, рассеянного участком, изменяется случайным образом. Данное случайное изменение интенсивности может быть, однако, охарактеризовано некоторой плотностью распределения, среднее значение этого распределения, как было показано, не зависит от степени когерентности источника излучения и определяется (1.26), как для полностью поляризованного, так и для частично поляризованного рассеянного излучения. Прежде чем перейти к рассмотрению статистики интенсивности рассеянного квазимонохроматического излучения, которым можно считать излучение полупроводникового лазера, остановимся на статистике интенсивности рассеянного монохроматического излучения. Данный случай является идеализированным, однако, его рассмотрение позволит выявить основные закономерности процесса рассеяния, кроме того, данный случай может служить хорошим приближением при использовании лазерного источника с высокой степенью когерентности.

### 1.5.1. Случай полностью поляризованного обратно – рассеянного излучения

Возвращаясь к записи поля излучения, рассеянного средой, в виде векторной суммы комплексных амплитуд полей рассеянного излучения (1.20), перепишем ее в более простом виде, с учетом малого затухания в среде ( $\alpha \approx 0$ ), монохроматичности поля ( $\varphi_s(t) = \text{const}$ ) и его стационарности ( $I_s = \text{const}$ ), а также полной поляризованности. Имеем в результате:

$$A_{scat} = \sum_{n=1}^N A_s^0 \cdot \exp(-2ikz_n) \cdot \rho(z_n) \quad (1.48),$$

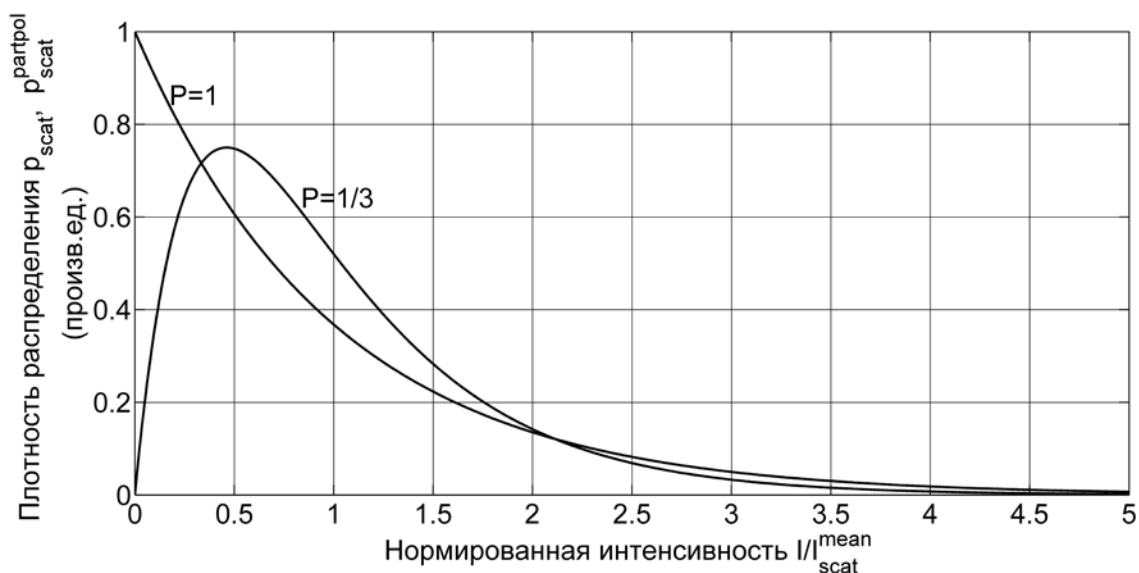
где  $A_s^0 = \sqrt{I_s}$  – амплитуда монохроматического поляризованного излучения источника. Таким образом, из (1.48) видно, что результирующая комплексная амплитуда представляет собой сумму большого количества комплексных амплитуд полей излучений, рассеянных отдельными центрами рассеяния. Комплексная амплитуда коэффициента рассеяния  $\rho$  является случайной по ансамблю  $\{\rho\}$  величиной с равномерно распределенной фазой на интервале:  $(-\pi, \pi)$ , фазовая добавка  $\exp(-2ikz_n)$  не изменяет этого распределения, поэтому произведение  $\exp(-2ikz_n) \cdot \rho(z_n)$  также имеет равномерное распределение фазы на указанном интервале. Из (1.48) следует, что результирующая комплексная амплитуда также является круговой комплексной гауссовской случайной величиной, как и  $\rho$ .

*Важным обстоятельством, которым мы воспользовались при записи (1.48), является то, что для каждой конкретной реализации распределения  $\{\rho\}$  комплексные амплитуды полей излучений, рассеянных всеми центрами, являются полностью коррелированными по времени, так как согласно (1.16) корреляционная функция равна 1 при  $\tau_{coh} \rightarrow \infty$ . При интерференции любых двух излучений, рассеянных центрами, видность интерференционной картины будет равна 1, а конкретное значение интенсивности, создаваемой всеми рассеянными излучениями, образующими интерференционную картину, будет определяться фазовыми соотношениями между ними, в зависимости от фаз коэффициентов  $\rho$  и задержек  $kz$  [33, 55]. Таким образом, задача о комплексной амплитуде суммарного рассеянного излучения сводится к известной задаче о сумме случайных фазоров с равномерным распределением фаз на интервале:  $(-\pi, \pi)$ , которая подробно рассматривается в теории спеклов [32 – 34]. Конечным результатом является соотношение для плотности распределения интенсивности рассеянного излучения по ансамблю независимых распределений коэффициентов*

рассеяния центров  $\{\rho\}$ , которая регистрируется фотодетектором, и имеет вид:

$$p_{scat}(I) = \frac{1}{I_{scat}^{mean}} \exp\left(-\frac{I}{I_{scat}^{mean}}\right), \quad I \geq 0 \quad (1.49),$$

при этом фаза комплексной амплитуды суммарного поля рассеянного излучения имеет равномерное распределение на интервале:  $(-\pi, \pi)$ . Плотность распределения (1.49) описывает случайное изменение интенсивности при переходе от одной реализации распределения рассеивающих центров  $\{\rho\}$  к другой или при переходе от одного статистически эквивалентного рассеивающего участка к другому. Плотность распределения (1.49) называется экспоненциальной, одним из ее свойств является то, что среднеквадратичное отклонение случайной величины с данной плотностью распределения (квадратный корень из дисперсии этой величины) равно ее среднему значению [32]:  $\sqrt{D(I_{scat})} = I_{scat}^{mean}$ , то есть контраст, определённый как (1.44), равен 1, в соответствии с (1.46). График распределения (1.49) показан на рисунке 1.4, обозначенный степенью поляризации  $P = 1$ .



*Рисунок 1.4 – Нормированная плотность распределения интенсивности полностью поляризованного рассеянного излучения  $P = 1$ . Нормированная плотность распределения интенсивности частично поляризованного рассеянного излучения  $P = 1/3$ .*



### 1.5.2. Случай частично поляризованного обратно – рассеянного излучения

Учтем теперь частичную деполаризацию рассеянного излучения, предполагая, что степень поляризации рассеянного излучения равна  $P$ . Частично поляризованное рассеянное излучение, как было сказано ранее, можно представить в виде суммы двух некоррелированных излучений, поляризованных ортогонально. Для каждой реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  степень поляризации рассеянного излучения, по предположению одинакова, соответственно, интенсивности каждой из поляризационных компонент равны:

$$\left(I_{scat}^{\rho}\right)_{pol1} = I_{scat}^{\rho} (1+P)/2, \left(I_{scat}^{\rho}\right)_{pol2} = I_{scat}^{\rho} (1-P)/2 \quad (1.50).$$

Для средних по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивностей, соответственно, имеем:

$$\left(I_{scat}^{mean}\right)_{pol1} = I_{scat}^{mean} (1+P)/2, \left(I_{scat}^{mean}\right)_{pol2} = I_{scat}^{mean} (1-P)/2 \quad (1.51).$$

Так как поля рассеянных излучений, для каждой поляризационной компоненты представляют собой сумму гауссовских случайных величин (1.48), каждая из них сама является гауссовской случайной величиной, поэтому из некоррелированности ортогональных поляризационных компонент рассеянного излучения следует их статистическая независимость [33].

Выражение для плотности распределения интенсивности каждой из поляризационных компонент определяется также выражением (1.49), средние значения, для двух распределений определяются (1.51). В силу статистической независимости двух ортогональных компонент поляризации рассеянного излучения, выражение для плотности распределения суммарной интенсивности равно *свертке* выражений для плотностей распределений каждой из поляризационных компонент. Эта задача аналогична задаче о плотности распределения интенсивности частично поляризованного теплового излучения, также рассмотренной в [33]. Плотность распределения интенсивности частично поляризованного рассеянного излучения, определяемая сверткой двух выражений вида (1.49) со средними по ансамблю значениями интенсивностей (1.51), равна в

итоге:

$$P_{scat}(I)_{partpol} = \frac{1}{PI_{scat}^{mean}} \left[ \exp\left(-\frac{I}{(I_{scat}^{mean})_{pol2}}\right) - \exp\left(-\frac{I}{(I_{scat}^{mean})_{pol1}}\right) \right], \quad I \geq 0 \quad (1.52).$$

Несложно показать, что дисперсия для распределения (1.52) равна:

$$D(I_{scat})_{partpol} = \frac{1+P^2}{2} (I_{scat}^{mean})^2 \quad (1.53),$$

То есть дисперсия уменьшилась в  $(1+P^2)/2$  раз по сравнению с полностью поляризованным излучением, что согласуется с (1.43), найденным ранее. Контраст для данного случая уменьшается в  $\sqrt{(1+P^2)}/2$ . График плотности распределения (1.52) для случая  $P=1/3$  изображен на рисунке 1.4.

При освещении участка волокна излучением высокой степени когерентности, плотность распределения интенсивности рассеянного излучения по ансамблю независимых рассеивающих участков будет иметь вид (1.52), если оптическое волокно обладает высоким значением случайного двулучепреломления, а также короткой характерной длиной связи поляризационных мод, то степень поляризации рассеянного излучения будет стремиться к  $P=1/3$  [56 – 58]. При этом состояние поляризации рассеянного излучения совпадает с состоянием поляризации излучения источника, заводимого в рассеивающую среду. С помощью унитарного преобразования частично поляризованное рассеянное излучение может быть представлено, как суперпозиция ортогональных поляризационных компонент, в общем виде эллиптически поляризованных [33].

Если рассеянное волокном частично поляризованное излучение наблюдается через линейный поляризатор, с некоторой произвольной ориентацией его оси, то каждая из двух ортогональных поляризационных компонент будет иметь некоторую проекцию своего поля на направление оси поляризатора. Две проекции ортогонально поляризованных компонент после прохождения поляризатора будут иметь одинаковые состояния поляризации,

поэтому они смогут интерферировать, так как временная корреляция полей в этих двух проекциях зависит только от свойств источника и разницы оптических путей между ними. Компонента излучения, с ортогональным к оси линейного поляризатора состоянием поляризации после поляризатора будет отсутствовать. *Поэтому, при использовании линейного поляризатора, расположенного между выходом рассеивающего участка и фотоприемником, плотность распределения интенсивности частично поляризованного рассеянного излучения с высокой степенью когерентности, будет иметь вид (1.49).*

### **1.6. Плотность распределения интенсивности квазимонохроматического обратно – рассеянного излучения**

Рассмотрим теперь более общий случай – рассеяние квазимонохроматического излучения, каким можно считать излучение полупроводникового лазера. *В данном случае поля излучений, рассеянных всеми центрами рассеивающей среды, с некоторой реализацией распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , уже нельзя считать полностью коррелированными друг с другом, так как согласно (1.16) корреляционная функция при конечном времени когерентности всегда меньше 1.* Таким образом, видность интерференционной картины, создаваемой любыми двумя рассеянными лучами, будет меньше 1. Статистическая плотность распределения вероятностей значения интенсивности по ансамблю  $\{\rho\}$  уже не будет иметь экспоненциальный вид (1.49). В результате уменьшения когерентности изменяется и дисперсия распределения интенсивности по ансамблю  $\{\rho\}$  – при уменьшения времени когерентности она монотонно уменьшается в соответствии с (1.42), стремясь в пределе  $\tau_{coh} \rightarrow 0$  к нулю. Контраст интерферограммы также стремится к нулю (1.45).

Для нахождения плотности распределения интенсивности рассеянного квазимонохроматического излучения по ансамблю  $\{\rho\}$  [A1–A4] воспользуемся

формализмом, предложенным в [32 – 34], для вычисления статистики интенсивности спекл – картины, интегрированной по некоторой площади. Ранее данный метод использовался для нахождения статистической плотности распределения интенсивности спекл – картины, наблюдаемой через апертурную щель [62], а также для определения статистической плотности распределения интенсивности рассеянного излучения, имеющего много независимых спектральных компонент [63], кроме того, необходимость в использовании этого формализма возникает при расчёте статистики фотоотсчетов [64]. *Основная идея метода заключается в применении разложения Карунена – Лоэва случайной комплексной амплитуды поля источника по системе ортогональных функций* [33, 65, 66, A1].

### 1.6.1. Случай полностью поляризованного обратно – рассеянного излучения

Рассмотрим в начале случай, когда состояние поляризации излучения не изменяется при прохождении рассеивающей среды волокна. Для каждой фиксированной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  комплексную амплитуду суммарного поля излучения, рассеянного средой, можно записать в виде (1.21). С учетом малого затухания и предположения о неизменности поляризации, выражение для результирующей комплексной амплитуды рассеянного излучения, для конкретной реализации  $\{\rho\}$ , примет вид:

$$A_{scat}^{\rho}(t) = \int_0^L A_s(t - 2z/v_{gr}) \cdot \exp(-2ikz) \cdot \rho(z) dz \quad (1.54).$$

В выражении (1.54) поля:  $A_s(t)$  являются квазимонохроматическими. Разложение Карунена – Лоэва позволяет представить задачу суммирования частично коррелированных комплексных амплитуд квазимонохроматических полей рассеянных излучений (1.54), через задачу суммирования некоррелированных комплексных амплитуд, с помощью которых может быть представлено результирующее суммарное квазимонохроматическое поле рассеянного излучения [A1–A4]. Сделаем в выражении (1.54) замену переменных,

заменив координатное представление временным:

$$\tau = 2z/v_{gr}, \quad T = 2L/v_{gr} \quad (1.55),$$

помня при этом, что новые переменные являются другим представлением пространственной координаты. Тогда:

$$A_{scat}^{\rho}(t) = \frac{v_{gr}}{2} \int_0^T A_s(t-\tau) \cdot \exp(-ik\tau v_{gr}) \cdot \rho(\tau v_{gr}/2) d\tau \quad (1.56),$$

заметим, что в силу стационарности в широком смысле процесса флуктуации поля источника выражение:

$$A_{scat}^{\rho}(t)|_{t=0} = \frac{v_{gr}}{2} \int_0^T A_s(\tau) \cdot \exp(-ik\tau v_{gr}) \cdot \rho(\tau v_{gr}/2) d\tau \quad (1.57),$$

при фиксированной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , дает такое же значение интенсивности рассеянного излучения, что и (1.56), см. (1.23), в (1.57), без ограничения общности, за начало отсчета времени принято  $t=0$ . Из последнего выражения видно, что максимальная временная задержка суммируемых комплексных амплитуд равна  $T$ .

Пусть набор функций  $\{\theta_1(\tau), \theta_2(\tau) \dots \theta_n(\tau) \dots\}$  полон и ортонормирован на интервале:  $(0, T)$ :

$$\int_0^T \theta_n^*(\tau) \cdot \theta_m(\tau) d\tau = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (1.58),$$

независимая переменная  $\tau$  указывает на то, что ортонормированные функции являются функциями от пространственной координаты, в силу (1.55). Рассмотрим поле источника, которое занимает пространственный интервал:  $z \in (0, 2L)$ , то есть генерируемое на временном интервале:  $\tau \in (0, T)$ . На этом интервале комплексная амплитуда поля источника является случайной величиной, то есть для каждой точки из интервала:  $\tau \in (0, T)$ ,  $A_s(\tau)$  – имеет случайное значение, которое изменяется для каждой новой реализации, при этом значение интенсивности рассеянного излучения остается неизменным (1.23), можно сказать, что поле имеет случайное распределение вдоль пространственной

координаты . Однако, случайные поля  $A_s(\tau_1)$  и  $A_s(\tau_2)$  в разных точках интервала:  $(0, T)$ , то есть в разных точках, расположенных в пространстве, являются частично коррелированными, а функция автокорреляции поля зависит только от разности времен  $\tau = \tau_1 - \tau_2$ , то есть от разности пространственных координат в силу (1.16) .

*Разложим выборочную функцию случайного процесса временных (пространственных) флуктуаций комплексной амплитуды поля источника  $A_s(\tau)$  на интервале:  $\tau \in (0, T)$  в ряд по системе детерминированных функций (1.58).* Это разложение можно всегда произвести для процесса с непрерывной корреляционной функцией [65]. Запишем для этого интервала:

$$A_s(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \theta_n(\tau) \quad \tau \in (0, T) \quad (1.59),$$

где  $b_n$  – случайные во времени величины, имеющие новые случайные (возможно совпадающие ) значения, для каждой новой выборочной функции процесса  $A_s(\tau)$  , а  $\theta_n(\tau)$  – детерминированные функции времени  $\tau$  или эквивалентной пространственной координаты  $z = \tau v_{gr}/2$  . Так как выборочные функции процесса  $A_s(\tau)$  меняются непрерывно во времени, соответственно, и коэффициенты разложения  $b_n$  – меняются непрерывно во времени, функции  $\theta_n(\tau)$  , при этом зависят только от пространственной координаты и во времени не изменяются. Для каждой новой выборочной функции  $A_s(\tau)$  случайные во времени коэффициенты разложения  $b_n$  определяются как скалярные произведения реализации случайного поля  $A_s(\tau)$  и соответствующей функции из выбранного набора:

$$b_n = \int_0^T A_s(\tau) \cdot \theta_n^*(\tau) d\tau \quad (1.60).$$

Таким образом, выборочная функция случайного процесса флуктуации комплексной амплитуды поля источника излучения  $A_s(\tau)$ , которая занимает пространственный объем с длиной  $2L$  и непрерывно изменяется во времени,

представлена в виде бесконечной суммы, в которой функции разложения – детерминированные на интервале:  $\tau \in (0, T)$ , а коэффициенты разложения – случайны во времени, при переходе от одной выборочной функции к другой. Далее из всех возможных разложений (1.59) выберем такое, для которого коэффициенты разложения будут некоррелированными по времени, то есть для которых усреднение по времени даст:

$$E_T \langle b_n \cdot b_m^* \rangle = \begin{cases} \lambda_m & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (1.61),$$

получим условие, при котором это может выполняться. Используя (1.60) запишем:

$$E_T \langle b_n \cdot b_m^* \rangle = \int_0^T \int_0^T E_T \langle A_s(\tau_1) \cdot A_s^*(\tau_2) \rangle \cdot \theta_n^*(\tau_1) \cdot \theta_m(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (1.62),$$

Перегруппируем выражение:

$$E_T \langle b_n \cdot b_m^* \rangle = \int_0^T \left[ \int_0^T E_T \langle A_s(\tau_1) \cdot A_s^*(\tau_2) \rangle \cdot \theta_m(\tau_2) d\tau_2 \right] \cdot \theta_n^*(\tau_1) d\tau_1 \quad (1.63),$$

для того, чтобы (1.61) могло выполняться для любых  $m$  и  $n$  необходимо и достаточно [66], чтобы интеграл в квадратных скобках был равен  $\lambda_m \theta_m(\tau_1)$  :

$$\int_0^T E_T \langle A_s(\tau_1) \cdot A_s^*(\tau_2) \rangle \cdot \theta_m(\tau_2) d\tau_2 = \lambda_m \theta_m(\tau_1) \quad (1.64).$$

Таким образом, требуемый набор функций  $\theta_m(\tau)$  должен быть совокупностью собственных функций интегрального однородного уравнения Фредгольма (1.64), а коэффициенты  $\lambda_m$  должны быть собственными значениями этого уравнения. Ядром интегрального уравнения является автокорреляционная функция комплексной амплитуды случайного поля источника излучения. Ядро интегрального уравнения Фредгольма (1.64) является положительно определенным, в силу того, что оно является автокорреляционной функцией комплексной амплитуды поля источника, поэтому все его собственные значения являются действительными положительными числами [66].

Мы представили, таким образом, комплексную амплитуду

квазимонохроматического поля источника излучения  $A_s(\tau)$  на интервале  $\tau \in (0, T)$ , в каждый момент времени, в виде бесконечной суммы, ортогональных функций, со случайными во времени и не коррелированными между собой коэффициентами суммирования (1.61). В дискретном случае, данное ортогональное разложение эквивалентно диагонализации эрмитовой матрицы когерентности суммы частично коррелированных полей [32 – 34]. Отметим, что интегральная интенсивность, то есть *средняя энергия процесса*  $A_s(\tau)$  на интервале  $\tau \in (0, T)$  равна сумме энергий процесса в каждой точке этого интервала то есть равна [66] :

$$E_T \left\langle \int_0^T A_s(\tau) A_s^*(\tau) d\tau \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_T \langle b_n b_m^* \rangle \cdot \int_0^T \theta_n(\tau) \theta_m^*(\tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} E_T \langle |b_n|^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = I_s T \quad (1.65),$$

где для получения последнего равенства, мы воспользовались (1.4). Запишем теперь результирующее поле излучения, рассеянного участком, для конкретной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  (1.57) с учетом разложения (1.59) в виде:

$$A_{scat}^{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \frac{v_{gr}}{2} \int_0^T \theta_n(\tau) \cdot \exp(-ik\tau v_{gr}) \cdot \rho(\tau v_{gr}/2) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{scat}^{\rho})_n \quad (1.66),$$

где

$$(A_{scat}^{\rho})_n = b_n \frac{v_{gr}}{2} \int_0^T \theta_n(\tau) \cdot \exp(-ik\tau v_{gr}) \cdot \rho(\tau v_{gr}/2) d\tau \quad (1.67),$$

случайная во времени комплексная компонента разложения поля рассеянного излучения  $A_{scat}^{\rho}$ . Компоненты разложения  $(A_{scat}^{\rho})_n$  – случайны во времени, в силу случайности  $b_n$ , и являются некоррелированными по времени с другими компонентами в силу (1.61). Результирующая мгновенная интенсивность рассеянного излучения равна, соответственно:



$$\begin{aligned}
(I_{scat}^\rho(t))_{inst} &= (A_{scat}^\rho)^* (A_{scat}^\rho) = \\
&= \frac{v_{gr}^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_n^* b_m \cdot \int_0^T \int_0^T \theta_n^*(\tau_1) \theta_m(\tau_2) \exp(ik\tau_1 v_{gr}) \exp(-ik\tau_2 v_{gr}) \rho^*(\tau_1 v_{gr}/2) \rho(\tau_2 v_{gr}/2) d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Среднее по времени значение мгновенной интенсивности равно:

$$\begin{aligned}
I_{scat}^\rho &= E_T \left\langle (I_{scat}^\rho(t))_{inst} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_T \left\langle (A_{scat}^\rho)_n^* (A_{scat}^\rho)_n \right\rangle = \\
&= \frac{v_{gr}^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_0^T \int_0^T \theta_n^*(\tau_1) \theta_n(\tau_2) \exp(ik\tau_1 v_{gr}) \exp(-ik\tau_2 v_{gr}) \rho^*(\tau_1 v_{gr}/2) \rho(\tau_2 v_{gr}/2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (I_{scat}^\rho)_n
\end{aligned} \tag{1.69}$$

где

$$(I_{scat}^\rho)_n = \frac{v_{gr}^2}{4} \lambda_n \int_0^T \int_0^T \theta_n^*(\tau_1) \theta_n(\tau_2) \exp(ik\tau_1 v_{gr}) \exp(-ik\tau_2 v_{gr}) \rho^*(\tau_1 v_{gr}/2) \rho(\tau_2 v_{gr}/2) d\tau_1 d\tau_2 \tag{1.70}$$

так как только коэффициенты  $b_n$  по предположению зависят от времени и являются случайными, некоррелированными величинами. Из (1.69) и (1.70) интенсивность рассеянного излучения, средняя по ансамблю  $\{\rho\}$  в силу (1.2) и (1.58), может быть записана в виде :

$$I_{scat}^{mean} = E_\rho \left\langle I_{scat}^\rho \right\rangle = E_\rho \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} (I_{scat}^\rho)_n \right\rangle = \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 I_s T \tag{1.71}$$

где учтено (1.65), и что:

$$E_\rho \left\langle \rho^*(\tau_n v_{gr}/2) \cdot \rho(\tau_m v_{gr}/2) \right\rangle = \rho_0 \cdot \delta\left(\frac{v_{gr}}{2}(\tau_n - \tau_m)\right) = \rho_0 \frac{2}{v_{gr}} \cdot \delta(\tau_n - \tau_m) \tag{1.72}$$

Выражение (1.71) эквивалентно (1.26), то есть средняя по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивность рассеянного излучения не зависит от степени когерентности излучения источника, что соответствует ранее полученным выводам. Сравнивая (1.71) и (1.65) видно, что среднее по ансамблю  $\{\rho\}$  значение интенсивности

рассеянного излучения равно произведению средней энергии процесса флуктуаций комплексной амплитуды поля источника  $I_s T$  и члена, определяющего влияние рассеивающей среды:  $v_{gr} \rho_0 / 2$ .

Из (1.66) видно, что комплексная амплитуда поля  $A_{scat}^\rho$  рассеянного излучения теперь представлена суммой *некоррелированных по времени* комплексных компонент разложения:  $(A_{scat}^\rho)_n$ , то есть иными словами эти компоненты *не интерферируют друг с другом и можно говорить, что они складываются «по интенсивности»*. Каждая компонента разложения  $(A_{scat}^\rho)_n$  в произвольный фиксированный момент времени, при изменении статистической реализации  $\{\rho\}$ , является круговой комплексной гауссовской случайной величиной, так как является суммой таких величин  $\rho$ , в силу (1.67).

При изменении статистической реализации  $\{\rho\}$  интенсивность компоненты разложения  $(A_{scat}^\rho)_n$  (1.70)  $(I_{scat}^\rho)_n$ , таким образом, подчиняется экспоненциальному распределению, указанному в предыдущем пункте. Основным параметром этого распределения является среднее по ансамблю  $\{\rho\}$  значение интенсивности этой компоненты разложения, согласно (1.70), (1.71), оно равно:

$$(I_{scat}^{mean})_n = E_\rho \langle (I_{scat}^\rho)_n \rangle = \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 \lambda_n = a_n \quad (1.73),$$

где для среднего значения введено обозначение  $a_n$ .

Таким образом, разложив поле источника на некоррелированные по времени компоненты  $b_n \cdot \theta_n(\tau)$ , мы пришли к эквивалентной записи результирующего поля рассеянного излучения (1.66) и его интенсивности (1.69), через сумму компонент разложения и их интенсивностей, некоррелированных по времени (1.67) и (1.70). Интенсивность каждой из компонент разложения  $(I_{scat}^\rho)_n$  подчиняется обратному экспоненциальному распределению, в силу того, что сама компонента разложения (1.67) является гауссовской случайной величиной.

Среднее значение этого распределения по ансамблю  $\{\rho\}$  равно (1.73). Плотность распределения интенсивности каждой из некоррелированных компонент разложения (1.70) по ансамблю  $\{\rho\}$  равна:

$$p_{scat}^n(I) = \frac{1}{a_n} \exp\left(-\frac{I}{a_n}\right) = \frac{1}{(I_{scat}^{mean})_n} \exp\left(-\frac{I}{(I_{scat}^{mean})_n}\right), \quad I \geq 0 \quad (1.74).$$

В силу того, что компоненты разложения  $(A_{scat}^\rho)_n$  являются круговыми комплексными гауссовскими случайными величинами по ансамблю  $\{\rho\}$ , некоррелированными между собой – они статистически независимы [33], поэтому плотность распределения интенсивности суммы статистически независимых компонент разложения  $I_{scat}^\rho = \sum_{n=0}^{\infty} (I_{scat}^\rho)_n$  равна свертке всех плотностей распределения интенсивностей  $(I_{scat}^\rho)_n$  вида (1.74):

$$p_{scat}(I) = p_{scat}^1(I) * p_{scat}^2(I) * \dots * p_{scat}^n(I) \quad (1.75).$$

Стандартным методом расчёта плотности распределения суммы статистически независимых величин  $I_{scat}^\rho$  является метод характеристических функций [33]. Характеристическая функция определяется, как преобразование Фурье от плотности распределения:

$$M_I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega I) p_I(I) dI \quad (1.76).$$

Характеристическая функция суммы статистически независимых величин равна произведению характеристических функций этих величин, то есть:

$$M[I_{scat}](\omega) = \prod_{n=0}^{\infty} M[(I_{scat})_n](\omega) \quad (1.77).$$

Для плотности распределения вида (1.74) характеристическая функция равна:

$$M[(I_{scat})_n](\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(I_{scat}^{mean})_n} \exp\left(-\frac{I}{(I_{scat}^{mean})_n}\right) \exp(i\omega I) dI = \frac{1}{1 - i\omega (I_{scat}^{mean})_n} = \frac{1}{1 - i\omega a_n}$$

(1.78).

Характеристическая функция для распределения, определяемого сверткой (1.75) равна, соответственно:

$$M[I_{scat}](\omega) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - i\omega a_n} \quad (1.79),$$

плотность распределения суммы независимых величин равна обратному преобразованию Фурье от характеристической функции (1.79):

$$p_{scat}(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - i\omega a_n} \exp(-i\omega I) d\omega \quad (1.80).$$

Этот интеграл можно вычислить, пользуясь теорией вычетов [67], см. приложение 3:

$$p_{scat}(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-I/a_n)}{a_n \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{a_m}{a_n}\right)} \quad (1.81),$$

где

$$a_n = \left(I_{scat}^{mean}\right)_n = \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 \lambda_n \quad (1.82)$$

– средние по ансамблю  $\{\rho\}$  значения интенсивностей компонент разложения  $(A_{scat}^{\rho})_n$ . Уравнение (1.81) можно переписать в более компактном виде, положив:

$$d_n = \left[ \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{a_m}{a_n}\right) \right]^{-1} \quad (1.83),$$

Тогда:

$$p_{scat}(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a_n} \exp(-I/a_n) \quad (1.84).$$

Плотность распределения (1.84) представляет собой сумму спадающих экспоненциальных функций, с показателями  $a_n$ . Таким образом, для того, чтобы найти плотность распределения интенсивности рассеянного излучения по ансамблю  $\{\rho\}$ , в случае освещения рассеивающей среды источником

квазимонохроматического излучения, необходимо найти собственные значения интегрального уравнения (1.64). Стандартный метод решения этого интегрального уравнения заключается в сведении его к дифференциальному путем двойного дифференцирования и исключения интегрального члена [65, 66, 68], см. приложение 4. Запишем его с учётом (1.16):

$$I_s \int_0^T \exp\left(-\frac{|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) \cdot \theta_m(\tau_2) d\tau_2 = \lambda_m \theta_m(\tau_1) \quad (1.85).$$

Собственные значения уравнения (1.85) быстро стремятся к нулю, при этом их сумма равна *среднему значению энергии случайного процесса*  $A_s(\tau)$  на заданном интервале  $\tau \in (0, T)$ , (1.65). Для практических применений вычисления плотности распределения (1.84) можно использовать только первые из них, в зависимости от требуемой точности. Среднее значение этого распределения определяется из (1.84):

$$I_{mean}^{scat} = E_\rho \langle I \rangle = \int_0^\infty p_{scat} \cdot IdI = \sum_{n=0}^\infty d_n a_n = \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 \sum_{n=0}^\infty d_n \lambda_n = \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 \sum_{n=0}^\infty \lambda_n = \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 T I_s \quad (1.86).$$

Основным параметром интегрального уравнения (1.85) является отношение максимальной задержки  $T$  и времени когерентности  $\tau_{coh}$ . На рисунке 1.5. показана плотность распределения (1.84) при изменении отношения  $T/\tau_{coh}$ . С увеличением отношения  $T/\tau_{coh}$ , при увеличении максимальной задержки  $T$  или при уменьшении времени когерентности  $\tau_{coh}$ , плотность распределения переходит от близкой к экспоненциальной, для излучения с высокой степенью когерентности, к близкой к гауссовской, для излучения с низкой степенью когерентности.

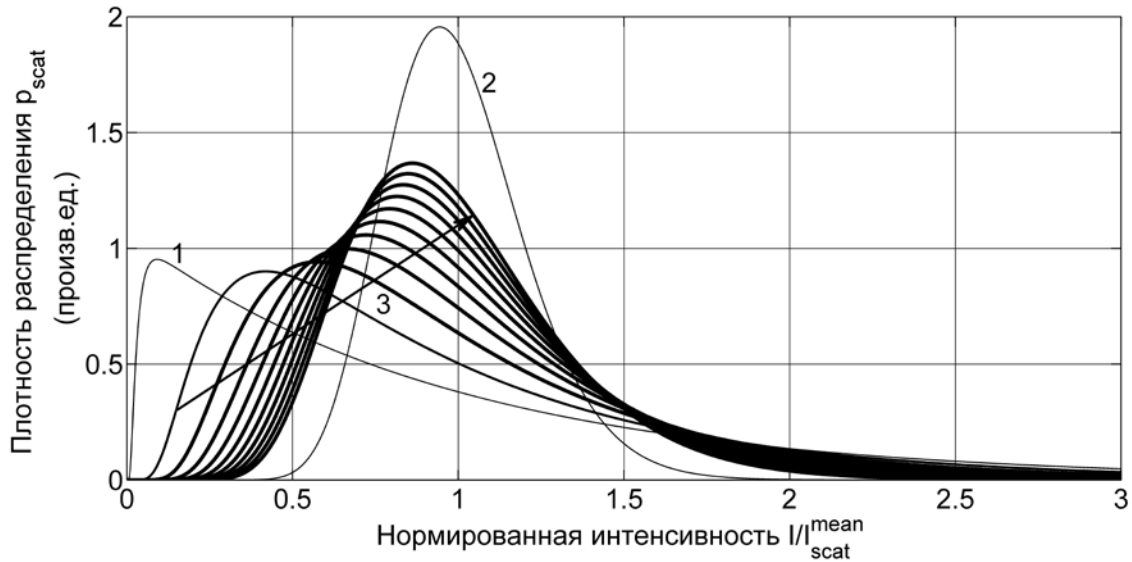


Рисунок 1.5 – Нормированная плотность распределения интенсивности рассеянного полностью поляризованного квазимонохроматического излучения, в зависимости от соотношения  $T/\tau_{coh}$ . 1 – плотность распределения для излучения с высокой степенью когерентности  $T/\tau_{coh}=0.1$ . 2 – плотность распределения для излучения с низкой степенью когерентности  $T/\tau_{coh}=30$ . 3 – изменение плотности распределения при увеличении отношения  $T/\tau_{coh}$  от 1 до 10.

Как видно из рисунка 1.5. дисперсия распределения при увеличении  $T/\tau_{coh}$  уменьшается. Дисперсию распределения можно вычислить из выражения для плотности распределения (1.84) :

$$D(I_{scat}) = E_{\rho} \langle I^2 \rangle - (E_{\rho} \langle I \rangle)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot d_n \cdot a_n^2 - \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot a_n \right)^2 \quad (1.87),$$

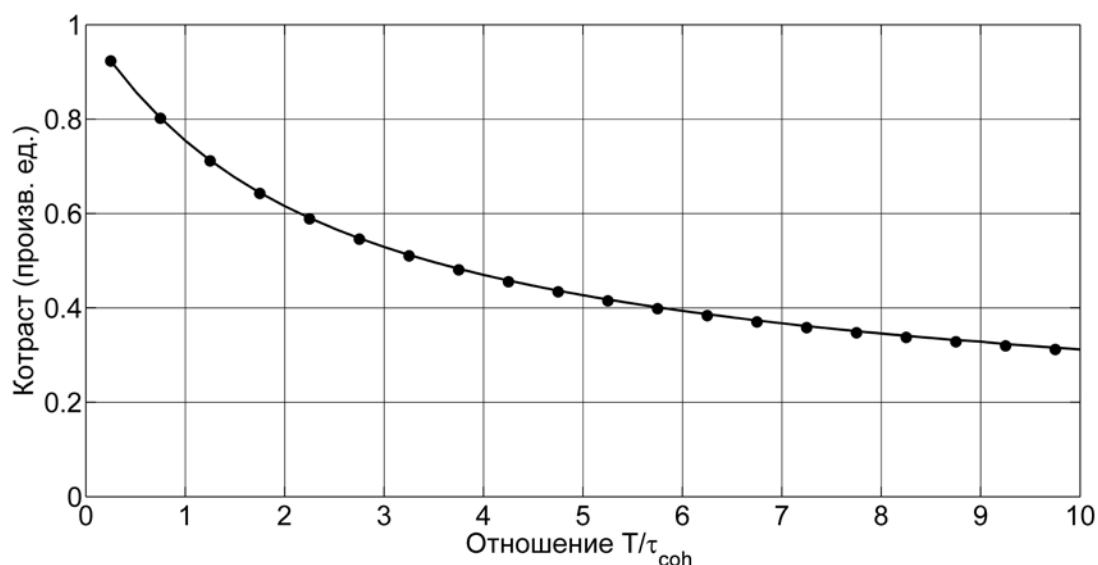
с другой стороны, дисперсия по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивности рассчитана нами ранее из других соображений и равна (1.42) . Соответственно, контраст интерферограммы равен :

$$C = \frac{\sqrt{D(I_{scat})}}{I_{scat}^{mean}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot d_n \cdot a_n^2 - \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot a_n \right)^2}}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot a_n} \quad (1.88),$$

он также найден нами ранее: (1.44).

На рисунке 1.6. представлено сравнение контрастов интерферограмм,

рассчитанных по формулам (1.44) и (1.88).



*Рисунок 1.6 – Теоретическая зависимость контраста интерферограммы рассеянного квазимонохроматического полностью поляризованного излучения от отношения  $T/\tau_{coh}$ . Сплошная линия – расчёт с использованием собственных значений, круги – значение рассчитанные по формуле (1.44).*

Контраст интерферограммы является определением аналогичным видности интерференционной картины и, как будет ясно в дальнейшем, контраст можно связать с чувствительностью ВИРИ к внешним фазовым воздействиям. Из рисунка 1.6. видно, что контраст, рассчитанный исходя из решения интегрального уравнения, полностью совпадает с контрастом, рассчитанным нами ранее. Поэтому два различных метода расчёта первого и второго статистических моментов для интенсивности рассеянного излучения: среднего по ансамблю значения и дисперсии, дают эквивалентные результаты.

Как видно из рисунка 1.3. и рисунка 1.6. контраст интерферограммы увеличивается при использовании лазера с высокой степенью когерентности или при использовании короткого рассеивающего участка.

### **1.6.2. Случай частично поляризованного обратно – рассеянного излучения**

Учтем теперь частичную деполаризацию квазимонохроматического рассеянного излучения, предполагая, что степень поляризации рассеянного

излучения равна  $P$ . Частично поляризованное рассеянное излучения, как было сказано ранее, можно представить в виде суммы двух некоррелированных излучений, поляризованных ортогонально, со средними по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивностями (1.51):

$$\left(I_{scat}^{mean}\right)_{pol1} = I_{scat}^{mean} (1+P)/2 \text{ и } \left(I_{scat}^{mean}\right)_{pol2} = I_{scat}^{mean} (1-P)/2 \quad (1.89).$$

Используя разложение Карунена – Лоэва поля излучения источника (1.59), запишем результирующие поля излучений, для двух ортогональных поляризаций излучения, рассеянного средой волокна, для конкретной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  в виде:

$$\begin{aligned} \left(A_{scat}^{\rho}(t)\right)_{pol1} &= \sqrt{\frac{1+P}{2}} A_{scat}^{\rho} = \sqrt{\frac{1+P}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{scat}^{\rho}\right)_n, \\ \left(A_{scat}^{\rho}(t)\right)_{pol2} &= \sqrt{\frac{1-P}{2}} A_{scat}^{\rho} = \sqrt{\frac{1-P}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{scat}^{\rho}\right)_n \end{aligned} \quad (1.90),$$

где  $A_{scat}^{\rho}$  – определяется суммой (1.66), компоненты разложения  $\left(A_{scat}^{\rho}\right)_n$  – определяются (1.67). В силу ортогональности двух составляющих поляризации рассеянного излучения, поля :  $\left(A_{scat}^{\rho}(t)\right)_{pol1}$  и  $\left(A_{scat}^{\rho}(t)\right)_{pol2}$  – являются некоррелированными друг с другом. Запишем разложения поляризационных компонент рассеянного излучения (1.90) в виде:

$$\begin{aligned} \left(A_{scat}^{\rho}(t)\right)_{pol1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(A_{scat}^{\rho}\right)_n\right)_{pol1}, \\ \left(A_{scat}^{\rho}(t)\right)_{pol2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(A_{scat}^{\rho}\right)_n\right)_{pol2} \end{aligned} \quad (1.91),$$

где :

$$\begin{aligned} \left(\left(A_{scat}^{\rho}\right)_n\right)_{pol1} &= \sqrt{\frac{1+P}{2}} \left(A_{scat}^{\rho}\right)_n, \\ \left(\left(A_{scat}^{\rho}\right)_n\right)_{pol2} &= \sqrt{\frac{1-P}{2}} \left(A_{scat}^{\rho}\right)_n \end{aligned} \quad (1.92),$$

случайные во времени комплексные компоненты разложения полей рассеянных



излучений, принадлежащие ортогональным поляризационным составляющим. Для интенсивностей ортогональных поляризационных составляющих из (1.90), в силу отсутствия временной корреляции между компонентами разложения  $(A_{scat}^\rho)_n$ , подобно (1.69), имеем:

$$\begin{aligned} (I_{scat}^\rho)_{pol1} &= \frac{1+P}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (I_{scat}^\rho)_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( (I_{scat}^\rho)_n \right)_{pol1}, \\ (I_{scat}^\rho)_{pol2} &= \frac{1-P}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (I_{scat}^\rho)_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( (I_{scat}^\rho)_n \right)_{pol2} \end{aligned} \quad (1.93),$$

где компоненты разложения интенсивностей для двух поляризационных составляющих равны:

$$\begin{aligned} \left( (I_{scat}^\rho)_n \right)_{pol1} &= \frac{1+P}{2} (I_{scat}^\rho)_n, \\ \left( (I_{scat}^\rho)_n \right)_{pol2} &= \frac{1-P}{2} (I_{scat}^\rho)_n \end{aligned} \quad (1.94),$$

где  $(I_{scat}^\rho)_n$  определяются (1.70). Каждая из этих некоррелированных компонент разложения имеет, соответственно, среднюю по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивность, определяемую из (1.94) и (1.73) как :

$$\begin{aligned} \left( (I_{scat}^{mean})_n \right)_{pol1} &= \frac{1+P}{2} E_\rho \left\langle (I_{scat}^\rho)_n \right\rangle = \frac{1+P}{2} \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 \lambda_n = \frac{1+P}{2} a_n = a1_n \\ \left( (I_{scat}^{mean})_n \right)_{pol2} &= \frac{1-P}{2} E_\rho \left\langle (I_{scat}^\rho)_n \right\rangle = \frac{1-P}{2} \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 \lambda_n = \frac{1-P}{2} a_n = a2_n \end{aligned} \quad (1.95),$$

где для каждого среднего значения введены обозначения:  $a1_n$ ,  $a2_n$ .

Таким образом, для каждой из двух поляризационных составляющих рассеянного волокном квазимонохроматического излучения, существует представление в виде суперпозиции некоррелированных по времени компонент разложения:  $\left( (A_{scat}^\rho)_n \right)_{pol1}$  и  $\left( (A_{scat}^\rho)_n \right)_{pol2}$ , аналогичных (1.67), каждая из которых является круговой комплексной гауссовской случайной величиной по ансамблю  $\{\rho\}$ . Случайные значения интенсивностей этих компонент разложения

$\left(\left(I_{scat}^{\rho}\right)_n\right)_{pol1}$ ,  $\left(\left(I_{scat}^{\rho}\right)_n\right)_{pol2}$ , принадлежащие различным поляризационным составляющим рассеянного излучения, имеют экспоненциальные плотности распределения по ансамблю  $\{\rho\}$  вида (1.74) со средними значениями, определяемыми (1.95). Комплексные амплитуды разложений:  $\left(\left(A_{scat}^{\rho}\right)_n\right)_{pol1}$  и  $\left(\left(A_{scat}^{\rho}\right)_m\right)_{pol1}$  при  $m \neq n$ , для одной поляризационной составляющей рассеянного излучения, являются некоррелированными между собой, в силу требования разложения Карунена – Лоэва, кроме того, комплексные амплитуды разложений, относящиеся к разным поляризационным составляющим рассеянного излучения:  $\left(\left(A_{scat}^{\rho}\right)_n\right)_{pol1}$  и  $\left(\left(A_{scat}^{\rho}\right)_m\right)_{pol2}$  также некоррелированные, при любых  $m$  и  $n$ , в силу ортогональности их поляризаций. Так как все комплексные компоненты разложения (1.92) имеют гауссовское распределение по ансамблю  $\{\rho\}$ , они статистически независимы по ансамблю статистических распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ . Таким образом, результирующая случайная интенсивность квазимонохроматического рассеянного частично поляризованного излучения равна сумме статистически независимых интенсивностей компонент разложения рассеянных излучений, принадлежащих двум ортогональным состояниям поляризации.

В силу указанной статистической независимости компонент разложения, результирующая плотность распределения по ансамблю  $\{\rho\}$  значения интенсивности частично поляризованного квазимонохроматического рассеянного излучения, определяется сверткой плотностей распределений всех некоррелированных слагаемых результирующей случайной интенсивности:

$$\begin{aligned}
 p_{scat}(I)_{partpol} = & \left(p_{scat}^1(I)\right)_{pol1} * \left(p_{scat}^2(I)\right)_{pol1} * \dots * \left(p_{scat}^n(I)\right)_{pol1} * \\
 & * \left(p_{scat}^1(I)\right)_{pol2} * \left(p_{scat}^2(I)\right)_{pol2} * \dots * \left(p_{scat}^n(I)\right)_{pol2}
 \end{aligned} \quad (1.96).$$

Каждая плотность распределения, входящая в итоговое выражение для плотности распределения полной интенсивности (1.96), имеет вид спадающего

экспоненциального распределения вида (1.74), со средним значением интенсивности, определяемым (1.95).

Можно также сказать, что результирующая случайная величина: интенсивность частично поляризованного квазимонохроматического рассеянного излучения, равна сумме случайных интенсивностей двух статистически независимых поляризационных составляющих. Поэтому результирующая плотность распределения интенсивности частично поляризованного квазимонохроматического рассеянного излучения определяется *сверткой* двух плотностей распределения вида (1.84), справедливых отдельно, для каждой из поляризационных составляющих рассеянного излучения, среднее значение каждого из распределений определяется (1.89).

Вычислим плотность распределения значения случайной интенсивности частично поляризованного квазимонохроматического рассеянного излучения. Характеристическая функция свертки плотностей распределений статистически независимых случайных величин (1.96) равна, соответственно, произведению характеристических функций каждого из распределений:

$$M \left[ (I_{scat})_{partpol} \right] (\omega) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 - i\omega a_{1_n}} \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1 - i\omega a_{2_m}} \quad (1.97).$$

Будем для упрощения считать, что средние по ансамблю интенсивности компонент разложения для каждой из поляризационных составляющих рассеянного излучения (1.95) имеют различные значения, то есть:  $a_{1_n} \neq a_{1_m} \neq a_{2_p} \neq a_{2_q}$  для всех  $m$ ,  $n$ ,  $p$  и  $q$ . Результирующая плотность распределения определяется преобразованием Фурье функции (1.97), соответствующий интеграл, рассмотрен в *приложении 5*.

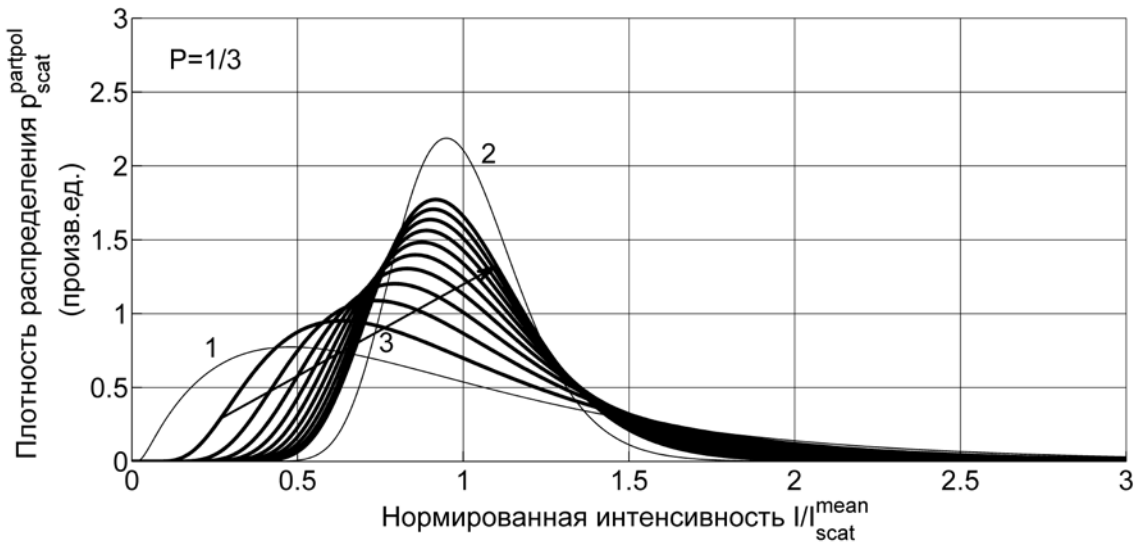
$$p_{scat} (I)_{partpol} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a_n} \left( \frac{2d_{1_n}}{(1+P)} \exp\left(-\frac{I}{a_{1_n}}\right) + \frac{2d_{2_n}}{(1-P)} \exp\left(-\frac{I}{a_{2_n}}\right) \right) \quad (1.98),$$

где,

$$d_n = \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq n}}^{\infty} \left( 1 - \frac{a_q}{a_n} \right)^{-1}, \quad d_{1_n} = \prod_{q=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{a_{2_q}}{a_{1_n}} \right)^{-1}, \quad d_{2_n} = \prod_{p=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{a_{1_p}}{a_{2_n}} \right)^{-1} \quad (1.99).$$

Если учесть возможность совпадения средних по ансамблю значений интенсивностей для компонент разложения двух состояний поляризации (1.95), выражение для плотности распределения приобретает более громоздкий вид, качественный вид зависимости при этом не изменяется, что подтверждается непосредственным вычислением сверток (1.96).

Подобно (1.84), плотность распределения (1.98) представляет собой сумму спадающих экспонент, с показателями  $a_{1n}$  и  $a_{2n}$  (1.95). На рисунке 1.7. показана плотность распределения (1.98) при изменении отношении  $T/\tau_{coh}$  для рассеянного излучения со степенью поляризации  $P = 1/3$ .



*Рисунок 1.7 – Нормированная плотность распределения интенсивности рассеянного квазимонохроматического излучения при учете частичной деполяризации со степенью поляризации  $P=1/3$ , в зависимости от соотношения  $T/\tau_{coh}$ . 1 – плотность распределения для излучения с высокой степенью когерентности.  $T/\tau_{coh}=0.1$ . 2 – плотность распределения для излучения с низкой степенью когерентности  $T/\tau_{coh}=20$ . 3 – изменение плотности распределения при увеличении отношения  $T/\tau_{coh}$  от 1 до 10.*

При сравнении рисунка 1.7. и рисунка 1.5. видно, что учет случайного изменения состояния поляризации излучения, при распространении его по рассеивающей среде волокна, приводящей к частичной деполяризации рассеянного излучения, приводит к тому, что плотность распределения интенсивности быстрее стремится к гауссовской, при увеличении отношения

$T/\tau_{coh}$  .

Дисперсию распределения можно вычислить из выражения для плотности распределения (1.98) :

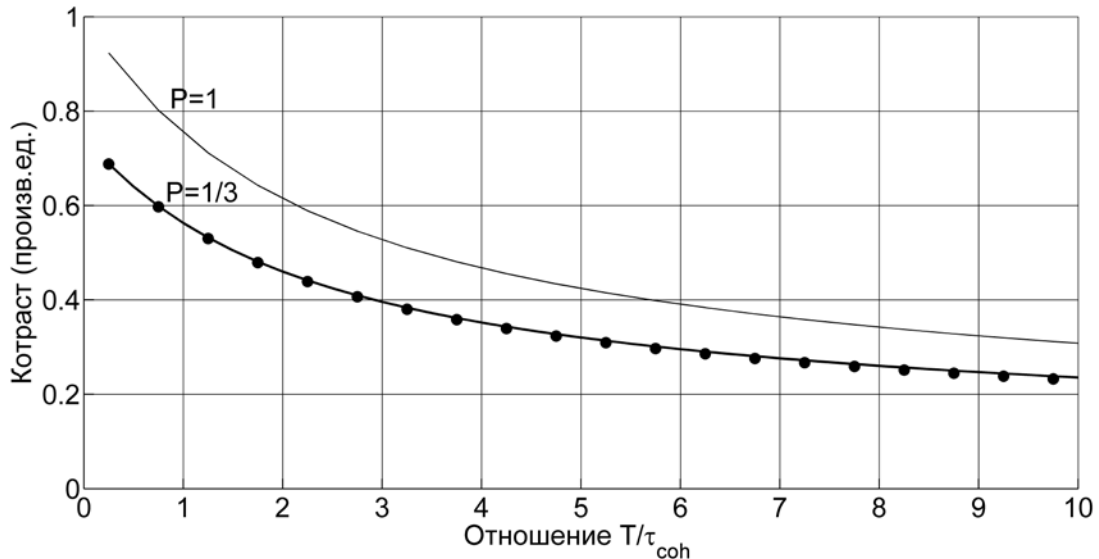
$$D(I_{scat})_{pol} = E_{\rho} \langle I^2 \rangle - (E_{\rho} \langle I \rangle)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a_n} \left( \frac{4d1_n}{(1+P)} (a1_n)^3 + \frac{4d2_n}{(1-P)} (a2_n)^3 \right) - \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot a_n \right)^2 \quad (1.100),$$

так как среднее по ансамблю значение распределения суммарной интенсивности рассеянного излучения, по – прежнему определяется (1.86) . С другой стороны, дисперсия по ансамблю  $\{\rho\}$  распределения интенсивности рассеянного излучения, при учете частичной деполяризации, получена нами ранее (1.43). Контраст интерферограммы, соответственно, может быть записан в виде:

$$C_{partpol} = \frac{\sqrt{D(I_{scat})_{partpol}}}{I_{scat}^{mean}} = \frac{\sqrt{\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a_n} \left( \frac{4d1_n}{(1+P)} (a1_n)^3 + \frac{4d2_n}{(1-P)} (a2_n)^3 \right) - \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot a_n \right)^2 \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot a_n} \quad (1.101) .$$

На рисунке 1.8. представлено сравнение контрастов интерферограмм, рассчитанных по формулам (1.44) и (1.101), с учетом частичной деполяризации излучения. Из рисунка 1.8. видно, что контраст, рассчитанный исходя из решения интегрального уравнения, полностью совпадает с контрастом, рассчитанным нами ранее.

В соответствии с полученными результатами, контраст при учете деполяризации рассеянного квазимонохроматического излучения меньше контраста для полностью поляризованного излучения в  $\sqrt{(1+P^2)}/2$  раз.



*Рисунок 1.8 – Зависимость контраста интерферограммы рассеянного квазимонохроматического излучения от отношения  $T/\tau_{coh}$  при учете частичной деполаризации. Сплошная жирная линия – расчёт с использованием собственных значений, круги – значение рассчитанные по формуле (1.47). Тонкая линия – контраст для полностью поляризованного излучения (1.44).*

### **1.7. Математическое моделирование процесса обратного – рассеяния квазимонохроматического излучения**

Для подтверждения теоретических выводов было произведено математическое моделирование процесса рассеяния [A1–A4] в вычислительной системе MatLab. В основу математической модели положены те же предположения, на основании которых было произведено теоретическое рассмотрение:

- 1) Центры рассеяния распределены равномерно по объему рассеивающего участка длиной  $L$ .
- 2) Амплитуды и фазы комплексных коэффициентов рассеяния центров статистически независимы друг от друга.
- 3) Фазы комплексных коэффициентов рассеяния центров распределены равномерно на интервале  $(-\pi, \pi)$ .
- 4) Действительная и мнимая части каждого комплексного коэффициента

рассеяния имеют одинаковое гауссовское распределение по ансамблю, с равными дисперсиями и нулевыми средними значениями.  $E_{\rho} \langle \rho(z_n) \rho(z_m) \rangle = 0$ .

5) Комплексные коэффициенты рассеяния центров являются некоррелированным по ансамблю  $E_{\rho} \langle \rho^*(z_n) \cdot \rho(z_m) \rangle = \rho_0 \cdot \delta(z_n - z_m)$ .

6) При фиксированном распределении коэффициентов рассеяния центров, временная корреляционная функция полей рассеянных излучений, для любых двух центров, зависит от отношения расстояния между этими центрами и длины когерентности :

$$E_T \langle A_s(z_1) \cdot A_s^*(z_2) \rangle = I_s \cdot \exp\left(-\frac{|z_1 - z_2|}{l_{coh}}\right).$$

7) Степень поляризации рассеянного излучения задается параметром  $0 < P < 1$ . Частичная поляризованность излучения моделируется наличием двух статистически независимых компонент излучений с интенсивностями  $(1 + P)/2$  и  $(1 - P)/2$ .

Результаты моделирования – зависимости случайных интенсивностей рассеянного излучения от номера статистически независимой реализации распределения  $\{\rho\}$ , для излучения с высокой степенью когерентности  $T/\tau_{coh} = 0.01$ , при степенях поляризации:  $P = 1$ ,  $P = 1/3$  представлены на рисунке 1.9. На рисунке 1.10, представлены гистограммы соответствующих распределений и теоретические плотности распределений.

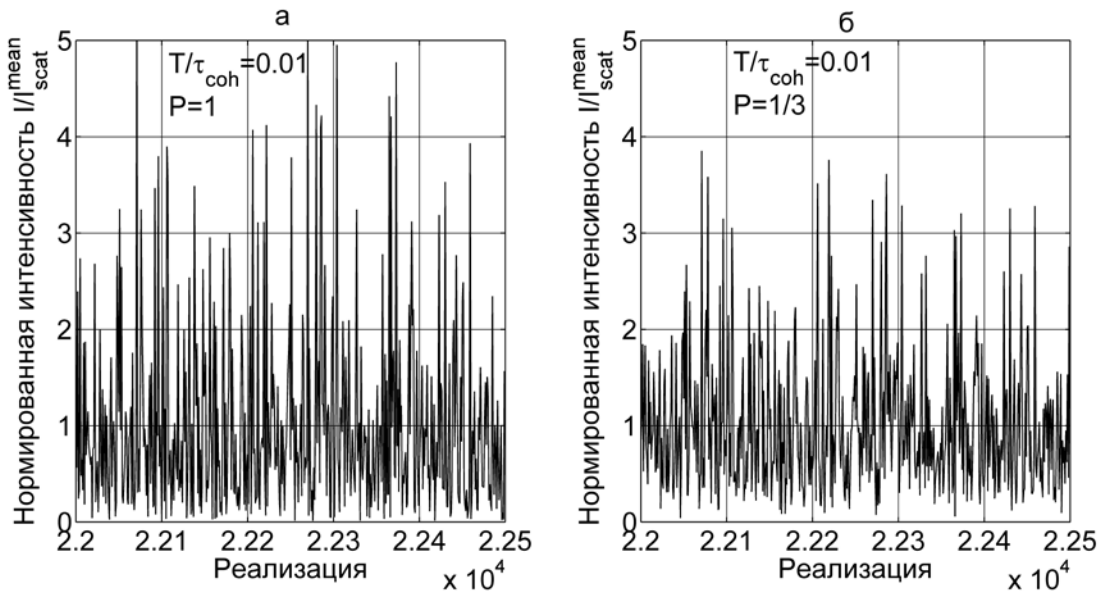


Рисунок 1.9 – Результаты моделирования процесса рассеяния для лазера с высокой степенью когерентности  $T/\tau_{coh} = 0.01$  и различными степенями поляризации рассеянного излучения: (а) степень поляризации  $P = 1$ , (б) степень поляризации  $P = 1/3$ .

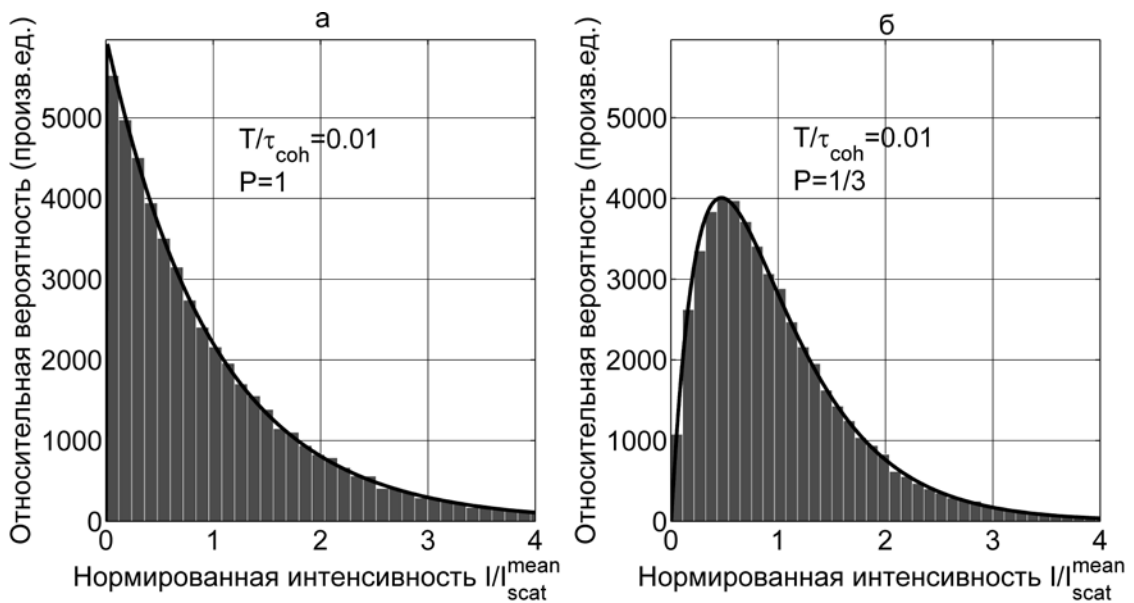


Рисунок 1.10 – Гистограммы и теоретические плотности распределений (сплошные линии) для случайных значений интенсивностей рассеянных излучений, соответствующих рисунку 1.9., для лазера с высокой степенью когерентности  $T/\tau_{coh} = 0.01$  и различными степенями поляризации рассеянного излучения: (а) степень поляризации  $P = 1$ , (б) степень поляризации  $P = 1/3$ .

На рисунке 1.11. представлены зависимости случайных интенсивностей рассеянного излучения от номера статистически независимой реализации  $\{\rho\}$ ,



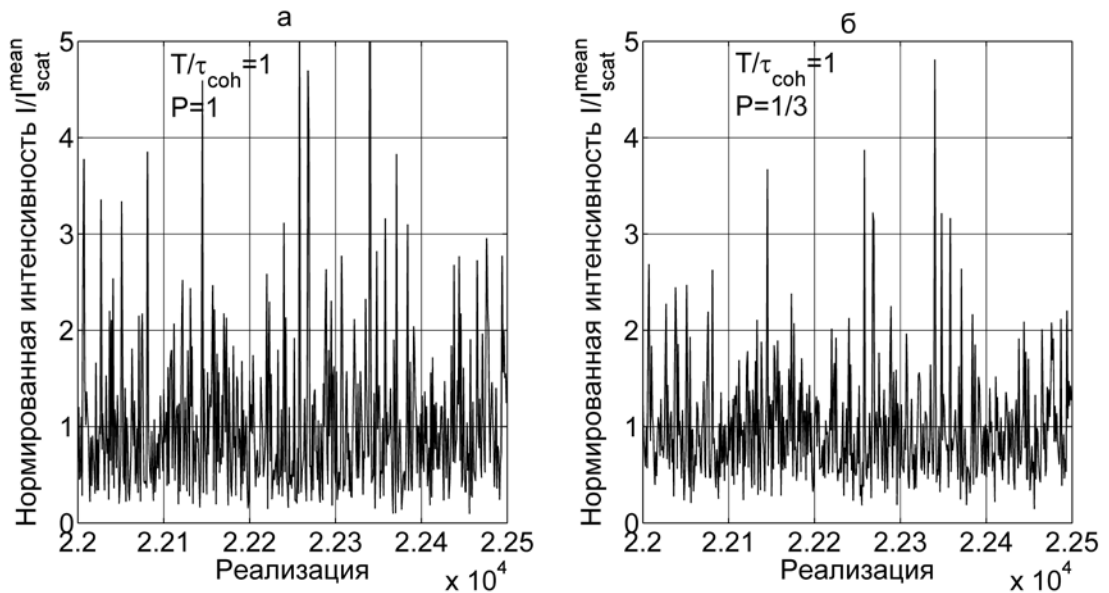


Рисунок 1.11 – Результаты моделирования процесса рассеяния для лазера с невысокой степенью когерентности  $T/\tau_{coh} = 1$  и различными степенями поляризации рассеянного излучения: (а) степень поляризации  $P = 1$ , (б) степень поляризации  $P = 1/3$ .

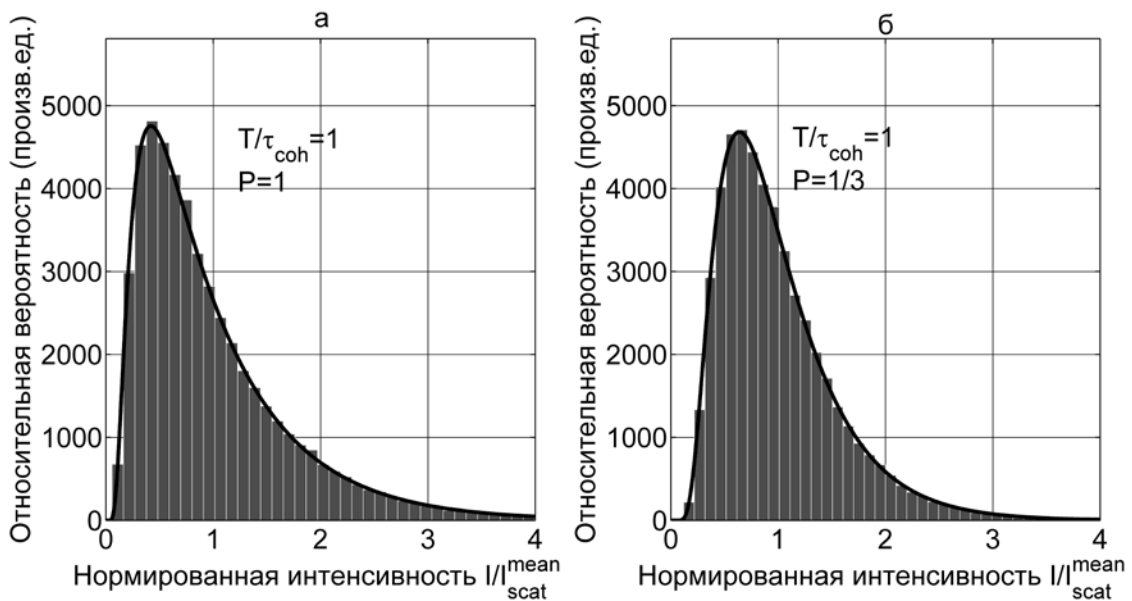


Рисунок 1.12 – Гистограммы и теоретические плотности распределений (сплошные линии) для случайных значений интенсивностей рассеянных излучений, соответствующих рисунку 1.11., для лазера с невысокой степенью когерентности  $T/\tau_{coh} = 1$  и различными степенями поляризации рассеянного излучения: (а) степень поляризации  $P = 1$ , (б) степень поляризации  $P = 1/3$ .

для излучения с невысокой степенью когерентности  $T/\tau_{coh} = 1$ , при степенях поляризации:  $P = 1$ ,  $P = 1/3$ .

Таким образом, результаты математического моделирования процесса рассеяния квазимонохроматического излучения, с различными степенями поляризации рассеянного излучения, соответствуют результатам приведенного теоретического описания.

### 1.8. Экспериментальный метод получения статистически независимых распределений коэффициентов рассеяния

Отдельного внимания заслуживает описание экспериментального метода получения независимых распределений коэффициентов рассеяния, при использовании одного оптического волокна фиксированной длины. В проводимых экспериментах независимые распределения получались путем растяжения, давления или температурного воздействия на оптическое волокно, скрученное в кольца, в нескольких разных точках, силой переменной величины или непрерывным нагреванием или охлаждением, см. рисунок 1.13.

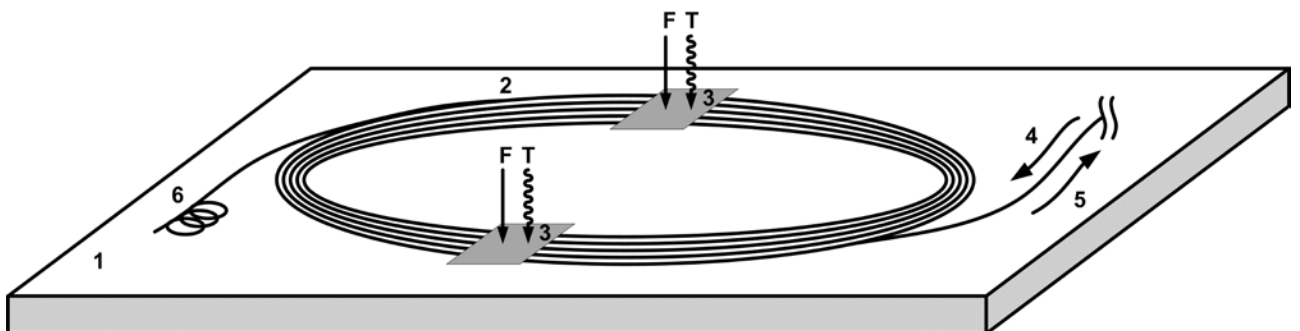


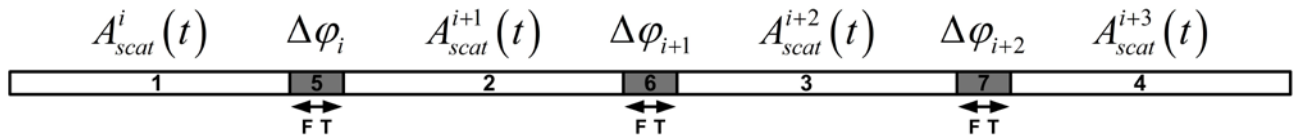
Рисунок 1.13 – Схематическое изображение метода получения статистически независимых распределений комплексных коэффициентов рассеяния, с использованием одного оптического волокна фиксированной длины, путем растяжения, давления на волокно силой переменной величины или температурного воздействия. 1 – оптический стол, 2 – одномодовое оптическое волокно, скрученное в кольца, 3 – воздействие внешней силой растяжения, давления или нагревания (охлаждения) на несколько областей оптического волокна, 4 – излучение, заводимое в оптическое волокно, 5 – излучение, рассеянное оптическим волокном, 6 – область высвечивания оптического излучения.

Рассмотрим участок волокна длиной  $L$  (достаточно короткий, чтобы можно было пренебречь затуханием оптической мощности на нем), разобьём этот

участок на  $M + 1$  неперекрывающихся секций, точками с координатами  $l_i$ , где  $i = 1 \dots M$ ,  $0 < l_i < L$ . Комплексная амплитуда поля излучения, рассеянного каждой из секций, представляет собой сумму комплексных амплитуд полей излучений, рассеянных центрами, расположенными в пределах данной секции, подобно (1.54) :

$$A_{scat}^i(t) = \int_{l_i}^{l_{i+1}} A_s(t - 2z/v_{gr}) \cdot \exp(-2ikz) \cdot \rho(z) dz \quad (1.102),$$

где, для упрощения считаем рассеянное излучение полностью поляризованным, см. рисунок 1.14.



*Рисунок 1.14 – Четыре смежных секции разбиения оптического волокна, разделенные малыми областями, которые подвергаются внешним воздействиям, в результате чего происходят изменения длин оптических путей в этих областях и изменения относительных фазовых задержек между полями, рассеянными смежными секциями. 1,2,3,4 – смежные секции разбиения оптического волокна, 5,6,7 – области периодической внешней модуляции.*

Пусть в малых окрестностях точек разбиения  $l_i$  происходят воздействия внешних случайных сил  $F_i$  (ими могут быть как механические воздействия, так и температурные изменения), которые приводят к пропорциональному изменению оптических путей между секциями разбиения, таким образом, что:  $\Delta\varphi_i \sim F_i$ , где  $\Delta\varphi_i$  – изменение фазы проходящего излучения. Комплексная амплитуда суммарного поля излучения, рассеянного участком  $L$ , представляет собой сумму комплексных амплитуд полей излучений, рассеянных всеми секциями разбиения, причем фазы полей излучений, рассеянных каждой из секций модулированы внешними случайными силами  $F_i$  :

$$\begin{aligned}
A_{scat}^{\rho}(t) &= A_{scat}^1(t) + A_{scat}^2(t)\exp(i\Delta\varphi_1) + A_{scat}^3(t)\exp(i\Delta\varphi_1 + i\Delta\varphi_2) + \dots = \\
&= A_{scat}^1(t) + \sum_{i=2}^{M+1} A_{scat}^i(t)\exp\left(i\sum_{j=1}^{i-1}\Delta\varphi_j\right)
\end{aligned} \tag{1.103}$$

Фазовая модуляция накапливается, и максимальна для секции расположенной на наибольшем удалении от начала рассеивающего участка. Рассмотрим статистическую функцию корреляции полей, рассеянных смежными секциями, по ансамблю всех возможных значений разницы фаз  $\Delta\varphi_i$  при воздействии на область между секциями внешней силы:

$$K_{\varphi} = E_{\varphi} \left\langle \left( A_{scat}^i(t) \right)^* A_{scat}^{i+1}(t) \exp(i\Delta\varphi_i) \right\rangle = \left( A_{scat}^i(t) \right)^* A_{scat}^{i+1}(t) E_{\varphi} \left\langle \exp(i\Delta\varphi_i) \right\rangle \tag{1.104}.$$

Абсолютная величина фазы  $\Delta\varphi_i$  может принимать любое значение, так как она пропорциональна силе внешнего воздействия  $F_i$ , однако в силу того, что фаза стоит под знаком экспоненты, значения фазы, отличающиеся на  $2\pi$ , эквивалентны друг другу. Можно считать, что фаза, таким образом, имеет распределение, свернутое на круге единичного радиуса [69]. Согласно теореме Пуанкаре [69], при достаточно больших фазовых модуляциях внешними силами  $F$ , случайная величина  $\Delta\varphi_i^{circle}$ , полученная из исходной  $\Delta\varphi_i$  ее сворачиванием вокруг круга единичного радиуса, имеет равномерное распределение на интервале  $(0, 2\pi)$ :

$$p(\Delta\varphi_i^{circle}) = \frac{1}{2\pi} \quad \Delta\varphi_i^{circle} \in (0, 2\pi) \quad \text{при больших } \Delta\varphi_i \tag{1.105}.$$

Поэтому, при воздействии внешней силой большой величины на область между секциями разбиения, поля излучений, рассеянные этими секциями становятся статистически некоррелированными:

$$K_{\varphi} = E_{\varphi} \left\langle \left( A_{scat}^i(t) \right)^* A_{scat}^{i+1}(t) \exp(i\Delta\varphi_i) \right\rangle = 0 \tag{1.106}$$

То же самое справедливо для любых не смежных секций, в предположении больших значений сил воздействия на все области, расположенные между ними. Можно считать, что прилагая большие воздействия на интервалы между секциями разбиения, мы получили ансамбли из  $M + 1$  статистически некоррелированных

рассеянных излучений. Статистическая некоррелированность полей излучений, рассеянных различными секциями, эквивалентна некоррелированности по ансамблю коэффициентов рассеяния различных центров (1.2), с той разницей, что в случае секций разбиения речь идет о конечном количестве  $M + 1$  некоррелированных рассеивающих областей, а в случае центров рассеяния об очень большом (в пределе бесконечном) количестве центров рассеяния.

Таким образом, можно считать, что вместо большого количества центров рассеяния мы перешли к некоторому количеству  $M + 1$  секций волокна, которые при воздействии сил большой величины на участки между ними, рассеивают излучения, чьи комплексные амплитуды являются *статистически некоррелированными и имеют равномерное относительное распределение фаз на интервале  $(0, 2\pi)$* . Кроме того, можно считать, что суммарная фаза поля излучения, рассеянного какой – либо секцией, и действительная амплитуда поля излучения, рассеянного этой же секцией являются также некоррелированными.

Рассмотрим теперь требуемую величину силы воздействия на оптическое волокно, чтобы можно было считать, что разность фаз между секциями имеет равномерное распределение. Сделаем физическое предположение о том, что сила воздействия на область между секциями имеет гауссовское распределение по величине, что приводит к тому, что *не свернутая фаза  $\Delta\varphi_i$*  также имеет гауссовское распределение. Данное допущение оправдано в случае механического воздействия на промежутки между секциями разбиения, а также в случае периодического нагрева и охлаждения этих промежутков. С достаточной точностью можно считать [69], что если среднеквадратичное отклонение случайной величины  $\Delta\varphi_i$   $\sigma(\Delta\varphi_i) \geq \pi$ , то свернутое нормальное распределение величины  $\Delta\varphi_i^{circle}$  является равномерным на интервале  $(0, 2\pi)$ , см. рисунок 1.15.

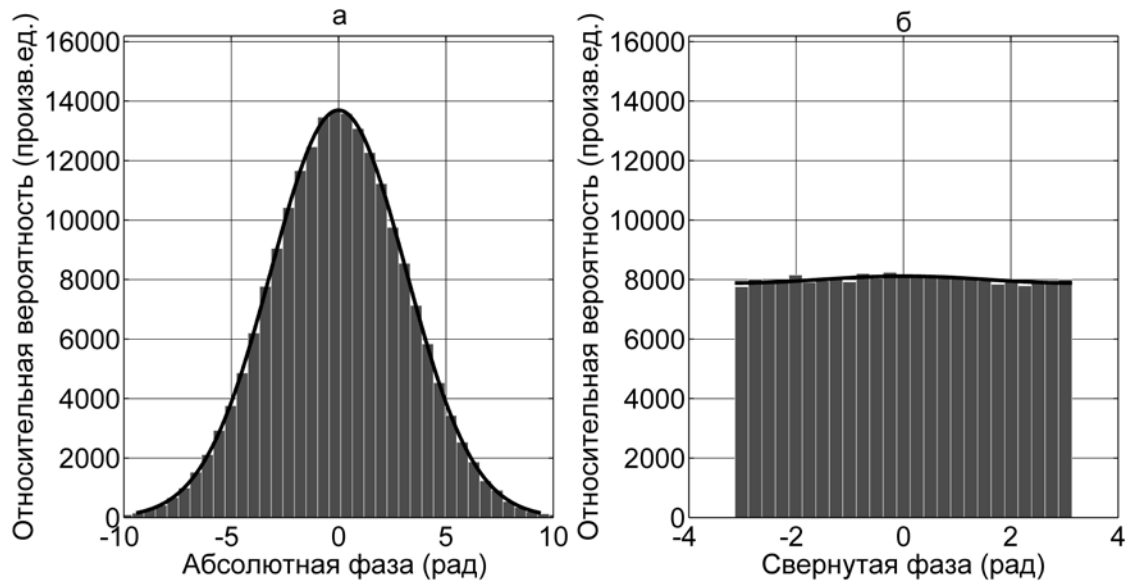


Рисунок 1.15 – Преобразование гауссовского распределения фазы со среднеквадратичным отклонением  $\pi$  в свернутое распределение, которое является равномерным. (а) исходное гауссовское распределение со среднеквадратичным отклонением  $\pi$ , (б) свернутое распределение – близкое к равномерному.

При растяжении оптического волокна, при давлении на него и при воздействии на него температуры происходит его деформация, которая приводит к изменению длины волокна, изменению его диаметра и изменению показателя преломления.

Возникающая упругая деформация приводит к тому, что фаза оптического поля, распространяющегося по волокну, изменяется. Изменение фазы  $\Delta\varphi$  под действием внешнего растяжения  $\varepsilon$  описывается формулой [70]:

$$\frac{\Delta\varphi}{\varepsilon L} = k - \frac{1}{2}kn^2((1-\mu)p_{12} - \mu p_{11}) \quad (1.107),$$

где  $L$  – длина растягиваемого участка,  $\varepsilon = \Delta L/L$  – относительное растяжение,  $k = 2\pi n/\lambda$  – постоянная распространения излучения в волокне,  $n$  – эффективный показатель преломления среды волокна,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $p_{12}, p_{11}$  – компоненты фотоупругого тензора. Подставляя параметры, для кварцевого волновода:  $n = 1.5$ ,  $\lambda = 1555E - 9nm$ ,  $\mu = 0.17$ ,  $p_{12} = 0.27$ ,  $p_{11} = 0.121$  получаем, что растяжение, приводящее к фазовому сдвигу  $\pi$ , равно  $\varepsilon = 7E - 6m$ .

Соответствующая сила растяжения равна:  $F = \frac{ES\Delta L}{L}$ , где  $E$  – модуль Юнга,

$E = 72E9 \frac{H}{м^2}$  для кварца,  $S$  – площадь поперечного сечения волокна, при длине

области растяжения  $L = 1 см$ , соответственно, сила равна  $F = 0.06H$ .

Изменение фазы  $\Delta\varphi$  под воздействием внешнего давления описывается формулой [71, 72]:

$$\frac{\Delta\varphi}{PL} = -\frac{k(1-2\mu)}{E} + \frac{kn^2}{2E}(1-2\mu)(2p_{12} + p_{11}) \quad (1.108),$$

где  $P$  – внешнее давление на оптическое волокно,  $L$  – длина области, на которую оказывается давление. Подставляя те же параметры для кварцевого волновода, получаем оценку, что для того, чтобы изменить фазу проходящего через волокно оптического поля на  $\pi$  рад необходимо приложить к волокну вертикальное усилие равное  $F = 30H$ . Таким образом, растяжение волокна, гораздо эффективнее изменяет фазу поля, проходящего через деформируемый участок, чем давление.

Наиболее эффективным и простым способом изменения фазы является нагрев оптического волокна. Изменение фазы распространяющегося по волокну поля при изменении температуры некоторого волоконного участка определяется выражением [71]:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta TL} = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{n}{L} \frac{dL}{dT} + \frac{dn}{dT} \right) \quad (1.109),$$

где  $\Delta T$  – изменение температуры участка волокна,  $L$  – область волокна, на которую оказывается температурное воздействие. Подставляя табличные значения для кварца:

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dT} = 5.5E-7 \frac{1}{^{\circ}C}, \quad \frac{dn}{dT} = 1.23E-5 \frac{1}{^{\circ}C},$$

получаем, что для изменения фазы распространяющегося излучения на  $\pi$  рад необходимо изменить температуру области волокна длиной  $l = 1$  см на 6 градусов. Данное условие легко реализуется на практике, в используемой экспериментальной установке происходило нагревание волокна с помощью

лампы накаливания, расстояние между лампой и волокном могло меняться, нагревая или охлаждая соответствующий участок волокна. В работе, для изменения фазы поля применялись все три метода.

Наконец, рассмотрим вопрос о том, сколько должно быть независимых секций разбиения волокна, чтобы результирующие статистические закономерности рассеивающего участка были эквивалентны участку с очень большим (в пределе бесконечным) количеством независимых секций, то есть участку, в котором каждая независимая секция может быть сопоставлена центру рассеяния. Иными словами, при каком числе независимых секций разбиения может быть применена Центральная Предельная Теорема, и суммарное поле рассеянного излучения становится круговой комплексной гауссовской случайной величиной по ансамблю всех возможных значений разницы фаз  $\Delta\varphi_i$ .

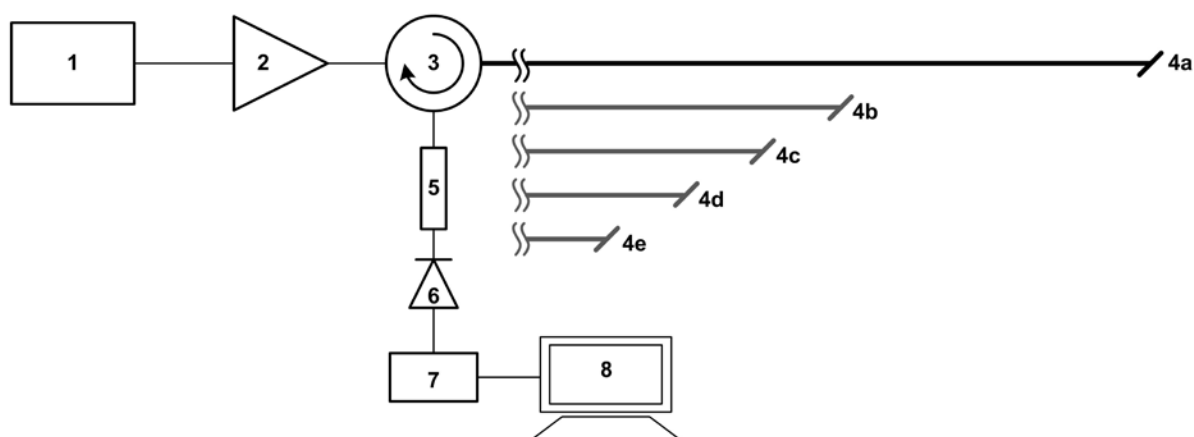
Рассматриваемый волоконный участок, который подвергается разбиению, по условию, может освещаться, как монохроматическим, так и квазимонохроматическим излучением. Квазимонохроматическое поле источника излучения, как было показано ранее, с помощью разложения Карунена – Лоэва, может быть представлено суммой некоррелированных компонент, каждая из которых ведет себя, как монохроматическое поле. Вопрос о количестве секций разбиения, таким образом, сводится к тому, сколько должно быть независимых рассеивающих секций, при освещении которых монохроматическим излучением, рассеянное излучение имело бы гауссовское распределение комплексной амплитуды или *спадающее экспоненциальное распределение интенсивности по ансамблю всех возможных значений фазовых задержек  $\Delta\varphi_i$* . В работе [73] показано, что сумма случайных фазоров, которые имеют равные амплитуды и фазы, распределенные равномерно на интервале  $(0, 2\pi)$ , имеет гауссовское распределение при числе таких фазоров большем, чем  $N = 10$ . В случае если амплитуды фазоров распределены равномерно на некотором интервале [74], а фазы распределены равномерно на интервале  $(0, 2\pi)$ , достаточное количество фазоров, сумма которых дает величину распределенную нормально равно  $N = 8$ .



Для случая, исследуемого в работе, когда суммируемые фазоры, соответствующие секциям разбиения, имеют, гауссовские распределения действительных и мнимых частей комплексных амплитуд или релейское распределение действительных амплитуд и равномерное распределение фаз на интервале  $(0, 2\pi)$ , математическое моделирование показывает, что необходимое число таких фазоров равно  $N = 12$ . Поэтому при числе секций разбиения больше, чем 12, и при достаточной силе растяжения, давления или температурного воздействия на области между секциями, такой, что изменение фазы поля, проходящего через каждую область воздействия, больше чем  $\pi$ , статистическое распределение интенсивности рассеянного монохроматического излучения по ансамблю всех возможных значений фазовых задержек в областях между секциями является спадающим экспоненциальным (1.49) в силу действия Центральной Предельной Теоремы. В работе число секций разбиения волокна, скрученного в кольцо, было больше 20. Поэтому статистическое распределение интенсивности рассеянного излучения по ансамблю всех возможных значений фазовых задержек  $\Delta\varphi_i$  между секциями разбиения, можно считать хорошим приближением статистического распределения интенсивности по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ .

### **1.9. Экспериментальное исследование статистических распределений интенсивности обратно – рассеянного излучения**

Экспериментальное исследование статистических закономерностей значения интенсивности рассеянного излучения было проведено с использованием ВИРИ с одним рассеивающим участком, то есть одноканального ВИРИ. Схема экспериментальной установки приведена на рисунке 1.16.



*Рисунок 1.16 – Схема экспериментальной установки одноканального ВИРИ для исследования статистических закономерностей рассеянного излучения. 1 – полупроводниковый лазер с распределенной обратной связью, 2 – эрбиевый волоконный усилитель, 3 – оптический циркулятор, 4(a – e) – отрезки оптического волокна SMF – 28, длиной, соответственно, 80 м, 40 м, 30 м, 20 м, 10 м. 5 – оптический поляризатор, с возможностью его исключения из схемы, 6 – фотоприемник, 7 – аналогово – цифровой преобразователь, 8 – персональный компьютер.*

Полупроводниковый лазер с распределенной обратной связью, генерирует оптическое излучение в диапазоне 1555 нм, имеющее узкую спектральную ширину линии. Излучение лазера усиливается эрбиевым волоконным усилителем до мощности 25 дБм, после чего, через циркулятор поступает в отрезок одномодового изотропного волокна SMF – 28, который является чувствительным элементом ВИРИ. Длина оптического волокна интерферометра может изменяться, имея значения: 80м, 40м, 30м, 20м, 10м. Оптическое волокно интерферометра рассеивает излучение в обратном направлении. Рассеянное излучение выводится через циркулятор и поступает на фотоприемник с радиочастотной полосой 10МГц. Между циркулятором и фотоприемником может устанавливаться оптический поляризатор.

Для создания статистически независимых распределений коэффициентов рассеяния волокно подвергалось механическому и температурному возмущению, как описано в предыдущем пункте. В работе применялись два типа лазерных источников, высококогерентный полупроводниковый лазер фирмы RIO с

шириной спектральной полосы  $\Delta\nu = 2$  кГц, а также стандартный телекоммуникационный лазерный диод с шириной спектральной полосы  $\Delta\nu = 480$  кГц.

На рисунке 1.17 (а), (б). представлены экспериментальные гистограммы интенсивностей рассеянного излучения для лазера с высокой степенью когерентности  $\Delta\nu = 2$  кГц, при различных длинах рассеивающих участков и различных степенях поляризации излучения, принимаемого фотоприёмником. *При использовании поляризатора, см. рисунок 1.17 (а), степень поляризации излучения, прошедшего через поляризатор и волокно, соединяющее поляризатор с фотоприёмником, составила:  $P = 0.96$ , степень поляризации рассеянного излучения без использования поляризатора, см. рисунок 1.17 (б), составила  $P = 0.33$ . В соответствии с теоретическими выводами, контраст интерферограммы для полностью поляризованного и частично поляризованного излучений, поступающих на фотоприёмник, отличается, см. рисунок 1.17 (а) и (б).*

Из рисунка 1.17 (а) и (б) следует, что для высококогерентного лазерного источника при уменьшении длины рассеивающего участка с 80 м до 10 м, контраст интерференционной картины, для излучений с двумя различными степенями поляризации, вычисленный по гистограммам, практически не изменяется, т.е. не зависит от длины рассеивающего участка. Экспериментальное значение контраста при изменении длины рассеивающего участка – постоянно, и согласуется с теоретической зависимостью, что показано на рисунке 1.17 (в) .

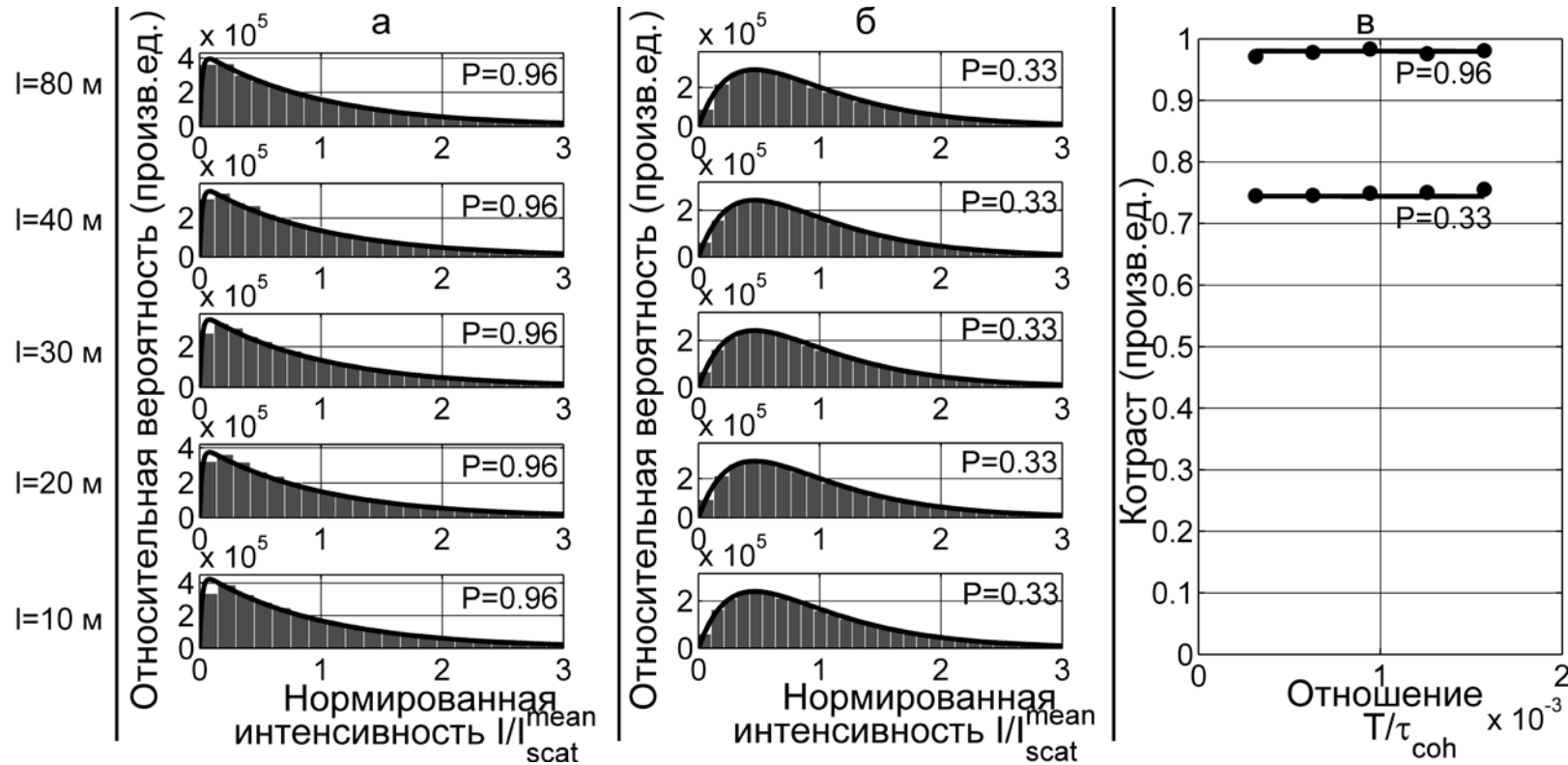


Рисунок 1.17 – Экспериментальные гистограммы, характеризующие плотности распределений интенсивностей рассеянного излучения для лазера с высокой степенью когерентности  $\Delta\nu = 2$  кГц, при различных длинах рассеивающих участков. (а) гистограммы интенсивностей при наблюдении рассеянного излучения через поляризатор, теоретические плотности распределения показаны сплошными линиями, (б) гистограммы интенсивностей при наблюдении рассеянного излучения без поляризатора, теоретические плотности распределения показаны сплошными линиями, (в), круги – изменение контраста интерферограммы рассеянного излучения, соответствующие случаям (а) и (б), непрерывными линиями показаны теоретические зависимости.

На рисунке 1.18. представлены экспериментальные гистограммы для лазера с невысокой степенью когерентности  $\Delta\nu = 480$  кГц, при различных длинах рассеивающих участков. При использовании поляризатора, см. рисунок 1.18 (а), степень поляризации излучения, прошедшего через поляризатор и волокно, соединяющее поляризатор с фотоприемником составила:  $P = 0.96$ , степень поляризации рассеянного излучения без использования поляризатора, см. рисунок 1.18 (б) составила  $P = 0.33$ . В соответствии с теоретическими выводами, контраст интерферограммы для полностью поляризованного и частично поляризованного излучений, поступающих на фотоприемник, отличается рисунок 1.18 (а) и (б).

Из рисунка 1.18 (а) и (б) следует, что для низкокогерентного лазерного источника, при уменьшении длины рассеивающего участка с 80 м до 10 м, контраст, для излучений с двумя различными степенями поляризации, вычисленный по гистограммам, увеличивается, т.е. зависит от длины рассеивающего участка. Экспериментальное значение контраста при изменении длины рассеивающего участка – изменяется, и согласуется с теоретической зависимостью, что показано на рисунке 1.18 (в).

На отдельном графике, см. рисунок 1.19, произведено сравнение плотностей распределений, соответствующих гистограммам для лазеров с высокой: рисунок 1.19 (а) и (б) и невысокой: рисунок 1.19 (в) и (г) степенями когерентности при использовании поляризатора для рассеянного излучения: рисунок 1.19 (а) и (в), и без использования поляризатора: рисунок 1.19 (б) и (г), при изменении длины рассеивающего участка.

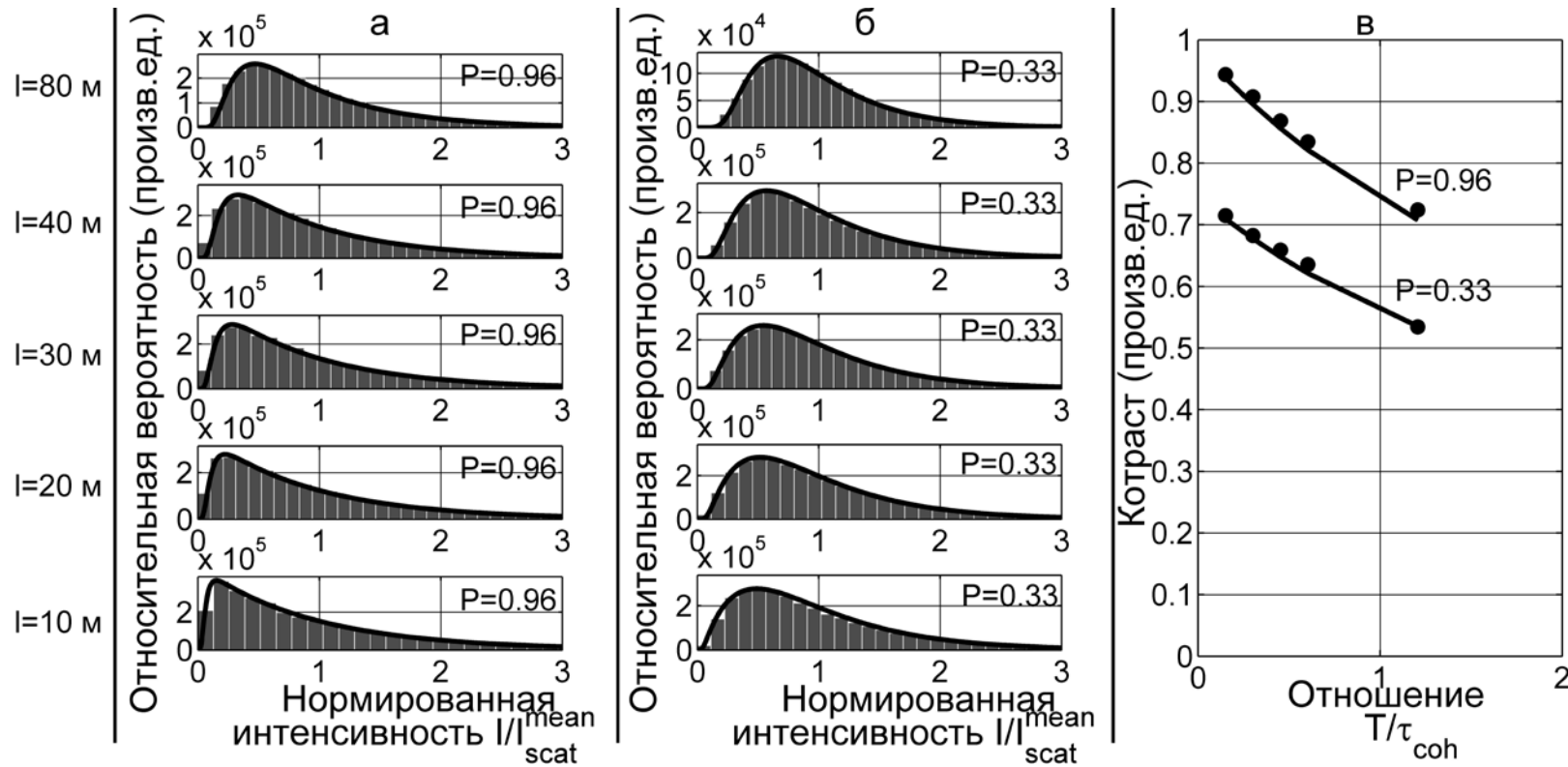
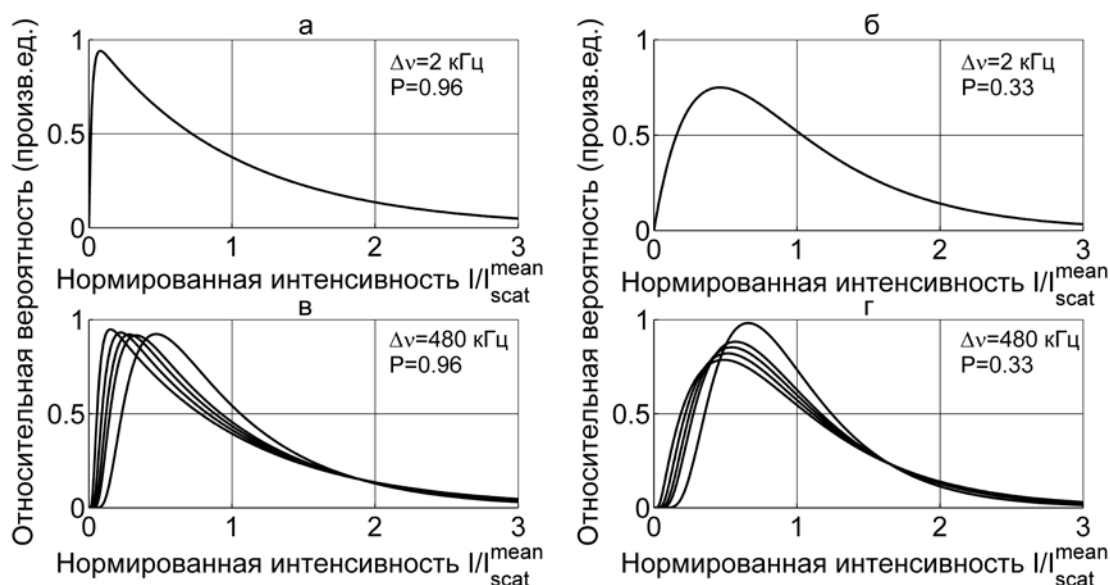


Рисунок 1.18 – Экспериментальные гистограммы, характеризующие плотности распределений интенсивностей рассеянного излучения для лазера с невысокой степенью когерентности  $\Delta\nu = 480$  кГц, при различных длинах рассеивающих участков. (а) гистограммы интенсивностей при наблюдении рассеянного излучения через поляризатор, теоретические плотности распределения показаны сплошными линиями, (б) гистограммы интенсивностей при наблюдении рассеянного излучения без поляризатора, теоретические плотности распределения показаны сплошными линиями, (в), круги – изменение контраста интерферограммы рассеянного излучения, соответствующие случаям (а) и (б), непрерывными линиями показаны теоретические зависимости.



*Рисунок 1.19 – Сравнение экспериментальных плотностей распределений интенсивностей рассеянного излучения для лазеров с высокой и невысокой степенями когерентности, при изменении длины рассеивающего участка, (а) плотность распределения для лазера с высокой степенью когерентности, при использовании поляризатора для рассеянного излучения – неизменна при всех длинах рассеивающих участков, (б) плотность распределения для лазера с высокой степенью когерентности, без использования поляризатора для рассеянного излучения – неизменна при всех длинах рассеивающих участков, (в) изменение плотности распределения для лазера с невысокой степенью когерентности, при изменении длины рассеивающего участка, при использовании поляризатора для рассеянного излучения, (г) изменение плотности распределения для лазера с невысокой степенью когерентности, при изменении длины рассеивающего участка, без использования поляризатора для рассеянного излучения.*

Экспериментальные гистограммы и зависимости контраста интерферограммы от длины рассеивающего участка, приведенные на рисунках 1.17, 1.18 и 1.19, полностью согласуются с теоретическими плотностями распределений случайной интенсивности и теоретическими значениями контраста, полученными в настоящей главе.

Из рисунка 1.17, рисунка 1.18 и рисунка 1.19 следует, что простой способ увеличения контраста интерференционной картины на выходе рассеивающего участка, это использование линейного поляризатора между выходным излучением и фотоприемником. Для более эффективного использования мощности рассеянного излучения, можно применять поляризационный

ответвитель, сочетающий в себе два ортогонально настроенных линейных поляризатора, при этом, конечно, возникает необходимость в дополнительном оптическом приемнике.

Таким образом, экспериментальные зависимости соответствуют теоретическим зависимостям, полученным в данной главе, с хорошей точностью. Совпадения теоретических результатов, результатов математического моделирования и результатов эксперимента дает основание считать, что исходные предположения относительно свойств рассеянного излучения являются верными, а предложенная модель верно описывает статистические закономерности интенсивности рассеянного излучения.

### 1.10. Выводы

В первой главе рассмотрены основные статистические параметры интенсивности обратно – рассеянного излучения по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , возникающего при освещении оптического волокна источником когерентного излучения. На основании теории образования спекл – картин предложена теоретическая модель, описывающая формирование интерференционной картины при рассеянии когерентного излучения средой оптического волокна. Получены общие выражения для среднего значения интенсивности рассеянного излучения, а также для дисперсии интенсивности рассеянного излучения по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , в зависимости от степени когерентности источника излучения, длины рассеивающего участка и степени поляризации рассеянного излучения. Установлена связь дисперсии распределения интенсивности с контрастом интерференционной картины.

Впервые получено выражение для плотности распределения интенсивности рассеянного излучения, в зависимости от степени когерентности источника излучения, длины рассеивающего участка и степени поляризации рассеянного излучения.



Произведено математическое моделирование процесса обратного рассеяния квазимонохроматического излучения, с учетом частичной деполяризации рассеянного излучения. Результаты моделирования полностью совпадают с теоретическими выводами.

Полученные экспериментальные данные для одноканального ВИРИ согласуются с теоретическими выводами и результатами моделирования с хорошей точностью, чем подтверждают корректность предложенной модели и правильность ее статистического описания.

## Глава 2. Усредненная спектральная плотность мощности шума (СПМШ) интенсивности на выходе ВИРИ

Одной из основных областей применения ВИРИ является его использование в качестве датчика внешних воздействий. Чувствительным элементом такого датчика является весь отрезок рассеивающего оптического волокна. Его пороговая чувствительность к внешним воздействиям, а также динамический диапазон, ограничивается снизу шумами различного рода, возникающими в интерферометре. Подобным же образом, шумы ограничивают пороговую чувствительность и динамический диапазон любого интерференционного датчика с когерентным источником. В работах [52, 53, 75, 3] отмечается, что для интерферометра Маха – Цендера, одним из основных источников шума является фазовый шум источника излучения, в качестве которого в работе используется полупроводниковый лазер. Именно этот вид шума приводит к уширению спектральной характеристики излучения лазера, о чем говорилось в первой главе. Случайные флуктуации фазы излучения на входе в интерферометра, преобразуются во флуктуации интенсивности на его выходе. Амплитуда возникающего шума интенсивности возрастает с увеличением оптической задержки в интерферометре, поэтому, в интерференционных датчиках на основе интерферометров Маха – Цендера или Майкельсона, для уменьшения влияния фазовых шумов лазера предпочтительнее использовать сбалансированный интерферометр, в котором разность оптических путей интерферирующих лучей близка к нулю [76]. Пороговая чувствительность сбалансированного интерферометра Маха-Цендера или Майкельсона ограничивается дробовыми или тепловыми шумами используемого фотоприемника. ВИРИ, в отличие от интерферометра Маха – Цендера или Майкельсона, *не может быть сбалансирован*, так как рассеяние происходит одновременно со всего рассеивающего участка волокна, кроме того, разбалансировка интерферометра возрастает с увеличением длины рассеивающего участка, поэтому одним из

основных источников шума в таком интерферометре также является фазовый шум источника излучения. Отметим, что пороговую чувствительность ВИРИ также могут ограничивать шумы другой природы: дробовые и тепловые шумы фотоприемника, а также шумы оптического предусилителя, в случае его использования.

Амплитуда возникающего шума интенсивности в ВИРИ не является постоянной, рисунок 1.1, она изменяется случайным образом, при изменении реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  под воздействием окружающей среды. Для практических целей оценки пороговой чувствительности ВИРИ к внешним воздействиям полезно знать *средний уровень шума* на выходе интерферометра и его спектральный состав. В данной главе будет рассмотрена СПМШ интенсивности на выходе ВИРИ, вызванного фазовым шумом полупроводникового лазерного источника, усредненная по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ .

## **2.1. Усредненная СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ**

Для определения СПМШ интенсивности, возникающего на выходе одноканального ВИРИ вследствие фазового шума источника излучения, необходимо воспользоваться теоремой Винера – Хинчина [33, 65], согласно которой, для процессов стационарных в широком смысле автокорреляционная функция и спектральная плотность мощности являются Фурье образами друг друга. В данном случае случайным процессом является флуктуирующая во времени мгновенная интенсивность рассеянного излучения, стационарность данного процесса будет ясна после нахождения его автокорреляционной функции. Отметим, что указанная флуктуация мгновенной интенсивности вокруг среднего ее значения, может наблюдаться только с помощью фотоприемника с достаточно широкой спектральной полосой, который не производит заметного временного усреднения. Без ограничения общности будем рассматривать случай частично

поляризованного рассеянного излучения, случай полностью поляризованного рассеянного излучения, соответственно, будет являться частным случаем.

Рассмотрим базовую схему одноканального ВИРИ, представляющую собой один рассеивающий участок оптического волокна, см . рисунок 2.1.

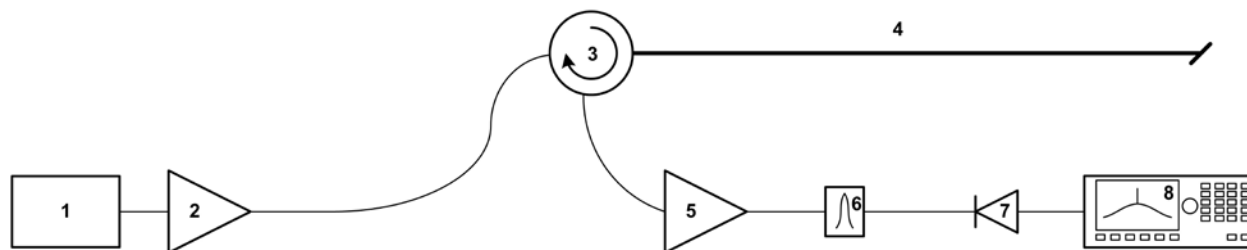


Рисунок 2.1 – Схема одноканального ВИРИ. 1 – полупроводниковый лазер с распределенной обратной связью, 2, 5 – эрбиевый волоконный усилитель, 3 – оптический циркулятор, 4 – отрезок оптического волокна SMF – 28, 6 – оптический фильтр (100 ГГц), 7 – широкополосный фотоприемник, 8. – радиочастотный анализатор спектра.

Пользуясь рассуждениями первой главы, запишем мгновенную интенсивность рассеянного излучения, для какой – либо конкретной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  в виде суммы двух некоррелированных интенсивностей излучений, поляризованных в ортогональных направлениях с средними по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивностями

$$\left(I_{scat}^{mean}\right)_{pol1} = I_{scat}^{mean} (1 + P)/2 \text{ и } \left(I_{scat}^{mean}\right)_{pol2} = I_{scat}^{mean} (1 - P)/2 :$$

$$\left[\left(I_{scat}^{\rho}\right)_{inst}\right]_{partpol} = \left[\left(I_{scat}^{\rho}\right)_{inst}\right]_{pol1} + \left[\left(I_{scat}^{\rho}\right)_{inst}\right]_{pol2} \quad (2.1).$$

СПМШ интенсивности рассеянного излучения для *выбранной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$*  можно получить с помощью Фурье преобразования автокорреляционной функции мгновенной интенсивности (2.1) . Автокорреляционная функция мгновенной интенсивности рассеянного излучения (2.1) определяется как среднее по времени от произведения мгновенных интенсивностей, взятых с временной задержкой  $\tau$  [33, 52, 53] :

$$R_I^\rho(t, t + \tau)_{partpol} = E_T \left\langle \left[ \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right]_{partpol} \left[ \left( I_{scat}^\rho(t + \tau) \right)_{inst} \right]_{partpol} \right\rangle \quad (2.2),$$

где индекс  $\rho$  обозначает, что автокорреляционная функция относится к одной из реализаций распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ ,  $E_T \langle \rangle$  – обозначает усреднение по времени. В силу того, что интенсивность рассеянного излучения состоит из двух некоррелированных компонент, поляризованных в ортогональных направлениях, (2.2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} R_I^\rho(t, t + \tau)_{partpol} &= \frac{1+P^2}{2} E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \left( I_{scat}^\rho(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle + \frac{1-P^2}{2} \left( I_{scat}^{mean} \right)^2 = \\ &= \frac{1+P^2}{2} R_I^\rho(t, t + \tau) + \frac{1-P^2}{2} \left( I_{scat}^{mean} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.3),$$

где

$$R_I^\rho(t, t + \tau) = E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \left( I_{scat}^\rho(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle \quad (2.4),$$

автокорреляционная функция мгновенной интенсивности полностью поляризованного рассеянного излучения, для какой – либо реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ ,  $\left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst}$  – мгновенная интенсивность определяется выражением (1.22),  $P$  – степень поляризации рассеянного излучения. Рассмотрим автокорреляционную функцию мгновенной интенсивности (2.4) [А6]:

$$\begin{aligned} R_I^\rho(t, t + \tau) &= \\ &= E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \cdot \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \times \right. \\ &\quad \left. \int_0^L \int_0^L A_s^*(t + \tau - 2z_3/v_{gr}) A_s(t + \tau - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_3 - 2ikz_4) \cdot \rho^*(z_3) \rho(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \end{aligned} \quad (2.5).$$

Фурье преобразование автокорреляционной функция общего вида (2.5), которая представляет собой момент четвертого порядка для случайного поля рассеянного излучения, дает СПМШ интенсивности рассеянного излучения на выходе одноканального ВИРИ, для какой – либо реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ . Однако, реализация распределения

коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  не является фиксированной, она изменяется случайным образом под воздействием окружающей среды, что приводит, в свою очередь, к изменению результирующей интенсивности рассеянного излучения на выходе интерферометра и, следовательно, ее автокорреляционной функции. Изменение автокорреляционной функции приводит к изменению СПМШ интенсивности, при переходе от одной реализации к другой, см. рисунок 1.1. Для практических применений полезно знать средний уровень шума интенсивности на выходе ВИРИ, не привязанный к какой – либо конкретной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , то есть уровень шума, усредненный по всем возможным реализациям распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ . Для вычисления среднего уровня шума или средней СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ необходимо сначала вычислить среднюю по ансамблю  $\{\rho\}$  автокорреляционную функцию мгновенной интенсивности рассеянного излучения, ее Фурье преобразование, в силу свойства линейности, даст среднюю СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ. Таким образом, необходимо усреднить выражение для автокорреляционной функции (2.5), по всем возможным реализациям  $\{\rho\}$ . Отметим, что в выражении (2.5) уже присутствует усреднение по времени, однако, как отмечалось ранее, в силу того, что комплексные амплитуды коэффициентов рассеяния центров, для каждой конкретной реализации  $\{\rho\}$  и комплексная амплитуда поля источника статистически независимы друг от друга, усреднение по времени и усреднение по ансамблю можно производить независимо [35]. Таким образом, для средней по ансамблю корреляционной функции получаем:

$$\begin{aligned}
 R_I(t, t + \tau) &= E_\rho \langle R_I^\rho(t, t + \tau) \rangle = \\
 &= \int_0^L \int_0^L \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1) \exp(-2ikz_2) \times \right. \\
 &\quad \left. \times A_s^*(t + \tau - 2z_3/v_{gr}) A_s(t + \tau - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_3) \exp(-2ikz_4) \right\rangle (2.6). \\
 &\quad E_\rho \langle \rho^*(z_1) \rho(z_2) \rho^*(z_3) \rho(z_4) \rangle dz_1 dz_2 dz_3 dz_4
 \end{aligned}$$

Воспользуемся, как и в прошлой главе, теоремой о гауссовском моменте для случайных комплексных величин, какими по предположению являются комплексные коэффициенты рассеяния  $\rho$  [61] :

$$E_{\rho} \left\langle \rho^*(z_1) \rho(z_2) \rho^*(z_3) \rho(z_4) \right\rangle = \rho_0^2 \delta(z_1 - z_2) \delta(z_3 - z_4) + \rho_0^2 \delta(z_2 - z_3) \delta(z_1 - z_4) \quad (2.7).$$

Используя (2.7) и изменяя индекс интегрирования с 3 на 2, интеграл (2.6) сводится к сумме двойных интегралов:

$$R_I(t, t + \tau) = \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left| A_s(t - 2z_1/v_{gr}) \right|^2 \left| A_s(t + \tau - 2z_2/v_{gr}) \right|^2 dz_1 dz_2 + \\ + \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) A_s^*(t + \tau - 2z_2/v_{gr}) A_s(t + \tau - 2z_1/v_{gr}) \right\rangle dz_1 dz_2 \quad (2.8),$$

в которой исключена зависимость от разности фаз, обусловленных разностью координат центров рассеяния.

Следуя [76] рассмотрим подынтегральное выражение второго слагаемого, в (2.8), которое представляет собой момент четвертого порядка для поля источника излучения:

$$f(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = E_T \left\langle A_s^*(t - \tau_1) A_s(t - \tau_2) A_s^*(t + \tau - \tau_2) A_s(t + \tau - \tau_1) \right\rangle \quad (2.9),$$

где были сделаны замены переменных:

$$\tau_1 = 2z_1/v_{gr}, \quad \tau_2 = 2z_2/v_{gr} \quad (2.10).$$

Комплексные амплитуды полей в (2.9) определяются выражением (1.4), после подстановки, получим:

$$f(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = I_s^2 E_T \left\langle \exp(-i\varphi_s(t - \tau_1) + i\varphi_s(t - \tau_2) - i\varphi_s(t + \tau - \tau_2) + i\varphi_s(t + \tau - \tau_1)) \right\rangle = \\ = I_s^2 \exp \left( -\frac{1}{2} E_T \left\langle \left[ \varphi_s(t - \tau_2) - \varphi_s(t - \tau_1) + \varphi_s(t + \tau - \tau_1) - \varphi_s(t + \tau - \tau_2) \right]^2 \right\rangle \right) \quad (2.11),$$

где мы воспользовались ранее полученным результатом (П.2), а также учли, что сумма гауссовских случайных величин сама является гауссовской случайной величиной. Введем обозначения:

$$t_1 = t - \tau_2, \quad t_2 = t - \tau_1, \quad t_3 = t + \tau - \tau_1, \quad t_4 = t + \tau - \tau_2 \quad (2.12).$$

С учетом (2.12) преобразуем (2.9) к виду:

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = E_T \langle A_s^*(t_2) A_s(t_1) A_s^*(t_4) A_s(t_3) \rangle,$$

а (2.11), см. приложение б, к виду:

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2, t_3, t_4) &= I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{2} E_T \langle [\varphi_s(t_1) - \varphi_s(t_2) + \varphi_s(t_3) - \varphi_s(t_4)]^2 \rangle\right) = \\ &= I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{2} E_T \left\langle \left\{ \begin{aligned} &[\varphi_s(t_1) - \varphi_s(t_2)]^2 + [\varphi_s(t_3) - \varphi_s(t_4)]^2 - [\varphi_s(t_1) - \varphi_s(t_3)]^2 + \\ &+ [\varphi_s(t_2) - \varphi_s(t_3)]^2 + [\varphi_s(t_1) - \varphi_s(t_4)]^2 - [\varphi_s(t_2) - \varphi_s(t_4)]^2 \end{aligned} \right\} \right\rangle\right) \end{aligned} \quad (2.13).$$

Далее используя опять (П.2) получаем:

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (|t_1 - t_2| + |t_3 - t_4| - |t_1 - t_3| + |t_2 - t_3| + |t_1 - t_4| - |t_2 - t_4|)\right) \quad (2.14),$$

или с учетом сделанной замены (2.12):

$$\begin{aligned} f(t, \tau, \tau_1, \tau_2) &= I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (|\tau_1 - \tau_2| + |\tau_2 - \tau_1| - |\tau + \tau_2 - \tau_1| + |\tau| + |\tau| - |\tau + \tau_1 - \tau_2|)\right) = \\ &= I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau_1 - \tau_2| - |\tau + \tau_2 - \tau_1| + 2|\tau| - |\tau + \tau_1 - \tau_2|)\right) \end{aligned} \quad (2.15).$$

Раскрывая модули, получим:

$$f(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau|)\right) & |\tau| \leq |\tau_2 - \tau_1| \\ I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau_2 - \tau_1|)\right) & |\tau| > |\tau_2 - \tau_1| \end{cases} \quad (2.16).$$

Введем далее прямоугольную функцию следующего вида [53]:

$$\Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right) = \begin{cases} 1 & |\tau| \leq |\tau_2 - \tau_1| \\ 0 & |\tau| > |\tau_2 - \tau_1| \end{cases} \quad (2.17),$$



которая равна нулю, когда задержка  $|\tau|$  превышает  $|\tau_2 - \tau_1|$  и равна 1 когда задержка  $|\tau|$  меньше  $|\tau_2 - \tau_1|$ , с учетом (2.17) запишем (2.16) в виде:

$$\begin{aligned} f(t, \tau, \tau_1, \tau_2) &= \\ &= I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right) + I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_2 - \tau_1|)\right) \left[1 - \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right)\right] \end{aligned} \quad (2.18).$$

Автокорреляционная функция мгновенной интенсивности полностью поляризованного рассеянного излучения (2.8) для одноканального ВИРИ, усредненная по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , с учетом (2.9) и замены переменных (2.10) имеет вид:

$$R_I(t, t + \tau) = \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 d\tau_1 d\tau_2 + \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T f(t, \tau, \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.19),$$

где  $T = 2L/v_{gr}$  с учетом (2.18) она преобразуется к окончательному виду [А6]:

$$\begin{aligned} R_I(t, t + \tau) &= \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 d\tau_1 d\tau_2 + \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right) d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_2 - \tau_1|)\right) \left(1 - \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right)\right) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.20).$$

Как видно из (2.20), автокорреляционная функция зависит только от разности моментов времени  $\tau$ , то есть *процесс флуктуации интенсивности рассеянного излучения является стационарным в широком смысле*:  $R_I(t, t + \tau) = R_I(\tau)$ .

Первый член, как можно видеть, является квадратом интенсивности излучения, рассеянного участком, усредненной по всем возможным распределениям коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ :  $(I_{scat}^{mean})^2$ . Данная величина была рассмотрена нами в первой главе, см. пункт 1.3.

Отметим, что выражение:

$$R_I(0) - (I_{mean}^{scat})^2 = (I_{mean}^{scat})^2 \quad (2.21),$$

определяет дисперсию временных флуктуаций *мгновенной интенсивности рассеянного излучения, усредненную по всем возможным распределениям коэффициентов рассеяния центров*  $\{\rho\}$ . Как видно из (2.21), эта величина всегда постоянна (определяется лишь длиной участка и заводимой в него мощностью) и *не зависит от степени когерентности источника излучения*. Таким образом, среднее по ансамблю  $\{\rho\}$  значение контраста временных флуктуаций мгновенной интенсивности рассеянного излучения на выходе ВИРИ равно 1:

$$C_T = \sqrt{\left(I_{mean}^{scat}\right)^2} / I_{mean}^{scat} = 1.$$

Выражение (2.21), следует отличать от *дисперсии интенсивности* рассеянного излучения, рассчитанной по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , найденной в первой главе и равной:

$$D(I_{scat}) = E_{\rho} \left\langle I_{scat}^{\rho 1} I_{scat}^{\rho 2} \right\rangle - \left(I_{scat}^{mean}\right)^2 = \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.22),$$

эта величина возрастает с увеличением степени когерентности источника. Поэтому для высококогерентных источников контраст интерферограммы по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивности близок к 1, а для низкокогерентных контраст близок к 0.

Для расчёта усредненной СПМШ интенсивности удобнее пользоваться автоковариационной функцией мгновенной интенсивности [33], в силу того, что она не содержит постоянных составляющих, наличие которых приводит к возникновению дельта – функций в спектральных характеристиках. Для частично поляризованного рассеянного излучения автоковариационная функция мгновенной интенсивности равна:

$$\begin{aligned} C_I^{\rho}(t, t + \tau)_{partpol} &= R_I^{\rho}(t, t + \tau)_{partpol} - E_T \left\langle \left[ \left( I_{scat}^{\rho}(t) \right)_{inst} \right]_{partpol} \right\rangle E_T \left\langle \left[ \left( I_{scat}^{\rho}(t + \tau) \right)_{inst} \right]_{partpol} \right\rangle = \\ &= \frac{1 + P^2}{2} \left\{ E_T \left\langle \left( I_{scat}^{\rho}(t) \right)_{inst} \left( I_{scat}^{\rho}(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle - E_T \left\langle \left( I_{scat}^{\rho}(t) \right)_{inst} \right\rangle E_T \left\langle \left( I_{scat}^{\rho}(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle \right\} = \\ &= \frac{1 + P^2}{2} C_I^{\rho}(t, t + \tau) \end{aligned} \quad (2.23),$$

где

$$C_I^\rho(t, t + \tau) = E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \left( I_{scat}^\rho(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle - E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle \quad (2.24),$$

автоковариационная функция мгновенной интенсивности полностью поляризованного рассеянного излучения, для какой – либо реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ . Автоковариационная функция (2.24), усредненная по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  равна:

$$C_I(t, t + \tau) = E_\rho \left\langle C_I^\rho(t, t + \tau) \right\rangle = R_I(t, t + \tau) - E_\rho \left\langle E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle \right\rangle \quad (2.25).$$

Для произведения средних интенсивностей, усредненных по ансамблю  $\{\rho\}$ , получаем:

$$\begin{aligned} E_\rho \left\langle E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle \right\rangle = \\ = \left. \left. \left. \left. \int_0^L \int_0^L \int_0^L \int_0^L \left( E_T \left\langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1) \exp(-2ikz_2) \right\rangle \times \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \times E_T \left\langle A_s^*(t + \tau - 2z_3/v_{gr}) A_s(t + \tau - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_3) \exp(-2ikz_4) \right\rangle \right) \right) \right) \right) \times \\ \times E_\rho \left\langle \rho^*(z_1) \rho(z_2) \rho^*(z_3) \rho(z_4) \right\rangle dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 \end{aligned} \quad (2.26).$$

Используя (2.7) получим:

$$\begin{aligned} E_\rho \left\langle E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle \right\rangle = \\ = \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left| A_s(t - 2z_1/v_{gr}) \right|^2 \left| A_s(t + \tau - 2z_2/v_{gr}) \right|^2 dz_1 dz_2 + \\ \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \right\rangle E_T \left\langle A_s^*(t - 2z_2/v_{gr} + \tau) A_s(t - 2z_1/v_{gr} + \tau) \right\rangle dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (2.27).$$

Используя замену переменных (2.10), а также (1.16), получим:

$$\begin{aligned}
& E_{\rho} \left\langle E_T \left\langle \left( I_{scat}^{\rho}(t) \right)_{inst} \right\rangle E_T \left\langle \left( I_{scat}^{\rho}(t+\tau) \right)_{inst} \right\rangle \right\rangle = \\
& = \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 d\tau_1 d\tau_2 + \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \exp \left( -\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau_2 - \tau_1|) \right) d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned} \tag{2.28}.$$

Используя (2.25), (2.20) и (2.28), получаем окончательное выражение для автоковариационной функции мгновенной интенсивности полностью поляризованного рассеянного излучения одноканального ВИРИ, усредненной по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  [А6]:

$$C_I(t, t+\tau) = \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \left[ \exp \left( -\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau|) \right) - \exp \left( -\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau_2 - \tau_1|) \right) \right] \Pi \left( \frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|} \right) d\tau_1 d\tau_2 \tag{2.29}.$$

Преобразование Фурье выражения (2.29) даст СПМШ интенсивности полностью поляризованного рассеянного излучения, усредненную по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ . Учет частичной поляризованности рассеянного излучения производится путем добавления множителя  $(1 + P^2)/2$ , согласно (2.3) и (2.23).

Установим физический смысл полученного выражения для усредненной по ансамблю  $\{\rho\}$  автоковариационной функции мгновенной интенсивности [А6] (2.29), для этого рассмотрим автокорреляционную функцию мгновенной интенсивности для интерферометра Маха – Цендера или Майкельсона [52, 53, 76-78], см. приложение 7:

$$\begin{aligned}
& C_{MZ}(t, t+\tau) = \\
& = \frac{I_s^2}{2} \left[ \exp \left( -\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau|) \right) - \exp \left( -\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau_1 - \tau_2|) \right) + \right. \\
& \left. + \left( \exp \left( -\frac{1}{\tau_{coh}} (4|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|) \right) - \exp \left( -\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau_1 - \tau_2|) \right) \right) \cos(2\alpha) \right] \Pi \left( \frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|} \right)
\end{aligned} \tag{2.30},$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – соответственно, временные задержки интерферирующих лучей в интерферометре,  $\alpha = kz_2 - kz_1$  – оптическая разность плеч в интерферометре,  $k$  – волновой вектор,  $z_1 = v_{gr}\tau_1$ ,  $z_2 = v_{gr}\tau_2$  – геометрические длины плеч интерферометра.

Из сравнения выражений (2.29) и (2.30) видно, что интеграл в (2.29) берется от первой части выражение в (2.30), вторая часть выражения (2.30) при этом игнорируется.

Из (П.22) следует, что интерферометр Маха – Цендера или Майкельсона имеет минимальное или максимальное среднее по времени пропускание при  $\cos(\alpha) = \pm 1$ ,  $\alpha = \pi n$ , при этом говорят, что рабочая точка интерферометра находится *вне квадратуры*. Во вне квадратурном режиме интерферометр имеет минимальную чувствительность к внешним воздействиям. Напротив, при  $\cos(\alpha) = 0$ ,  $\alpha = \pi/2 + \pi n$ , пропускание интерферометра соответствует среднему значению  $I_s$ , при этом говорят, что рабочая точка интерферометра находится *в квадратуре*. В квадратурном режиме интерферометр имеет максимальную чувствительность к внешним воздействиям [53, 79]. Значение угла  $\alpha$  также называют положением рабочей точки интерферометра. Можно также заметить, что подынтегральное выражение в (2.29) представляет собой половину суммы квадратурной и вне – квадратурной частей автоковариационной функции мгновенной интенсивности для интерферометра Маха – Цендера или Майкельсона, с временной задержкой интерферирующих лучей равной:  $0 \leq |\tau_1 - \tau_2| \leq T$  (2.30). Заметим, также, что если усреднить автоковариационную функцию (2.30) по всем возможным значениям  $\alpha$ , то есть по всем возможным положениям рабочей точки интерферометра, то второй член в этом выражении обратиться в нуль, и подынтегральное выражение в (2.29) будет соответствовать усредненному по  $\alpha$  выражению (2.30) с точностью до нормировочного множителя.

Таким образом, можно считать, что усредненная по ансамблю  $\{\rho\}$  автоковариационная функция мгновенной интенсивности одноканального ВИРИ (2.29) представляет собой сумму автоковариационных функций всех возможных элементарных интерферометров Майкельсона, образованных рассеивающими центрами, с одинаковыми амплитудами рассеяния и с временными задержками полей:  $0 \leq |\tau_1 - \tau_2| \leq T$ , усредненных по всем положениям их рабочих точек  $\alpha$ . В силу линейности преобразования Фурье, можно считать, что СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ, усреднённая по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , представляет собой сумму СПМШ интенсивности всех элементарных интерферометров, образованных парами центров рассеяния, при этом СПМШ интенсивности каждого элементарного интерферометра усреднена по всем положениям рабочей точки.

Для интерферометра Маха – Цендера или Майкельсона, уровень шумов интенсивности, определяемых квадратурной или вне квадратурной ковариационной функцией (2.30) различен – квадратурный режим работы интерферометра имеет более высокую СПМШ интенсивности, чем вне квадратурный. Последнее обстоятельство позволяет интерпретировать изменение амплитуды шума интенсивности на выходе одноканального ВИРИ, показанное на рисунке 1.1: амплитуда шума максимальна, когда все или большая часть элементарных интерферометров Майкельсона, образованных парами центров рассеяния, находятся в квадратуре, напротив амплитуда шума минимальна, когда все или большая часть интерферометров находятся вне квадратуры.

Рассмотрим выражение :

$$\begin{aligned}
C'_I(t, t + \tau, \alpha) = & \\
= \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 & \left( \exp\left(-\frac{2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) + \right. \\
& \left. + \left( \exp\left(-\frac{4|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) \right) \cos(2\alpha) \right) \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right) d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned} \tag{2.31},$$

которое получается из (2.29) путем добавление к автоковариационной функции слагаемого, изменяющегося в зависимости от положения рабочей точки  $\alpha$  элементарного интерферометра. Теперь подынтегральное выражение в (2.31) соответствует автоковариационной функции мгновенной интенсивности интерферометра Маха – Цендера или Майкельсона. В записанном выражении принято, что положения рабочих точек всех элементарных интерферометров одинаково. Данное упрощение позволяет определить экстремальные значения усредненной СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ: максимальное, когда все интерферометры находятся в квадратурном режиме и минимальное, когда все интерферометры находятся во вне квадратурном режиме.

Исходная автоковариационная функция (2.29) получается из (2.31) путем усреднения по всем возможным положениям рабочих точек  $\alpha$  :

$$C_I(t, t + \tau) = E_\alpha \langle C'_I(t, t + \tau, \alpha) \rangle \tag{2.32},$$

где  $E_\alpha \langle \rangle$  обозначает усреднение по всем возможным значениям положения рабочей точки. В силу линейности преобразования Фурье, спектральные плотности мощности, полученные из (2.29) и (2.31) также связаны процедурой усреднения по всем возможным значениям рабочих точек  $\alpha$  , аналогично связи их автоковариационных функций (2.32). В силу того, что в случае когда все элементарные интерферометры находятся *в квадратуре* :  $\cos(2\alpha) = -1$  , а в случае когда все эти интерферометры находятся *вне квадратуры*:  $\cos(2\alpha) = 1$  , можно также записать:

$$C_I(t, t + \tau) = \frac{1}{2} (C_I^{quad}(t, t + \tau) + C_I^{out-of-quad}(t, t + \tau)) \tag{2.33},$$

где

$$C_I^{quad}(t, t + \tau) = \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \left( \exp\left(-\frac{2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) - \left( \exp\left(-\frac{4|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) \right) \right) \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.34),$$

$$C_I^{out-of-quad}(t, t + \tau) = \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \left( \exp\left(-\frac{2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) + \left( \exp\left(-\frac{4|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) \right) \right) \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.35),$$

соответственно, *квадратурная и вне квадратурная составляющие автоковариационной функции мгновенной интенсивности одноканального ВИРИ*. Сама автоковариационная функция интерферометра, в соответствии с (2.33) равна половине от суммы (2.34) и (2.35).

*СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ, вызванного фазовыми флуктуациями поля источника излучения, усредненная по ансамблю независимых  $\{\rho\}$  распределений коэффициентов рассеяния центров, равна преобразованию Фурье от автоковариационной функции (2.29):*

$$S_I(f) = F[C_I(t, t + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} C_I(t, t + \tau) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \quad (2.36).$$

При использовании (2.32) или (2.33), результирующая усредненная СПМШ интенсивности может быть записана в виде:

$$S_I(f) = E_\alpha \langle S_I(f, \alpha) \rangle \quad (2.37),$$

$$S_I(f) = \frac{1}{2} (S_I^{quad}(f) + S_I^{out-of-quad}(f)) \quad (2.38),$$

где



$$S_i(f, \alpha) = F[C'_i(t, t + \tau, \alpha)] = \int_{-\infty}^{+\infty} C'_i(t, t + \tau, \alpha) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \quad (2.39),$$

$$S_i^{quad}(f) = F[C_i^{quad}(t, t + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} C_i^{quad}(t, t + \tau) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \quad (2.40),$$

$$S_i^{out-of-quad}(f) = F[C_i^{out-of-quad}(t, t + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} C_i^{out-of-quad}(t, t + \tau) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \quad (2.41),$$

причем, результат (2.37) справедлив и в случае, если не делать предположения о том, что рабочие точки всех элементарных интерферометров одинаковы. Этот вывод следует из того, что даже при различных значениях рабочих точек элементарных интерферометров  $\alpha_i, i = 1 \dots N$ , при усреднении по всем возможным их значениям, второй член в подынтегральном выражении (2.31) обращается в нуль. Выражения (2.40) и (2.41) соответствуют СПМШ интенсивности для квадратурного и вне квадратурного режимов работы одноканального ВИРИ. Для дальнейшего рассмотрения запись результирующей усредненной СПМШ интенсивности в виде (2.38) более полезна, так как связывает результирующую усредненную СПМШ интенсивности с предельными случаями минимального значения мощности шума, соответствующего вне квадратурному режиму работы и максимального значения мощности шума, соответствующего квадратурному режиму работы. Вычислим эти две спектральные плотности мощности (2.40) и (2.41), которые представляют собой преобразования Фурье от двойных интегралов автоковариационных функций (2.34) и (2.35).

Так как преобразование Фурье производится по переменной  $\tau$ , а интегрирование в (2.34) и (2.35) производится по другим переменным – всем возможным положениям центров рассеяния, а также в силу линейности преобразования Фурье, его можно внести под знак двойного интеграла, выполнив сначала преобразование Фурье, а затем проинтегрировав полученную спектральную функцию. Изменение порядка двойного интегрирования и преобразования Фурье позволяет частично свести задачу к известной задаче о

вычислении СПМШ интенсивности для интерферометра Маха – Цендера, подробно рассмотренной в [52,53].

СПМШ интенсивности для квадратурного и вне квадратурного режимов работы одноканального ВИРИ, таким образом, могут быть записаны в виде, см. приложение 8:

$$S_I^{quad}(f) = \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^T \int_0^T F \left\{ \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) \sinh\left(\frac{2|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right) \right\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.42),$$

$$S_I^{out-of-quad}(f) = \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^T \int_0^T F \left\{ \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) \left[ \cosh\left(\frac{2|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right] \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right) \right\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.43).$$

Рассмотрим преобразования Фурье по переменной  $\tau$  от подынтегральных выражений в (2.42) и (2.43), введя обозначение:  $\mathcal{G} = |\tau_2 - \tau_1|$ . Заметим, что эти Фурье образы зависят только от разности  $\mathcal{G}$ , причем, прямоугольная функция (2.17) ограничивает интервал интегрирования отрезком  $[-\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ . Искомые преобразования Фурье имеют вид:

$$S_T^{quad}(f) = \int_{-\mathcal{G}}^{\mathcal{G}} \exp\left(-\frac{2\mathcal{G}}{\tau_{coh}}\right) \sinh\left(\frac{2\mathcal{G} - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \quad (2.44),$$

$$S_T^{out-of-quad}(f) = \int_{-\mathcal{G}}^{\mathcal{G}} \exp\left(-\frac{2\mathcal{G}}{\tau_{coh}}\right) \left[ \cosh\left(\frac{2\mathcal{G} - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right] \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \quad (2.45).$$

Вычисляя интегралы (2.44) и (2.45) [53] см. приложение 9, получаем:

$$S_T^{quad}(f) = \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \left[ \cosh\left(\frac{2\mathcal{G}}{\tau_{coh}}\right) - \cos(2\pi f \mathcal{G}) \right] \exp\left(-\frac{2\mathcal{G}}{\tau_{coh}}\right) \quad (2.46),$$

$$S_T^{out-of-quad}(f) = \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \left[ \sinh\left(\frac{2\mathcal{G}}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\sin(2\pi f \mathcal{G})}{\pi f \tau_{coh}} \right] \exp\left(-\frac{2\mathcal{G}}{\tau_{coh}}\right) \quad (2.47).$$

Выражение (2.46) и (2.47) соответствуют спектральным характеристикам элементарных интерферометров Майкельсона, образованных любыми двумя центрами рассеяния волокна, с временной задержкой  $\mathcal{G}$  для рассеянных лучей. Первое выражение, представляет собой СПМШ интенсивности элементарного интерферометра, при его работе в квадратурном режиме, второе – СПМШ интенсивности элементарного интерферометра, при его работе во вне квадратурном режиме. Спектральные характеристики, каждого элементарного интерферометра, как можно видеть, определяются отношением времени задержки  $\mathcal{G} = |\tau_1 - \tau_2|$  интерферирующих лучей ко времени когерентности излучения  $\tau_{coh}$ . На рисунке 2.2 показаны в логарифмическом масштабе нормированные СПМШ интенсивности элементарного интерферометра Майкельсона, соответствующие квадратурному (2.46) (жирные линии) и вне квадратурному (2.47) (тонкие линии) режимам работы интерферометра, для двух различных отношений максимальных задержек интерферирующих лучей к длинам когерентности:  $\mathcal{G}/\tau_{coh} = 0.63$  и  $\mathcal{G}/\tau_{coh} = 0.003$ .

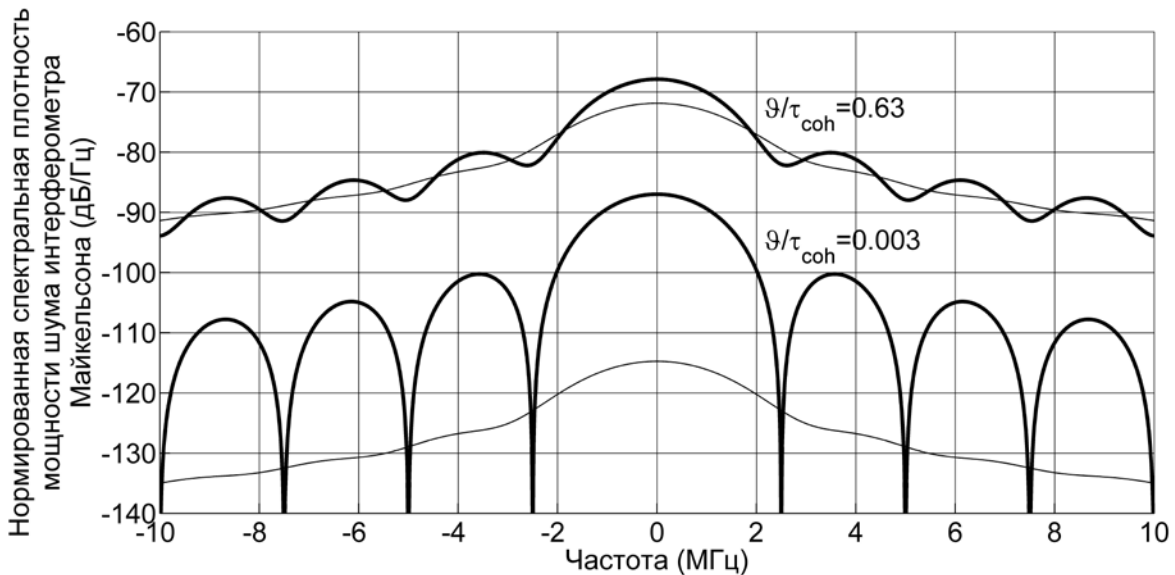


Рисунок 2.2 – Нормированные СПМШ интенсивности элементарного интерферометра Майкельсона, соответствующие квадратурному – жирные линии и вне квадратурному – тонкие линии, режимам работы интерферометра при двух различных величинах отношений максимальной задержки интерферирующих лучей и времени когерентности:  $\mathcal{G}/\tau_{coh} = 0.63$  и  $\mathcal{G}/\tau_{coh} = 0.003$ .

Для любых двух центров рассеяния, образующих элементарный интерферометр, при увеличении времени задержки между рассеянными ими полями, спектральные характеристики интенсивности (2.46) и (2.47), становятся более крутыми и увеличиваются в области низких частот. На рисунке 2.3 приведена зависимость спектральной характеристики элементарного интерферометра Майкельсона, в квадратурном режиме работы в зависимости от отношения  $\vartheta/\tau_{coh}$  при неизменном времени когерентности.

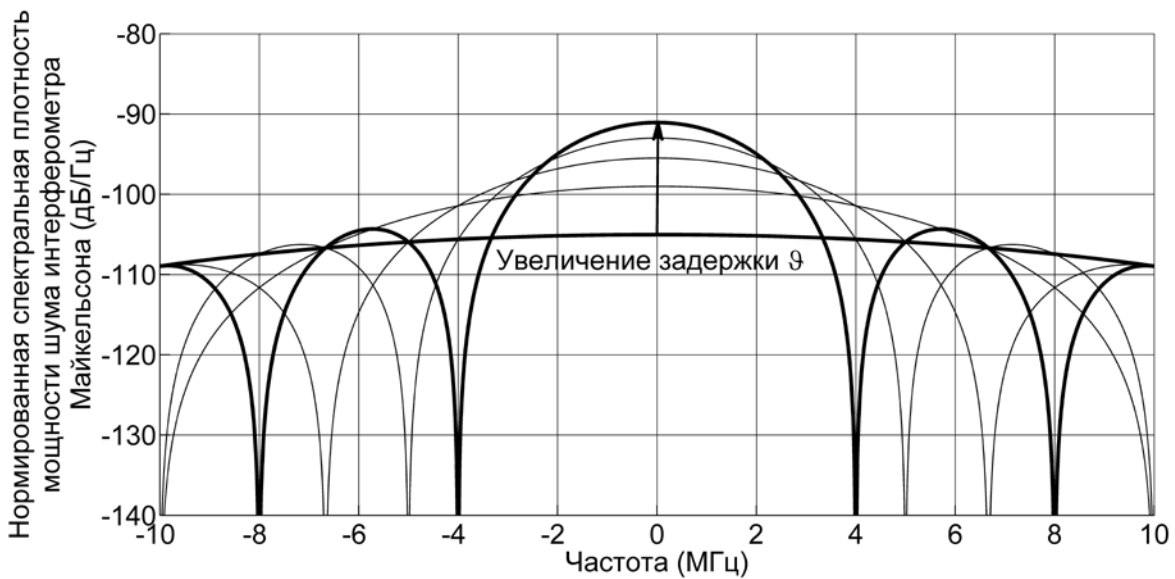


Рисунок 2.3 – Изменение нормированной СПМШ интенсивности элементарного интерферометра Майкельсона, образованного любыми двумя центрами рассеяния, при увеличении времени задержки между интерферирующими полями. Стрелкой показано изменение спектральной характеристики при увеличении временной задержки между интерферирующими полями при постоянном времени когерентности, тонкие линии – промежуточные спектральные характеристики.

Результирующая средняя по ансамблю  $\{\rho\}$  СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ (2.38) соответствует сумме СПМШ интенсивности для квадратурного и вне квадратурного режимов (2.46) и (2.47), просуммированным, в свою очередь, по всем возможным временным задержкам  $\vartheta = |\tau_1 - \tau_2|$ . Таким образом, при низких частотах, максимальный вклад в амплитуду результирующей усредненной по ансамблю  $\{\rho\}$  спектральной характеристики одноканального ВИРИ дают центры рассеяния, расположенные

на дальних концах рассеивающего участка. Однако, центров рассеяния с максимальной временной задержкой  $\mathcal{S}$  между ними – минимальное количество, поэтому, несмотря на максимальную мощность шума, вносимого ими в области низких частот, их вклад в общую шумовую характеристику интерферометра мал. Напротив, центров, расположенных близко друг к другу, – максимальное количество, но амплитуды спектральных характеристик шума, производимого ими минимальны. Чтобы получить точное выражение для усредненной по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ, необходимо просуммировать все элементарные спектральные характеристики, от всех элементарных интерферометров, образованных центрами рассеивающей среды, то есть вычислить двойные интегралы по временным задержкам  $\tau_1$  и  $\tau_2$  от спектральных характеристик (2.46) и (2.47):

$$\begin{aligned}
 S_i^{quad}(f) &= \\
 &= \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^T \int_0^T \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \left[ \cosh\left(\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) - \cos(2\pi f |\tau_2 - \tau_1|) \right] \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned} \tag{2.48},$$

$$\begin{aligned}
 S_i^{out-of-quad}(f) &= \\
 &= \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^T \int_0^T \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \left[ \sinh\left(\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\sin(2\pi f |\tau_2 - \tau_1|)}{\pi f \tau_{coh}} \right] \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned} \tag{2.49}.$$

Вычисление интегралов (2.48) и (2.49) приведено в *приложении 10*, результат имеет вид [А6]:

$$S_i^{quad}(f) = \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 I_s^2 \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( T^2 + \frac{\tau_{coh}^2}{8} \left( \exp\left(-\frac{4T}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) + \frac{\tau_{coh}}{2} T \right) - \\ & - \frac{4}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^4}{\left(4 + (2\pi f \tau_{coh})^2\right)^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( \frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f T) - 2\pi f \sin(2\pi f T) \right) - \frac{2}{\tau_{coh}} \right] + \\ & + 4\pi f \frac{\tau_{coh}^4}{\left(4 + (2\pi f \tau_{coh})^2\right)^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( \frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f T) + 2\pi f \cos(2\pi f T) \right) - 2\pi f \right] - \\ & - \frac{4T}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \end{aligned} \right\}$$

(2.50),

$$S_i^{out-of-quad}(f) = \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 I_s^2 \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( T^2 - \frac{\tau_{coh}^2}{8} \left( \exp\left(-\frac{4T}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) - \frac{\tau_{coh}}{2} T \right) + \\ & + \frac{1}{\pi f \tau_{coh}} \frac{4}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^4}{\left(4 + (2\pi f \tau_{coh})^2\right)^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f T) - 2\pi f \cos(2\pi f T) \right) + \right. \\ & \left. + 2\pi f \right] + \\ & + \frac{4}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^4}{\left(4 + (2\pi f \tau_{coh})^2\right)^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f T) + 2\pi f \sin(2\pi f T) \right) + \frac{2}{\tau_{coh}} \right] - \\ & - \frac{4T}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \end{aligned} \right\}$$

(2.51).

Полученные выражения (2.50) и (2.51), представляют собой СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ, для квадратурного и вне квадратурного режимов его работы. Здесь необходимо помнить об упрощении, которое было сделано при выводе этих выражений, связанное с тем, что положения рабочих точек всех элементарных интерферометров были приняты

одинаковыми. Выражения (2.50) и (2.51), таким образом, характеризуют минимальную и максимальную СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ.

Результирующая усреднённая по ансамблю  $\{\rho\}$  СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ определяется (2.37): половиной от суммы (2.50) и (2.51), и равна:

$$S_i(f) = \frac{2(I_{scat}^{mean})^2}{T^2} \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \times \left[ \frac{T^2}{2} + \frac{4}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^4}{(4 + (2\pi f \tau_{coh})^2)^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f T) + 2\pi f \sin(2\pi f T) \right) + \frac{2}{\tau_{coh}} \right] + \left( 2\pi f - \frac{2}{\pi f \tau_{coh}^2} \right) \frac{\tau_{coh}^4}{(4 + (2\pi f \tau_{coh})^2)^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( \frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f T) + 2\pi f \cos(2\pi f T) \right) - 2\pi f \right] - \frac{4T}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \right] \quad (2.52),$$

где  $I_{scat}^{mean} = I_s \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 T$  – средняя по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивность рассеянного излучения, найденная в первой главе, см. пункт 1.3.

Усредненную СПМШ интенсивности удобно нормировать на квадрат интенсивности рассеянного излучения, усредненной по ансамблю независимых рассеивающих участков:  $(I_{scat}^{mean})^2$ , в этом случае нормированная усредненная СПМШ интенсивности не будет зависеть от конкретных параметров рассеивающей среды и мощности заводимого в нее излучения. В результате можно получить, так называемый относительный шум интенсивности relative intensity noise (RIN) в какой – либо спектральной полосе  $\Delta f$ , согласно определению [76]:

$$RIN = \frac{2S_I(f)\Delta f}{(I_{scat}^{mean})^2} = \frac{(S_I^{quad}(f) + S_I^{out-of-quad}(f))\Delta f}{(I_{scat}^{mean})^2} \quad (2.53).$$

На рисунке 2.5 и рисунке 2.6. показаны теоретические графики нормированных усредненных СПМШ интенсивности рассеянного излучения на выходе одноканального ВИРИ в логарифмическом масштабе. Тонкими линиями показаны квадратурная (2.50) (верхняя) и вне квадратурная (2.51) (нижняя) кривые, толстыми линиями показаны результирующие усреднённые СПМШ интенсивности (2.52), равные полусумме квадратурной и вне квадратурной компонент спектральной характеристики, или усредненные по всем положениям рабочих точек интерферометров, рисунок 2.4 соответствует случаю лазера с высокой степенью когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.003$ , рисунок 2.5 соответствует случаю лазера с низкой степенью когерентности:  $T/\tau_{coh} = .0.63$ . Для лазера с высокой степенью когерентности средний уровень шума интенсивности ниже, чем для лазера с низкой степенью когерентности.

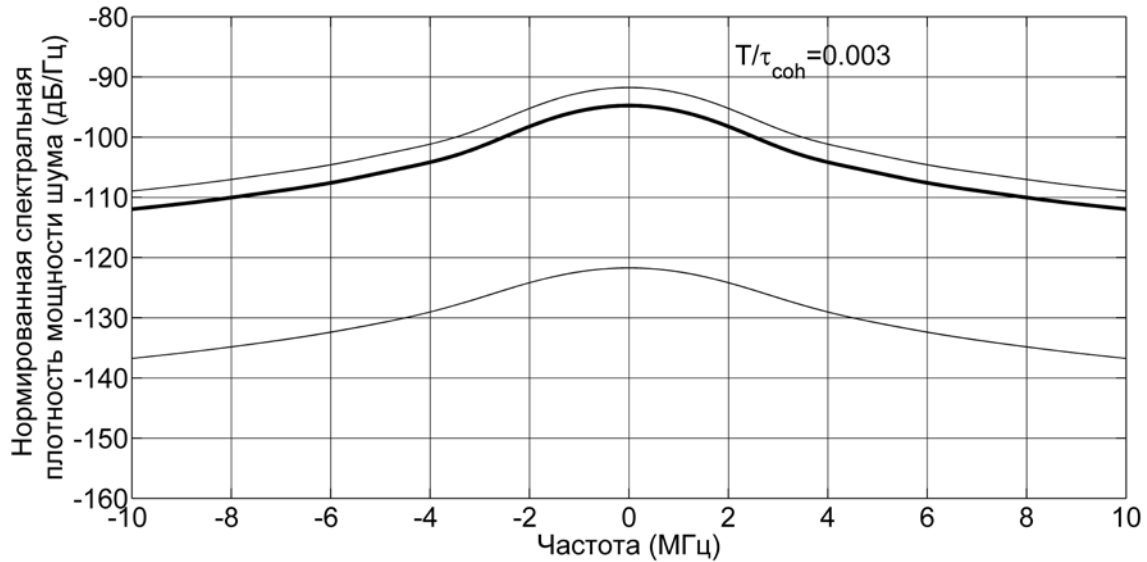


Рисунок 2.4 – Нормированная усреднённая СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ для лазера с высокой степенью когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.003$  – жирная линия. СПМШ интенсивности в квадратурном режиме работы интерферометра – тонкая линия сверху, СПМШ интенсивности во вне квадратурном режиме работы интерферометра – тонкая линия снизу.



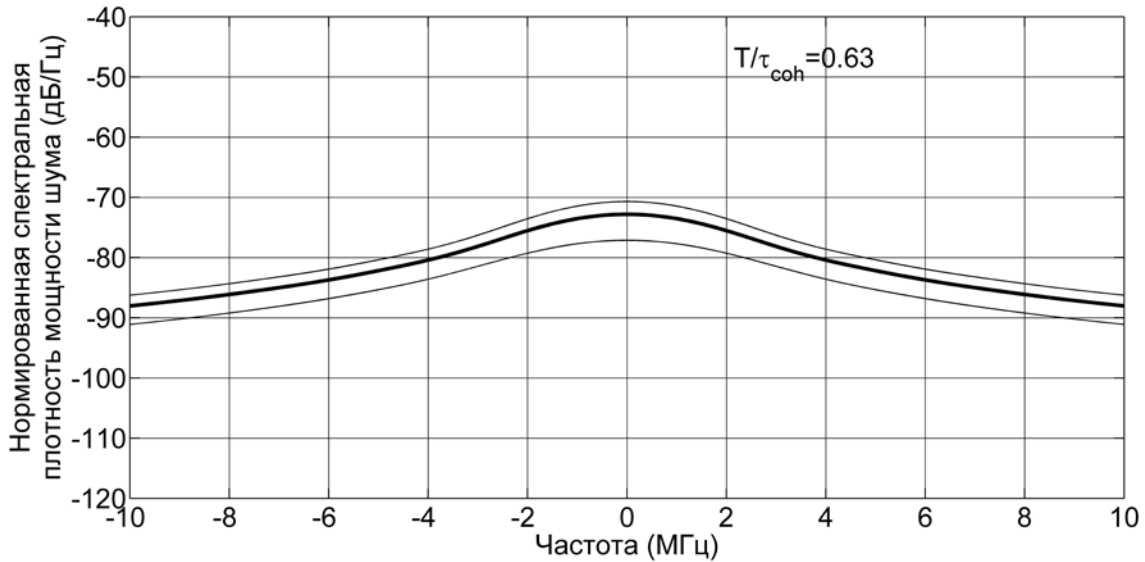


Рисунок 2.5 – Нормированная усредненная СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ для лазера с низкой степенью когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.63$  – жирная линия. СПМШ интенсивности в квадратурном режиме работы интерферометра – тонкая линия сверху, СПМШ интенсивности во вне квадратурном режиме работы интерферометра – тонкая линия снизу.

Тонкие линии на рисунке 2.4. и рисунке 2.5. отображают экстремальные значения усредненной СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ. Данные теоретические зависимости объясняют наблюдаемые в эксперименте изменения уровня шумов интенсивности на выходе интерферометра: СПМШ интенсивности изменяется между экстремальными значениями, изображенными на графиках: рисунок 2.4. и рисунок 2.5. тонкими линиями, имея при этом среднее значение, изображенное жирной линией на графиках. Изменение мощности шума интенсивности происходит из – за различных сочетаний рабочих точек элементарных интерферометров Майкельсона, образующих весь рассеивающий участок одноканального ВИРИ.

На рисунке 2.6 и рисунке 2.7. изображены, соответственно, в логарифмическом масштабе нормированные усредненные СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ (2.52) при различных отношениях максимальной задержки ко времени когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.003$ , см. рисунок 2.6 и  $T/\tau_{coh} = 0.63$ , см. рисунок 2.7. Одновременно тонкими линиями на графиках

изображены нормированные СПМШ интенсивности на выходе интерферометров Маха – Цендера, или Майкельсона, усредненные по всем положениям рабочих точек, имеющие те же соотношения максимальной задержки и длины когерентности. Усреднение по всем положениям рабочих точек для интерферометров Маха – Цендера или Майкельсона означает, что усредненный спектр представляет собой половину от суммы спектров в квадратурном (2.46) и вне квадратурном (2.47) режимах его работы.

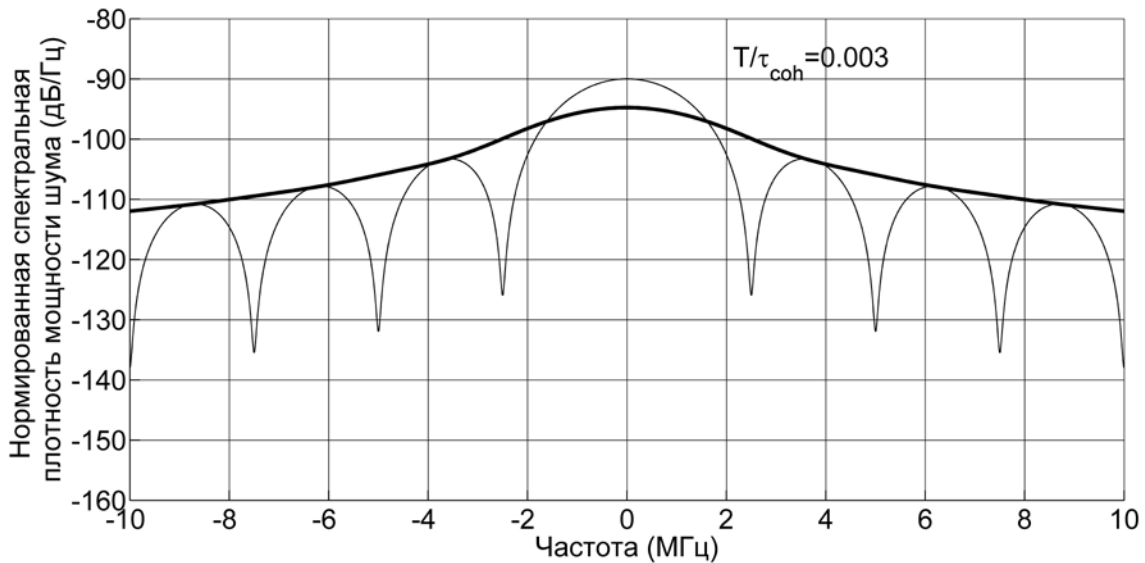


Рисунок 2.6 – Нормированная усредненная СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ для лазера с высокой степенью когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.003$  – жирная линия. Нормированная СПМШ интенсивности на выходе интерферометра Маха – Цендера или Майкельсона, усредненная по всем положениям рабочей точки, при отношении максимальной задержки ко времени когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.003$  – тонкая линия.

Из графиков видно, что нормированная средняя мощность шума интенсивности на выходе одноканального ВИРИ в области низких частот ниже, чем на выходе интерферометре Маха – Цендера или Майкельсона, при одном и том же значении максимальной задержки интерферирующих полей. Этого следовало ожидать, так как было сказано ранее, максимальный вклад в общую спектральную характеристику дают элементарные интерферометры, образованные центрами рассеяния, расположенными друг к другу на минимальном расстоянии, см. рисунок 2.3.

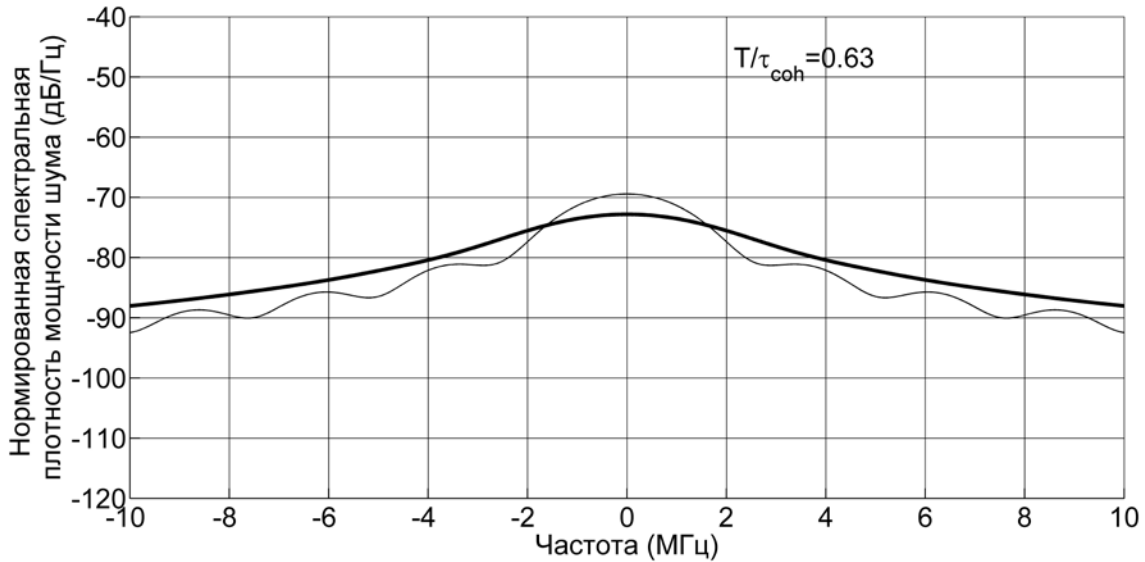


Рисунок 2.7 – Нормированная усредненная СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ для лазера с низкой степенью когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.63$  – жирная линия. Нормированная СПМШ интенсивности на выходе интерферометра Маха – Цендера или Майкельсона, усредненная по всем положениям рабочей точки, при отношении максимальной задержки ко времени когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.63$  – тонкая линия.

Выражение для усредненной СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ (2.52), полученное выше, справедливо для полностью поляризованного рассеянного излучения, учет частичной поляризованности, в силу (2.3) и (2.23), приведет к появлению дополнительного множителя  $(1 + P^2)/2$ . Для частично поляризованного рассеянного излучения, со степенью поляризации  $P$  СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ, усредненная по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , имеет вид:

$$S_I(f)_{partpol} = \frac{1 + P^2}{2} S_I(f) \quad (2.54),$$

## 2.2. Усредненная СПМШ интенсивности на выходе двухканального ВИРИ

Рассмотренная в предыдущем пункте интерферометрическая схема, представляющая собой протяженный отрезок рассеивающей среды, см. рисунок

2.1, является базовой одноканальной схемой ВИРИ. Другой важной схемой ВИРИ является схема с использованием опорного излучения, в качестве которого может выступать излучение используемого лазерного источника или излучение, рассеянное другим участком. В данном пункте будет рассмотрена схема двухканального ВИРИ, где в качестве опорного излучения выступает излучение, рассеянное другим эквивалентным рассеивающим участком. Такая схема может быть применена для построения датчика внешних фазовых воздействий на оптическое волокно, с возможностью демодуляции рассеянного излучения, и восстановления фазовых воздействий на волокно, см. четвертую главу. В этом случае, излучение, рассеянное первым участком, является сигнальным, то есть содержит информацию о внешнем воздействии на волокно, излучение, рассеянное вторым участком, является опорным. Рассматриваемая схема двухканального ВИРИ изображена на рисунке 2.8.

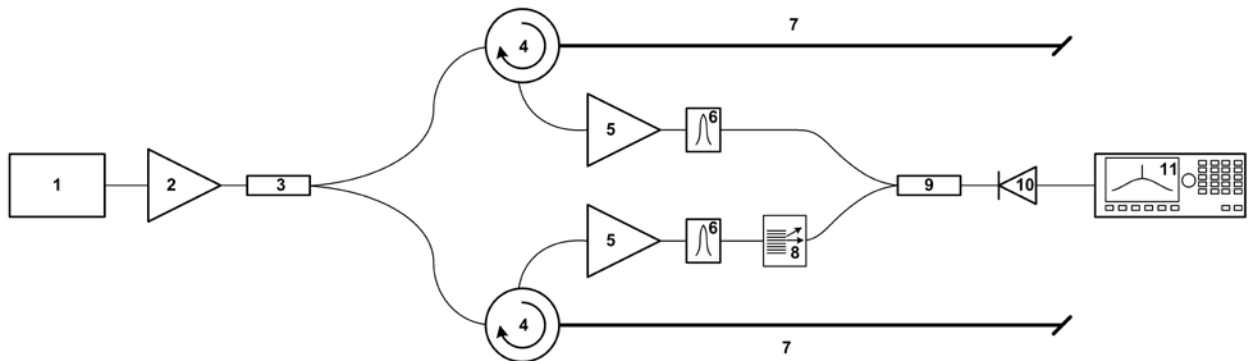


Рисунок 2.8 – Схема двухканального ВИРИ. 1 – полупроводниковый лазер с распределенной обратной связью, 2, 5 – эрбиевый волоконный усилитель, 3, 9 – оптический разветвитель, 4 – оптический циркулятор, 6 – оптический фильтр (100ГГц), 7 – отрезок оптического волокна SMF – 28, 8 – акустооптический модулятор, 10 – широкополосный фотоприемник, 11 – радиочастотный анализатор спектра.

Будем считать, что два рассеивающих участка интерферометра имеют одинаковую длину  $L$ . Излучения, рассеянные участками выводятся из них оптическими циркуляторами и интерферируют в оптическом ответвителе. Акустооптический модулятор, установленный в одном из плеч интерферометра, сдвигает оптическую частоту, на некоторую известную величину  $f_0$ , сдвигка

частоты излучения позволяет произвести наблюдение спектральной картины вблизи частоты сдвига. Рассмотрим поля излучений, рассеянных каждым рассеивающим участком, предполагая малое затухание на этих участках, а также считая, предварительно, рассеянное излучение полностью поляризованным.

Запишем подобно первой главе, комплексные амплитуды полей рассеянных излучений для каждого из участков:

$$A_{scat1}^{\rho}(t) = \int_0^L A_s \left( t - 2z/v_{gr} - L_0/v_{gr} \right) \exp(-2ikz - ikL_0) \cdot \rho_1(z) dz \quad (2.55),$$

$$A_{scat2}^{\rho}(t) = \exp(2\pi if_0 t) \int_0^L A_s \left( t - 2z/v_{gr} \right) \exp(-2ikz) \cdot \rho_2(z) dz \quad (2.56),$$

где индекс  $\rho$  – указывает, как обычно, на то, что поле рассеянного излучения записано для конкретной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , индексы «1» и «2» указывают на принадлежность к первому или второму рассеивающим участкам.  $L_0$  – расстояние, которое нужно дополнительно пройти излучению, рассеянному одним из участков, обозначим соответствующую временную задержку через  $T_0 = L_0/v_{gr}$ , без ограничения общности считая, что поле источника вводится в оба рассеивающих участка одновременно. Будем называть схему двухканального ВИРИ *симметричной*, если дополнительная задержка для интерферирующих полей рассеянного излучения  $L_0 = 0$ , в противном случае, когда  $L_0 \neq 0$ , будем называть схему двухканального ВИРИ *асимметричной*. Мгновенная интенсивность, рассеянного излучения на выходе двухканального ВИРИ равна:

$$\begin{aligned} \left( I_{scat12}^{\rho}(t) \right)_{inst} &= \left( A_{scat1}^{\rho}(t) + A_{scat2}^{\rho}(t) \right) \times \left( A_{scat1}^{\rho}(t) + A_{scat2}^{\rho}(t) \right)^* = \\ &= \underbrace{A_{scat1}^{\rho}(t) \cdot \left( A_{scat1}^{\rho}(t) \right)^*}_1 + \underbrace{A_{scat2}^{\rho}(t) \cdot \left( A_{scat1}^{\rho}(t) \right)^*}_2 + \\ &+ \underbrace{A_{scat1}^{\rho}(t) \cdot \left( A_{scat2}^{\rho}(t) \right)^*}_3 + \underbrace{A_{scat2}^{\rho}(t) \cdot \left( A_{scat2}^{\rho}(t) \right)^*}_4 \end{aligned} \quad (2.57),$$

где для удобства дальнейших выкладок, члены пронумерованы 1,2,3,4. Как и ранее, данная мгновенная интенсивность рассеянного излучения справедлива, для

какой – либо конкретной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ . Автокорреляционная функция мгновенной интенсивности рассеянного излучения двухканального ВИРИ, для какой – либо реализации определяется согласно (2.4) и равна:

$$R_{I_{12}}^{\rho}(t, t + \tau) = E_T \left\langle \left( I_{scat12}^{\rho}(t) \right)_{inst} \left( I_{scat12}^{\rho}(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle \quad (2.58).$$

Первая мгновенная интенсивность в (2.58) определяется (2.57), вторая равна:

$$\begin{aligned} \left( I_{scat12}^{\rho}(t + \tau) \right)_{inst} &= \left( A_{scat1}^{\rho}(t + \tau) + A_{scat2}^{\rho}(t + \tau) \right) \times \left( A_{scat1}^{\rho}(t + \tau) + A_{scat2}^{\rho}(t + \tau) \right)^* = \\ &= \underbrace{A_{scat1}^{\rho}(t + \tau) \cdot \left( A_{scat1}^{\rho}(t + \tau) \right)^*}_{1'} + \underbrace{A_{scat2}^{\rho}(t + \tau) \cdot \left( A_{scat1}^{\rho}(t + \tau) \right)^*}_{2'} + \\ &+ \underbrace{A_{scat1}^{\rho}(t + \tau) \cdot \left( A_{scat2}^{\rho}(t + \tau) \right)^*}_{3'} + \underbrace{A_{scat2}^{\rho}(t + \tau) \cdot \left( A_{scat2}^{\rho}(t + \tau) \right)^*}_{4'} \end{aligned} \quad (2.59),$$

где члены также пронумерованы  $1', 2', 3', 4'$ . Как и ранее будет рассматривать автокорреляционную функцию мгновенной интенсивности, усредненную по всем возможным реализациям распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ :

$$R_{I_{12}}(t, t + \tau) = E_{\rho} \left\langle R_{I_{12}}^{\rho}(t, t + \tau) \right\rangle \quad (2.60).$$

Данная автокорреляционная функция имеет смысл в силу того, что под воздействием окружающей среды статистические распределения центров в рассеивающих средах участков ВИРИ плавно изменяются, при этом изменяется и мощность шума на выходе интерферометра, а для практических целей построения датчика внешних воздействий интересен средний уровень шума на выходе интерферометра. В силу того, что случайные флуктуации поля источника излучения и случайные распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  являются некоррелированными между собой, два усреднения по ансамблю и по времени можно производить независимо, меняя при этом порядок выполнения этих операций. После перемножения (2.57) и (2.59) получаем 16 членов, из которых только 6 являются ненулевыми, в силу (2.7), а также в силу:

$$E_{\rho} \left\langle \rho_1(z_1) \rho_2^*(z_2) \right\rangle \equiv 0 \quad (2.61),$$

последнее выражение означает некоррелированность по ансамблю коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  первого и второго участков ВИРИ. Таким образом, ненулевые члены усреднённой по ансамблю корреляционной функции (2.60) равны:

$$R_{I12}(t, t + \tau)|(1-1') = E_\rho \left\langle E_T \left\langle A_{scat1}^\rho(t) \cdot (A_{scat1}^\rho(t))^* \cdot A_{scat1}^\rho(t + \tau) \cdot (A_{scat1}^\rho(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left| A_s(t - 2z_1/v_{gr} - T_0) \right|^2 \left| A_s(t + \tau - 2z_2/v_{gr} - T_0) \right|^2 dz_1 dz_2 + \quad (2.62)$$

$$+ \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr} - T_0) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr} - T_0) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times A_s(t + \tau - 2z_2/v_{gr} - T_0) A_s^*(t + \tau - 2z_1/v_{gr} - T_0) \right\rangle \right\rangle dz_1 dz_2$$

$$R_{I12}(t, t + \tau)|(1-4') = E_\rho \left\langle E_T \left\langle A_{scat1}^\rho(t) \cdot (A_{scat1}^\rho(t))^* \cdot A_{scat2}^\rho(t + \tau) \cdot (A_{scat2}^\rho(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle =$$

$$\rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left| A_s(t - 2z_1/v_{gr} - T_0) \right|^2 \left| A_s(t - 2z_2/v_{gr} + \tau) \right|^2 dz_1 dz_2 \quad (2.63),$$

$$R_{I12}(t, t + \tau)|(2-3') = E_\rho \left\langle E_T \left\langle A_{scat2}^\rho(t) \cdot (A_{scat1}^\rho(t))^* \cdot A_{scat1}^\rho(t + \tau) \cdot (A_{scat2}^\rho(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \exp(-2\pi i f_0 \tau) \times \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr} - T_0) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times A_s(t - 2z_2/v_{gr} + \tau - T_0) A_s^*(t - 2z_1/v_{gr} + \tau) \right\rangle \right\rangle dz_1 dz_2 \quad (2.64),$$

$$R_{I12}(t, t + \tau)|(3-2') = E_\rho \left\langle E_T \left\langle A_{scat1}^\rho(t) \cdot (A_{scat2}^\rho(t))^* \cdot A_{scat2}^\rho(t + \tau) \cdot (A_{scat1}^\rho(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \exp(2\pi i f_0 \tau) \times \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr} - T_0) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times A_s(t - 2z_2/v_{gr} + \tau) A_s^*(t - 2z_1/v_{gr} + \tau - T_0) \right\rangle \right\rangle dz_1 dz_2 \quad (2.65),$$

$$R_{I12}(t, t + \tau)|(4-1') = E_\rho \left\langle E_T \left\langle A_{scat2}^\rho(t) \cdot (A_{scat2}^\rho(t))^* \cdot A_{scat1}^\rho(t + \tau) \cdot (A_{scat1}^\rho(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left| A_s(t - 2z_1/v_{gr}) \right|^2 \left| A_s(t - 2z_2/v_{gr} - T_0 + \tau) \right|^2 dz_1 dz_2 \quad (2.66),$$

$$\begin{aligned}
R_{I12}(t, t + \tau) | (4 - 4') &= E_{\rho} \left\langle E_T \left\langle A_{scat2}^{\rho}(t) \cdot (A_{scat2}^{\rho}(t))^* \cdot A_{scat2}^{\rho}(t + \tau) \cdot (A_{scat2}^{\rho}(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle = \\
&= \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L |A_s(t - 2z_1/v_{gr})|^2 |A_s(t + \tau - 2z_2/v_{gr})|^2 dz_1 dz_2 + \\
&+ \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L E_T \left\langle \begin{aligned} &A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \times \\ &\times A_s(t + \tau - 2z_2/v_{gr}) A_s^*(t + \tau - 2z_1/v_{gr}) \end{aligned} \right\rangle dz_1 dz_2
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Результирующая усредненная автокорреляционная функция мгновенной интенсивности для двухканального ВИРИ (2.60) представляет собой сумму 6 ненулевых членов:

$$\begin{aligned}
R_{I12}(t, t + \tau) &= \\
&= R_{I12}(t, t + \tau) | (1 - 1') + R_{I12}(t, t + \tau) | (1 - 4') + R_{I12}(t, t + \tau) | (2 - 3') + \\
&+ R_{I12}(t, t + \tau) | (3 - 2') + R_{I12}(t, t + \tau) | (4 - 1') + R_{I12}(t, t + \tau) | (4 - 4')
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Выражения (2.62) и (2.67) после преобразования Фурье соответствуют усредненным по ансамблю  $\{\rho\}$  СПМШ интенсивности излучения, рассеянного *первым и вторым участками двухканального ВИРИ по отдельности*, спектры этих шумов сосредоточены вблизи нулевой частоты. Эти члены автокорреляционной функции аналогичны автокорреляционной функции для одноканального ВИРИ (2.8), полученной ранее. Выражения (2.63) и (2.66) представляют собой произведения средних по ансамблю  $\{\rho\}$  значений интенсивностей излучений, рассеянных *первым и вторым участками двухканального ВИРИ*. Выражения (2.64) и (2.65) после преобразования Фурье представляют собой *СПМШ интенсивности, усредненные по ансамблю  $\{\rho\}$* , которые образуются при интерференции излучений, рассеянных *первым и вторым участками двухканального ВИРИ*, эти усредненные СПМШ смещены на частоту  $f_0$  в сторону положительных и отрицательных частот.

Рассмотрим выражение (2.65), преобразование Фурье которого дает среднюю СПМШ интенсивности, смещенную в сторону положительных частот. Рассмотрим его подобно выражению (2.8), для этого аналогично (2.9) обозначим:



$$f(t, \tau, \tau'_1, \tau'_2) | (3-2') = E_T \langle A_s^*(t - \tau'_1) A_s(t - \tau'_2) A_s^*(t + \tau - \tau'_2) A_s(t + \tau - \tau'_1) \rangle \quad (2.69),$$

где были сделаны замены переменных, аналогичные (2.10):

$$\tau'_1 = 2z_2/v_{gr}, \quad \tau'_2 = 2z_1/v_{gr} + T_0 \quad (2.70).$$

Далее подобно (2.16) запишем:

$$f(t, \tau, \tau'_1, \tau'_2) | (3-2') = \begin{cases} I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) & |\tau| \leq |\tau'_2 - \tau'_1| \\ I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau'_2 - \tau'_1|)\right) & |\tau| > |\tau'_2 - \tau'_1| \end{cases} \quad (2.71).$$

Используя, как и ранее прямоугольную функцию:

$$\Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau'_2 - \tau'_1|}\right) = \begin{cases} 1 & |\tau| \leq |\tau'_2 - \tau'_1| \\ 0 & |\tau| > |\tau'_2 - \tau'_1| \end{cases} \quad (2.72),$$

запишем:

$$R_{112}(t, t + \tau) | (3-2') = \exp(2\pi i f_0 \tau) \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \times \left[ \int_0^{T+T_0} \int_{T_0}^{T+T_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau'_2 - \tau'_1|}\right) d\tau'_1 d\tau'_2 + \int_0^{T+T_0} \int_{T_0}^{T+T_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau'_2 - \tau'_1|)\right) \left(1 - \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau'_2 - \tau'_1|}\right)\right) d\tau'_1 d\tau'_2 \right] \quad (2.73)$$

Аналогично, рассмотрим выражение (2.64), подобно (2.69) обозначим:

$$f(t, \tau, \tau''_1, \tau''_2) | (2-3') = E_T \langle A_s^*(t - \tau''_1) A_s(t - \tau''_2) A_s^*(t + \tau - \tau''_2) A_s(t + \tau - \tau''_1) \rangle \quad (2.74),$$

где

$$\tau''_1 = 2z_2/v_{gr} + T_0, \quad \tau''_2 = 2z_1/v_{gr} \quad (2.75),$$

подобно (2.16) запишем:

$$f(t, \tau, \tau''_1, \tau''_2) | (2-3') = \begin{cases} I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) & |\tau| \leq |\tau''_2 - \tau''_1| \\ I_s^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau''_2 - \tau''_1|)\right) & |\tau| > |\tau''_2 - \tau''_1| \end{cases} \quad (2.76).$$

Используя прямоугольную функцию:

$$\Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2'' - \tau_1''|}\right) = \begin{cases} 1 & |\tau| \leq |\tau_2'' - \tau_1''| \\ 0 & |\tau| > |\tau_2'' - \tau_1''| \end{cases} \quad (2.77),$$

запишем:

$$\begin{aligned} R_{I12}(t, t + \tau) | (2 - 3') = \\ = \exp(-2\pi i f_0 \tau) \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \times \left[ \int_{T_0}^{T+T_0} \int_0^T \exp\left(-\frac{1}{\tau_{\text{коз}}}(2|\tau|)\right) \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2'' - \tau_1''|}\right) d\tau_1'' d\tau_2'' + \right. \\ \left. + \int_{T_0}^{T+T_0} \int_0^T \exp\left(-\frac{1}{\tau_{\text{коз}}}(2|\tau_2'' - \tau_1''|)\right) \left(1 - \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2'' - \tau_1''|}\right)\right) d\tau_1'' d\tau_2'' \right] \end{aligned} \quad (2.78).$$

Выражение (2.73) аналогично выражению (2.78) в силу того, что интегралы симметричны относительно переменных интегрирования, однако, эти выражения имеют дополнительные фазовые смещения, отличающиеся знаком.

Для нахождения усредненной СПМШ интенсивности удобнее, как и ранее пользоваться автоковариационной функцией мгновенной интенсивности рассеянного излучения, усредненной по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , которая не содержит постоянных составляющих, приводящих к появлению  $\delta$  – функции в спектральной характеристике:

$$\begin{aligned} C_{I12}(t, t + \tau) = E_\rho \langle C_{I12}^\rho(t, t + \tau) \rangle = \\ = R_{I1-2}(t, t + \tau) - E_\rho \langle E_T \langle (I_{\text{scat}12}^\rho(t))_{\text{inst}} \rangle E_T \langle (I_{\text{scat}12}^\rho(t + \tau))_{\text{inst}} \rangle \rangle \end{aligned} \quad (2.79).$$

Рассчитаем произведение интенсивностей рассеянного излучения, которое усреднено по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  :

$$\bar{I}_{I12}(t, t + \tau) = E_\rho \langle E_T \langle (I_{\text{scat}12}^\rho(t))_{\text{inst}} \rangle E_T \langle (I_{\text{scat}12}^\rho(t + \tau))_{\text{inst}} \rangle \rangle \quad (2.80).$$

После перемножения средних по ансамблю значений (2.57) и (2.59) получаем 16 членов, из которых только 6 являются ненулевыми, в силу (2.7), а также (2.61), усреднение по времени и по ансамблю можно производить независимо, как было

упомянуто раньше. Ненулевые члены усредненного по ансамблю произведения интенсивностей (2.80), соответственно, равны:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{I12}(t, t + \tau)|(1-1') &= E_\rho \left\langle E_T \left\langle A_{scat1}^\rho(t) \cdot (A_{scat1}^\rho(t))^* \right\rangle E_T \left\langle A_{scat1}^\rho(t + \tau) \cdot (A_{scat1}^\rho(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle = \\ &= \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left| A_s(t - 2z_1/v_{gr} - T_0) \right|^2 \left| A_s(t + \tau - 2z_2/v_{gr} - T_0) \right|^2 dz_1 dz_2 + \\ &+ \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left( E_T \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr} - T_0) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr} - T_0) \right\rangle \times \right. \\ &\left. \times E_T \left\langle A_s(t + \tau - 2z_2/v_{gr} - T_0) A_s^*(t + \tau - 2z_1/v_{gr} - T_0) \right\rangle \right) dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (2.81),$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{I12}(t, t + \tau)|(1-4') &= E_\rho \left\langle E_T \left\langle A_{scat1}^\rho(t) \cdot (A_{scat1}^\rho(t))^* \right\rangle E_T \left\langle A_{scat2}^\rho(t + \tau) \cdot (A_{scat2}^\rho(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle = \\ &= \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left| A_s(t - 2z_1/v_{gr} - T_0) \right|^2 \left| A_s(t - 2z_2/v_{gr} + \tau) \right|^2 dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (2.82),$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{I12}(t, t + \tau)|(2-3') &= E_\rho \left\langle E_T \left\langle A_{scat2}^\rho(t) \cdot (A_{scat1}^\rho(t))^* \right\rangle E_T \left\langle A_{scat1}^\rho(t + \tau) \cdot (A_{scat2}^\rho(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle = \\ &= \exp(-2\pi i f_0 \tau) \times \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left( E_T \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr} - T_0) \right\rangle \times \right. \\ &\left. \times E_T \left\langle A_s(t - 2z_2/v_{gr} + \tau - T_0) A_s^*(t - 2z_1/v_{gr} + \tau) \right\rangle \right) dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (2.83),$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{I12}(t, t + \tau)|(3-2') &= E_\rho \left\langle E_T \left\langle A_{scat1}^\rho(t) \cdot (A_{scat2}^\rho(t))^* \right\rangle E_T \left\langle A_{scat2}^\rho(t + \tau) \cdot (A_{scat1}^\rho(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle = \\ &= \exp(2\pi i f_0 \tau) \times \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left( E_T \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr} - T_0) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \right\rangle \times \right. \\ &\left. \times E_T \left\langle A_s(t - 2z_2/v_{gr} + \tau) A_s^*(t - 2z_1/v_{gr} + \tau - T_0) \right\rangle \right) dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (2.84),$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{I12}(t, t + \tau)|(4-1') &= E_\rho \left\langle E_T \left\langle A_{scat2}^\rho(t) \cdot (A_{scat2}^\rho(t))^* \right\rangle E_T \left\langle A_{scat1}^\rho(t + \tau) \cdot (A_{scat1}^\rho(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle = \\ &= \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left| A_s(t - 2z_1/v_{gr}) \right|^2 \left| A_s(t - 2z_2/v_{gr} - T_0 + \tau) \right|^2 dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (2.85),$$

$$\begin{aligned}
\bar{I}_{I1-2}(t, t + \tau) | (4 - 4') &= E_{\rho} \left\langle E_T \left\langle A_{scat2}^{\rho}(t) \cdot (A_{scat2}^{\rho}(t))^* \right\rangle E_T \left\langle A_{scat2}^{\rho}(t + \tau) \cdot (A_{scat2}^{\rho}(t + \tau))^* \right\rangle \right\rangle = \\
&= \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left| A_s(t - 2z_1/v_{gr}) \right|^2 \left| A_s(t + \tau - 2z_2/v_{gr}) \right|^2 dz_1 dz_2 + \\
&+ \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L \left( E_T \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \right\rangle \times \right. \\
&\left. \times E_T \left\langle A_s(t + \tau - 2z_2/v_{gr}) A_s^*(t + \tau - 2z_1/v_{gr}) \right\rangle \right) dz_1 dz_2
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Результирующее среднее значение от произведения интенсивностей (2.80) представляет собой сумму 6 ненулевых членов:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_{I12}(t, t + \tau) &= \\
&= \bar{I}_{I12}(t, t + \tau) | (1 - 1') + \bar{I}_{I12}(t, t + \tau) | (1 - 4') + \bar{I}_{I12}(t, t + \tau) | (2 - 3') + \\
&+ \bar{I}_{I12}(t, t + \tau) | (3 - 2') + \bar{I}_{I12}(t, t + \tau) | (4 - 1') + \bar{I}_{I12}(t, t + \tau) | (4 - 4')
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Выражения (2.81) и (2.86) аналогичны выражению (2.27), выражения (2.82) и (2.85) равны, соответственно, (2.63) и (2.66), поэтому, последние исчезают из выражения для автоковариационной функции. Рассмотрим выражение (2.84), которое с учетом замены переменных (2.70) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_{I1-2}(t, t + \tau) | (3 - 2') &= \exp(2\pi i f_0 \tau) \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \times \\
&\times \int_0^T \int_{T_0}^{T+T_0} E_T \left\langle A_s(t - \tau'_2) A_s^*(t - \tau'_1) \right\rangle E_T \left\langle A_s(t - \tau'_1 + \tau) A_s^*(t - \tau'_2 + \tau) \right\rangle d\tau'_1 d\tau'_2 = \\
&= \exp(2\pi i f_0 \tau) \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^T \int_{T_0}^{T+T_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau'_2 - \tau'_1|)\right) d\tau'_1 d\tau'_2
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Аналогично, выражение (2.83) с учетом замены (2.75), преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_{I12}(t, t + \tau) | (2 - 3') &= \exp(-2\pi i f_0 \tau) \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \times \\
&\times \int_{T_0}^{T_0+T} \int_0^T E_T \left\langle A_s(t - \tau''_2) A_s^*(t - \tau''_1) \right\rangle \cdot E_T \left\langle A_s(t - \tau''_1 + \tau) A_s^*(t - \tau''_2 + \tau) \right\rangle d\tau''_1 d\tau''_2 = \\
&= \exp(-2\pi i f_0 \tau) \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \int_{T_0}^{T_0+T} \int_0^T \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau''_2 - \tau''_1|)\right) d\tau''_1 d\tau''_2
\end{aligned} \tag{2.89}$$

С учетом выражений для автокорреляционной функции: (2.62), (2.67), (2.73), (2.78), а также выражений для интенсивностей, усредненных по ансамблю  $\{\rho\}$ : (2.81), (2.86), (2.88), (2.89), получаем итоговое выражение для автоковариационной функции мгновенной интенсивности двухканального ВИРИ с участками одинаковой длины, усредненной по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ :

$$\begin{aligned}
 C_{I_{1-2}}(t, t + \tau) = & \\
 = & \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 \int_0^T \int_0^T I_s^2 \left[ \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_2 - \tau_1|)\right) \right] \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right) d\tau_1 d\tau_2 + \\
 & + \exp(2\pi i f_0 \tau) \times \\
 & \times \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_0^{T+T_0} \int_{T_0}^{T+T_0} I_s^2 \left[ \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau'_2 - \tau'_1|)\right) \right] \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau'_2 - \tau'_1|}\right) d\tau'_1 d\tau'_2 + \quad (2.90) \\
 & + \exp(-2\pi i f_0 \tau) \times \\
 & \times \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 \int_{T_0}^{T+T_0} \int_0^T I_s^2 \left[ \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau''_2 - \tau''_1|)\right) \right] \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau''_2 - \tau''_1|}\right) d\tau''_1 d\tau''_2
 \end{aligned}$$

В выражении (2.90) учтено, что излучение, рассеянное одним из участков задержано по фазе относительно излучения, рассеянного другим участком, время задержки  $T_0$ . Кроме того, излучение, рассеянное одним из участков, сдвинуто по частоте на  $f_0$ . В случае, когда время задержки  $T_0 = 0$  т.е. двухканальный ВИРИ образует симметричную схему, автоковариационная функция представляет собой четыре одинаковых слагаемых. Два из этих слагаемых, после преобразования Фурье, соответствуют средним СПМШ интенсивности излучений, рассеянных каждым из рассеивающих участков по отдельности и сосредоточенных вблизи нулевой частоты, а два других соответствуют средним СПМШ интенсивности, аналогичного вида, но сосредоточенным вблизи частот  $+f_0$  и  $-f_0$ . Настраивая радиочастотный анализатор спектра на наблюдение около частоты  $f_0$ , можно определить вид спектральной характеристики, которая будет аналогична спектральной характеристике для одноканального

ВИРИ (2.52). Таким образом, для симметричной схемы двухканального ВИРИ (с нулевой дополнительной задержкой интерферирующих излучений  $T_0 = 0$ ) с участками одинаковой длины, в силу линейности преобразована Фурье, усредненная СПМШ интенсивности может быть выражена через усредненную СПМШ интенсивности одноканального ВИРИ (2.52):

$$S_{I12}(f) = 2S_I(f) + S_I(f - f_0) + S_I(f + f_0) \quad (2.91).$$

Если дополнительной сдвижки частоты не происходит то, усредненная по ансамблю  $\{\rho\}$  СПМШ интенсивности на выходе симметричной схемы двухканального ВИРИ будет в 4 раза больше, чем на выходе одноканального ВИРИ, этим обстоятельством мы воспользуемся в следующей главе:

$$S_{I12}(f) = 4S_I(f) \quad (2.92),$$

Полученную усредненную СПМШ интенсивности для симметричной схемы двухканального ВИРИ, без дополнительной сдвижки частоты можно также нормировать на квадрат интенсивности рассеянного интерферометром излучения, средней по ансамблю независимых рассеивающих участков  $(I_{scat12}^{mean})^2$ , в этом случае нормированная усредненная СПМШ интенсивности не будет зависеть от конкретных параметров рассеивающей среды и мощности заводимого в нее излучения. Среднее по ансамблю  $\{\rho\}$  значение интенсивности рассеянного излучения согласно (2.57) и отсутствию корреляции между рассеивающими участками (2.61), равно удвоенному среднему значению для интенсивности излучения, рассеянного одним участком:

$$I_{scat12}^{mean} = E_\rho \left\langle E_T \left\langle (I_{scat12}^\rho(t))_{inst} \right\rangle \right\rangle = 2I_{scat}^{mean} = 2 \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 \int_0^T I_s d\tau = v_{gr} \rho_0 \int_0^T I_s d\tau \quad (2.93).$$

Относительный шум интенсивности в этом случае равен:

$$RIN_{1-2} = \frac{2S_{I12}(f)\Delta f}{(I_{scat12}^{mean})^2} = \frac{8S_I(f)\Delta f}{4(I_{scat}^{mean})^2} = RIN \quad (2.94),$$

из этого выражения видно, что относительный шум интенсивности на выходе симметричной схемы двухканального ВИРИ равен относительному шуму

*интенсивности на выходе одноканального ВИРИ. То есть при добавлении еще одного рассеивающего участка, равного по длине первому участку, так что максимальная временная задержка рассеянного излучения в интерферометре равна максимальной задержке рассеянного излучения в каждом из двух его плеч, относительное значение шума на выходе интерферометра не изменяется.*

Рассмотрим случай частично поляризованного рассеянного излучения. Будем для упрощения считать, что степень поляризации у излучений, рассеянных каждым из участков, одинаковая и равна  $P$ . Будем также считать, что состояние поляризации у рассеянных излучений, также одинаково. Тогда суммарное поле излучения, рассеянное двумя участками будет также иметь степень поляризации  $P$ . Мгновенная интенсивность суммарного рассеянного излучения (2.57), таким образом, может быть представлена в качестве суммы двух некоррелированных ортогонально поляризованных интенсивностей, а в записи автокорреляционной или автоковариационной функции появится множитель  $(1 + P^2)/2$ . Средняя СПМШ интенсивности для двухканального ВИРИ с учетом частичной поляризованности рассеянного излучения и равенства состояний и степеней поляризации полей излучений, рассеянных каждым из участков, может быть записана в виде, аналогичном (2.54):

$$S_{I12}(f)_{partpol} = \frac{1 + P^2}{2} S_{I12}(f) \quad (2.95).$$

### **2.3. Предельные значения средней СПМШ интенсивности на выходе ВИРИ**

Рассмотрим два предельных выражения для средней СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ следующих из основного выражения (2.52). Первое предельное выражение характеризует среднюю СПМШ интенсивности в области низких частот, до 200 кГц. Из графических зависимостей нормированных усредненных СПМШ интенсивности, изображенных на рисунке 2.4. и рисунке 2.5. видно, что в области низких частот усредненные СПМШ имеют очень малую кривизну, поэтому для этой области частот справедлива аппроксимация

частотной зависимостью с постоянным значением мощности, то есть белым шумом. Разлагая выражение (2.52) в ряд в окрестности нулевой частоты, и оставляя только члены нулевого порядка, можно получить [А6]:

$$S_I(f)|_{f=0} \approx \frac{2(I_{scat}^{mean})^2}{T^2} \tau_{coh} \left\{ \frac{T^2}{2} + \frac{3\tau_{coh}^2}{4} - T\tau_{coh} - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( \frac{3\tau_{coh}^2}{4} + \frac{T\tau_{coh}}{2} \right) \right\} \quad (2.96).$$

Прямой подстановкой легко убедиться, что на частоте 200 кГц относительная разница между значениями усредненных СПМШ интенсивности, рассчитанных по формулам (2.52) и (2.96), составляет менее 1%. График зависимости (2.96) от длины рассеивающего участка  $L = Tv_{gr}/2$ , на низкой частоте 1 кГц, для лазеров с различными степенями когерентности изображен на рисунке 2.9.

Из рисунка 2.9 видно, что разница между средними СПМШ на выходе одноканального ВИРИ для двух лазеров монотонно уменьшается, достигая нулевого значения при длине рассеивающего участка: 1750 м (рассеяние Мандельштама – Бриллюэна в данном случае не учтено), для рассеивающего участка длиной 50 м, она составляет 21 дБ.

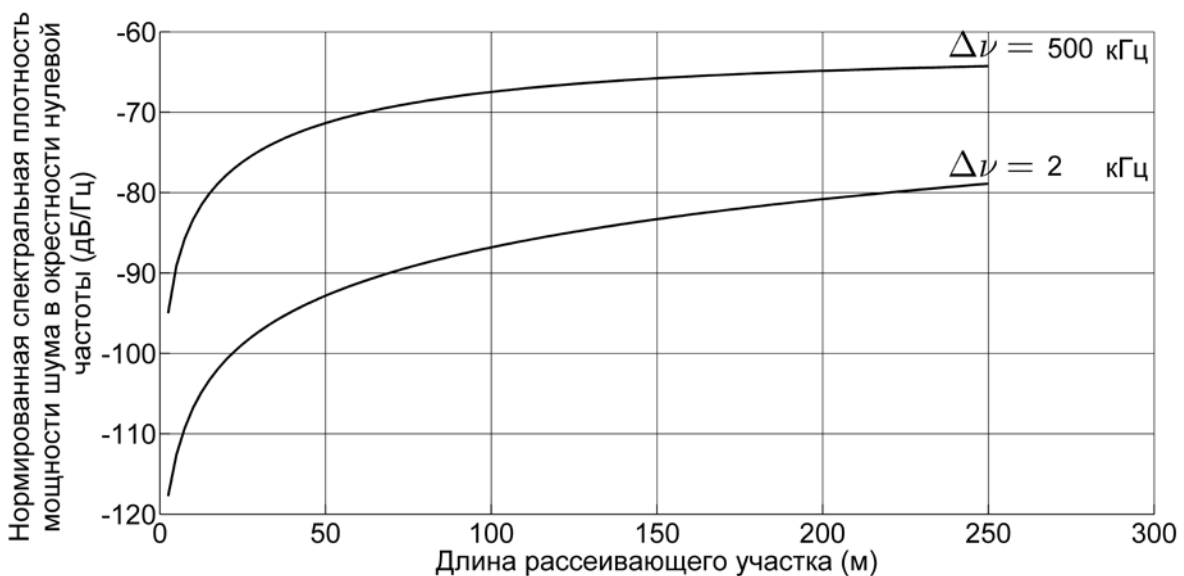


Рисунок 2.9 – Теоретические зависимости усредненной СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ на частоте 1 кГц от длины рассеивающего участка, для лазеров с ширинами спектров:  $\Delta\nu = 2$  кГц и  $\Delta\nu = 500$  кГц. Для участка длиной 50 м средние уровни шумов на выходе интерферометра для двух лазеров, отличаются на 21 дБ.



Второе предельное выражение характеризует среднюю СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ в пределе больших длин рассеивающих участков, много больших длины когерентности источника, то есть при  $T \gg \tau_{coh}$ . В предположении, что на протяжении рассеивающего участка распространяющееся излучение затухает слабо, выражение (2.52), упрощается и принимает вид:

$$S_I(f) \approx (I_{scat}^{mean})^2 \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \quad (2.97),$$

то есть средняя СПМШ интенсивности рассеянного излучения на выходе одноканального ВИРИ имеет лоренцевскую форму с полушириной равной удвоенной спектральной ширине полосы источника:  $2\Delta\nu$ , *данный предельный случай находится в соответствии с результатом работы [35], и справедлив для полупроводниковых источников с невысокими степенями когерентности.*

На рисунке 2.10. и рисунке 2.11. показано изменение усредненной СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ (2.52) при увеличении длины рассеивающего участка, иллюстрирующее предельный переход спектральной характеристики к характеристике, имеющей лоренцевскую форму. Для лазера с высокой степенью когерентности  $\Delta\nu = 2$  кГц: рисунок 2.10. и лазера с низкой степенью когерентности  $\Delta\nu = 500$  кГц: рисунок 2.11., соответственно, длина рассеивающего участка изменяется от 40 м до 320 м. Соответствующие отношения максимальной задержки излучения в одноканальном ВИРИ (время прохождения излучением участка в прямом и в обратном направлениях) и времени когерентности показаны на рисунке, тонкой линией показана лоренцевская спектральная характеристика, соответствующая предельному случаю (2.97).

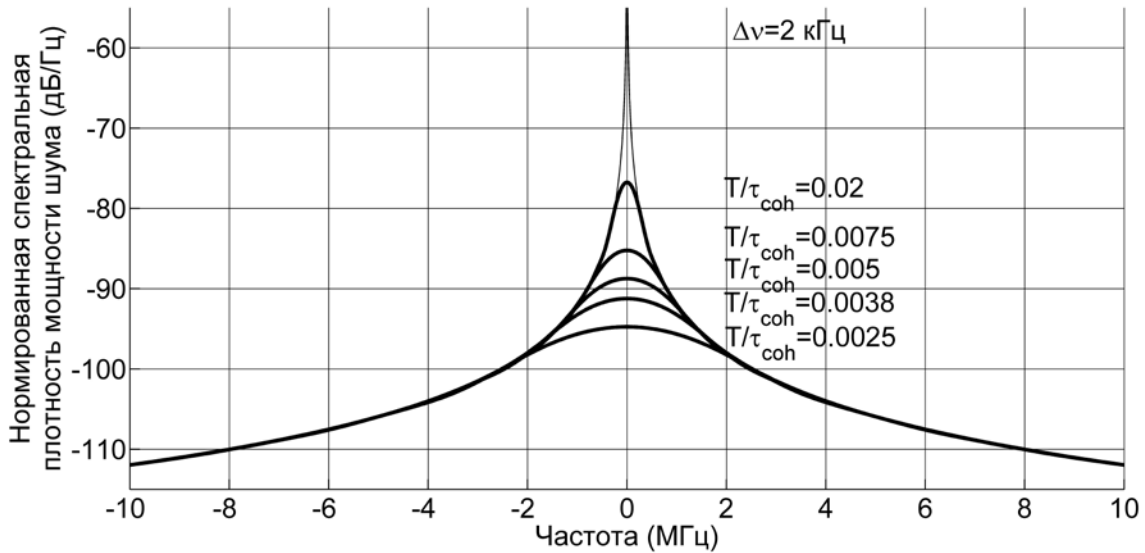


Рисунок 2.10 – Изменение усредненной СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ при увеличении длины рассеивающего участка от 40м до 320м для лазера с высокой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 2 \text{ кГц}$ , тонкой линией показано предельное значение усредненной СПМШ, имеющей лоренцевскую форму.

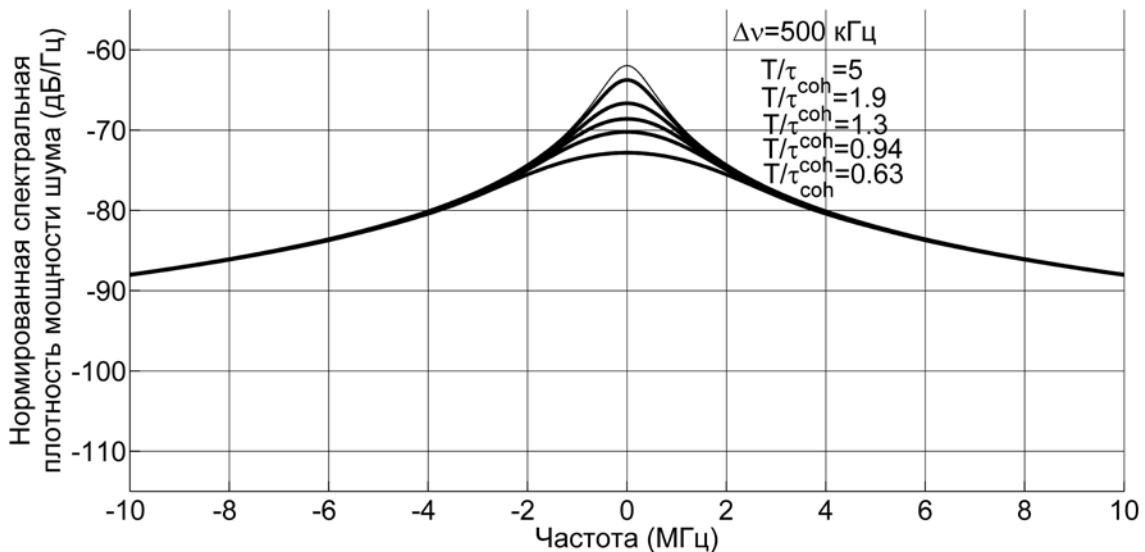


Рисунок 2.11 – Изменение усредненной СПМШ интенсивности на выходе одноканального ВИРИ при увеличении длины рассеивающего участка от 40м до 320м для лазера с низкой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 500 \text{ кГц}$ , тонкой линией показано предельное значение усредненной СПМШ, имеющей лоренцевскую форму.

Из приведенных графиков видно, что при увеличении длины рассеивающего участка, или при уменьшении степени когерентности (уменьшении длины

когерентности) , усредненная СПМШ интенсивности рассеянного излучения на выходе одноканального ВИРИ, приближается к лоренцевской.

#### **2.4. Экспериментальное исследование усредненной СПМШ интенсивности на выходе двухканального ВИРИ**

Экспериментальное исследование спектральных характеристик было произведено с использованием симметричной схемы двухканального ВИРИ. Схема экспериментальной установки соответствует схеме на рисунке 2.8. Излучение полупроводникового лазера, работающего в непрерывном режиме генерации на длине волны в диапазоне 1555 нм, усиливалось эрбиевым волоконным усилителем до мощности 25 дБм. После прохождения через 50% ответвитель, излучения поступали через циркуляторы в два рассеивающих участка, которыми являлись отрезки одномодового волокна SMF – 28. Излучения, рассеянные каждым из участков, выводились теми же циркуляторами и усиливались эрбиевыми волоконными предусилителями. После фильтрации оптическими фильтрами со спектральной полосой 100 ГГц каждый, излучение, распространяющееся по одному из плеч, проходило через акустооптический модулятор, который смещал частоту излучения на величину  $f_0 = 200$  МГц. Интерференционный сигнал, регистрируемый широкополосным фотоприемником, анализировался с помощью радиочастотного анализатора спектра Agilent E4411B. Дополнительные оптические пути, проходимые излучением в двух плечах интерферометра, от выходного ответвителя до входа в рассеивающие участки и от выходов рассеивающих участков до фотоприемника (с учетом длин усиливающего волокна в предусилителях) выбирались равными друг другу, таким образом, исследуемый двухканальный ВИРИ имел симметричную схему. Длины рассеивающих участков могли изменяться от 50 м до 90 м каждый, оставаясь при этом равными друг другу. Для предотвращения отражения излучения от торцов рассеивающих участков, оптическое излучение высвечивалось через узлы малого радиуса на концах отрезков. В работе были

использованы два вида лазеров: лазер с высокой степенью когерентности, со спектральной шириной полосы  $\Delta\nu = 2$  кГц, а также стандартный телекоммуникационный лазер, со спектральной шириной полосы  $\Delta\nu = 500$  кГц. Для нахождения статистически среднего спектра мощности, на анализаторе спектра был выставлен режим усреднения по 500 реализациям, сканирование производилось с разрешением  $\Delta f = 10$  кГц. Теоретические и экспериментальные спектры мощностей, нормированные на среднее значение мощности рассеянного излучения, для двух описанных типов лазеров, при длинах рассеивающих участков 50 м каждый изображены на рисунке 2.12., те же спектры при длинах участков 90 м каждый изображены на рисунке 2.13.

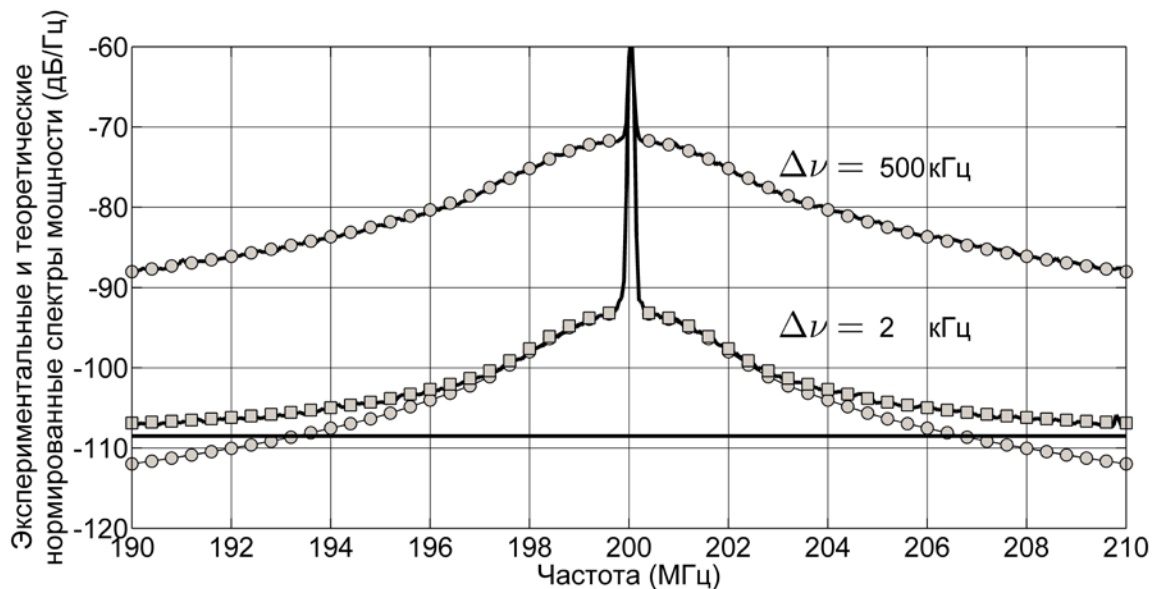


Рисунок 2.12 – Спектры мощности шума интенсивности на выходе двухканального ВИРИ, с длинами рассеивающих участков 50 м каждый для лазеров с ширинами спектров:  $\Delta\nu = 2$  кГц и  $\Delta\nu = 500$  кГц. Сплошные линии – экспериментальные нормированные спектры мощности шума, усредненные по 500 реализациям, разрешение 10 кГц, видео полоса 10 кГц. Круги – теоретические спектры мощности шума. Квадраты – теоретические спектры мощности шума с учетом шумов предусилителей и фотоприемника. Сплошная горизонтальная линия – уровень шума, вызванный влиянием оптических предусилителей и фотоприемника.

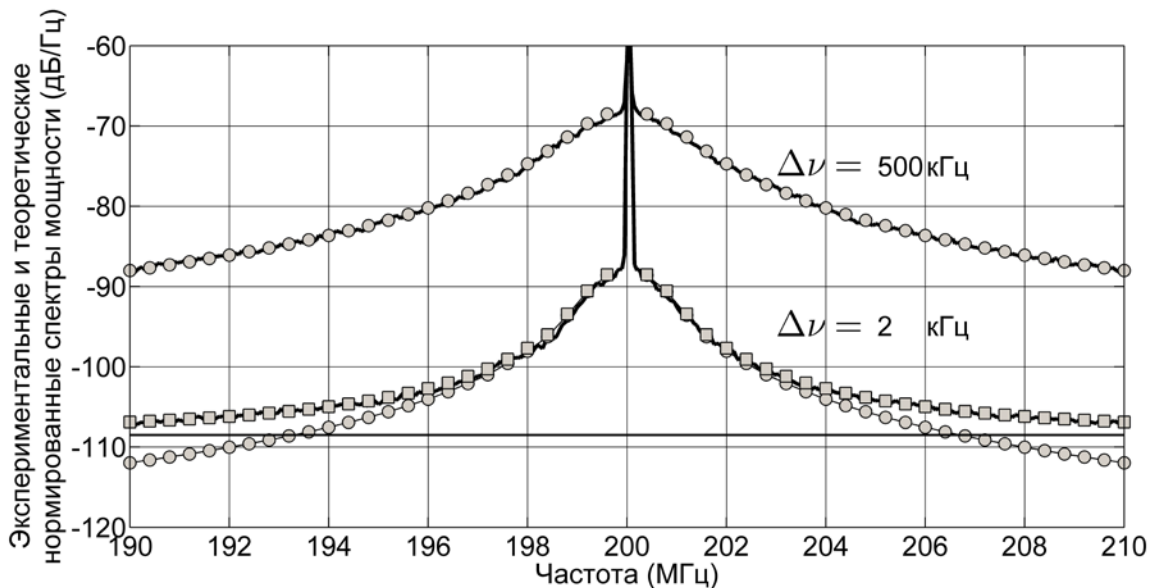


Рисунок 2.13 – Спектры мощности шума интенсивности на выходе ВИРИ, с длинами рассеивающих участков 90 м каждый для лазеров с ширинами спектров:  $\Delta\nu = 2$  кГц и  $\Delta\nu = 500$  кГц. Сплошные линии – экспериментальные нормированные спектры мощности шума, усредненные по 500 реализациям, разрешение 10 кГц, видео полоса 10 кГц. Круги – теоретические спектры мощности шума. Квадраты – теоретические спектры мощности шума с учетом шумов предусилителей и фотоприемника. Сплошная горизонтальная линия – уровень шума, вызванный влиянием оптических предусилителей и фотоприемника.

Видно, что при увеличении длины рассеивающих участков, спектральные характеристики становятся более крутыми. Пики на частоте 200 МГц соответствуют постоянной составляющей автокорреляционной функции. Подобные экспериментальные зависимости наблюдались и в области нулевой частоты, как для одноканального, так и для двухканального ВИРИ: рисунок 2.1, рисунок 2.8. Экспериментальные спектры мощности шума интенсивности рассеянного излучения показаны сплошными линиями, кружками показаны нормированные усредненные СПМШ интенсивности, рассчитанные с помощью (2.52). Для лазера с низкой степенью когерентности, кривые совпадают с хорошей точностью. Однако, для лазера с высокой степенью когерентности хорошее совпадение наблюдается при частотах, отличающихся от центральной менее чем на 2 МГц. Такое поведение, по нашему мнению, является следствием того, что спектральные компоненты на более высоких частотах имеют очень низкую

мощность, поэтому для этих частот становится заметным влияние шума образованного биениями сигнала со спонтанным излучением оптического предусилителя, биениями спонтанного излучения самим с собой, а также дробового и теплового шумов фотоприемника. Все указанные виды шумов имеют равномерное распределение по спектру для полосы частот, в которой производилось измерение [80]. Для нашей экспериментальной установки, общий нормированный уровень этих шумов составил – 109 дБ/Гц, на рисунке 2.12. и рисунке 2.13. он показан горизонтальной линией. Зависимость спектра мощности шума интенсивности рассеянного излучения, с учетом влияния этих шумов показана на рисунке 2.12. и рисунке 2.13. квадратами. Таким образом, при учете дополнительного шума спонтанного излучения и шума фотоприемника, теоретические и экспериментальные спектральные характеристики шума интенсивности на выходе двухканального ВИРИ совпадают с хорошей точностью.

## 2.5. Выводы

Во второй главе теоретически и экспериментально исследованы усредненные СПМШ интенсивности на выходе ВИРИ, вызванные флуктуациями фазы поля лазерного источника. Впервые получено выражение для СПМШ интенсивности на выходе ВИРИ, усредненной по всем возможным реализациям распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ . Усредненная СПМШ интенсивности рассмотрена в зависимости от степени когерентности лазерного источника, длины рассеивающего участка и степени поляризации рассеянного излучения.

Получено предельное выражение для усредненной по ансамблю  $\{\rho\}$  СПМШ интенсивности на выходе ВИРИ в окрестности нулевой частоты, где шум интенсивности можно считать белым.

Показано, что полученное общее выражение для усреднённой СПМШ интенсивности на выходе ВИРИ в пределе больших длин рассеивающих участков

или малых длин когерентности, переходит в характеристику с лоренцевской формой, полученной в более ранних работах другими авторами.

Проведенные эксперименты для определения усредненной СПМШ интенсивности рассеянного излучения, с использованием одноканального и двухканального ВИРИ, продемонстрировали хорошее согласие с предложенной теорией.

Полученные в работе выражения для усредненной СПМШ интенсивности на выходе ВИРИ могут быть использованы для оценки минимального сигнала внешнего воздействия, детектируемого с помощью ВИРИ.

### Глава 3. Среднее отношение сигнала к шуму для ВИРИ при внешнем гармоническом воздействии на оптическое волокно

В данной главе будет рассматриваться вопрос о детектировании сигнала, вызванного внешним *гармоническим* воздействием на оптическое волокно с помощью ВИРИ, данный вид сигнала на выходе интерферометра мы будем называть в дальнейшем изложении *полезным сигналом*. В отличие от классических интерференционных схем Майкельсона и Маха – Цендера, в ВИРИ происходит *многолучевая* интерференция полей излучений, рассеянных различными центрами, и как любой интерферометр, ВИРИ может быть использован в качестве датчика внешних воздействий. Отклик ВИРИ на внешнее воздействие, то есть изменение интенсивности рассеянного излучения на его выходе при воздействии на чувствительное волокно, зависит, как от положения рабочих точек всех составляющих его элементарных интерферометров Майкельсона, образованных рассеивающими центрами, так и от значения амплитуд рассеяния этих центров. В силу того, что под влиянием окружающей среды амплитуды и фазы полей рассеянного излучения изменяются случайным образом, отклик интерферометра также будет изменяться случайным образом.

Полезный сигнал на выходе ВИРИ можно охарактеризовать его мощностью, которая также будет изменяться при изменении реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , поэтому имеет смысл говорить о *мощности полезного сигнала, усредненной по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$* , или по ансамблю всех возможных амплитуд рассеяния центров рассеивающего участка, *то есть о средней мощности полезного сигнала*.

Величина полезного сигнала на выходе ВИРИ и его средняя по ансамблю мощность, зависят также от конфигурации интерферометра, в настоящей главе будут рассмотрены две из них: одноканальный ВИРИ (интерферометр с одним рассеивающим участком) и симметричный двухканальный ВИРИ (интерферометр



с двумя рассеивающими участками). Кроме того, величина мощности полезного сигнала зависит от места воздействия на участок. Для упрощения будем считать, что основной причиной изменения интенсивности рассеянного излучения при воздействии на рассеивающий участок служит его удлинение под воздействием внешней силы, будем также считать, что протяженность области воздействия много меньше протяженности всего рассеивающего участка.

Одной из основных причин, ограничивающих снизу чувствительность ВИРИ, как было отмечено ранее, являются шумы различного вида. В предыдущей главе было показано, что доминирующий вклад в шумы интерферометра, вносят флуктуации фазы излучения полупроводникового лазера. Отметим, что для разбалансированного интерферометра Маха – Цендера данный вид шума, также является основным [1]. Следует также отметить другие виды шумов, возникающих в интерферометре: квантовые шума оптического усилителя (при его использовании), дробовые и тепловые шумы фотоприемника.

### **3.1. Средняя мощность полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ при внешнем гармоническом фазовом воздействии**

Рассмотрим отклик базовой одноканальной схемы ВИРИ, которая представляет собой один рассеивающий участок некоторой длины, рисунок 3.1. Без ограничения общности, будем считать, что рассеянное излучение является частично поляризованным, случай полной поляризованности будет являться частным случаем.

Пусть на рассеивающий участок длины  $L$  в некоторой точке  $O$ , отстоящей от начала рассеивающего участка на расстояние  $l$ , происходит воздействие  $\varphi(t)$ , приводящее к его периодическому удлинению, рассмотрим, как при этом меняется интенсивность излучения на выходе интерферометра.

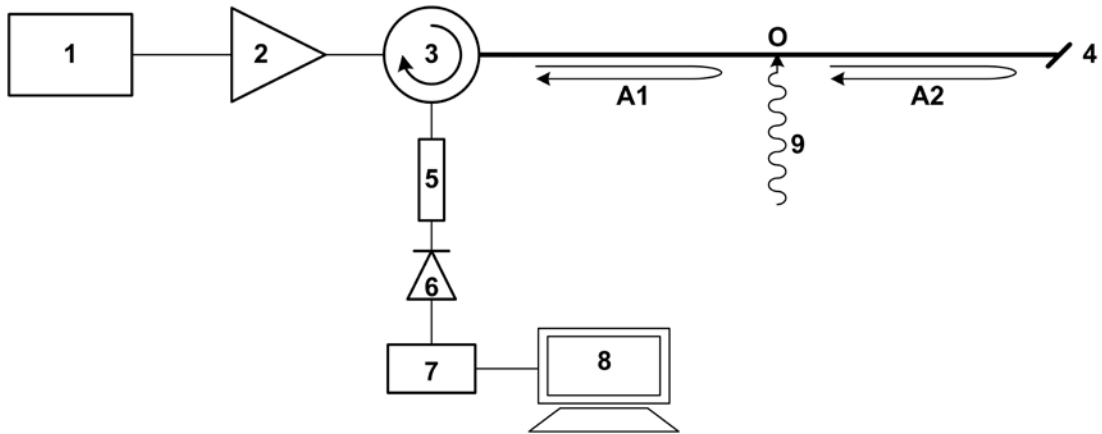


Рисунок 3.1. Схема экспериментальной установки одноканального ВИРИ для исследования его чувствительности к внешним фазовым воздействиям. 1 – полупроводниковый лазер с распределенной обратной связью, 2 – эрбиевый волоконный усилитель, 3 – оптический циркулятор, 4 – отрезок оптического волокна SMF – 28, 5 – оптический аттенюатор, 6 – фотоприемник, 7 – аналогово – цифровой преобразователь, 8 – персональный компьютер, 9 – внешнее фазовое воздействие в точке O.

Воздействие приводит к фазовой модуляции излучения, рассеянного областью, расположенной после точки воздействия O, таким образом, в предположении малого затухания на исследуемом участке, комплексные амплитуды полей излучений, рассеянных отрезками до и после точки воздействия можно записать в виде:

$$\left[ A_{scat}^{\rho}(t) \right]_{pol1}^1 = \sqrt{\frac{1-P}{2}} \int_0^l A_s(t - 2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho(z) dz \quad (3.1),$$

$$\left[ A_{scat}^{\rho}(t) \right]_{pol2}^1 = \sqrt{\frac{1+P}{2}} \int_0^l A_s(t - 2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho(z) dz$$

$$\left[ A_{scat}^{\rho}(t) \right]_{pol1}^2 = \sqrt{\frac{1-P}{2}} \int_l^L A_s(t - 2z/v_{gr}) \exp(-2ikz - 2i\eta\varphi(t)) \rho(z) dz \quad (3.2),$$

$$\left[ A_{scat}^{\rho}(t) \right]_{pol2}^2 = \sqrt{\frac{1+P}{2}} \int_l^L A_s(t - 2z/v_{gr}) \exp(-2ikz - 2i\eta\varphi(t)) \rho(z) dz$$

где индексом «1» обозначены комплексные амплитуды полей излучений, рассеянных участком до точки воздействия O, а индексом «2» после точки воздействия, индекс  $\rho$  указывает на то, что комплексные амплитуды записаны

для некоторого фиксированного распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ . При записи (3.2) мы пренебрегли изменением комплексной амплитуды поля источника, обусловленным дополнительной задержкой, возникающей при воздействии на волокно, то есть считаем амплитуду внешнего растяжения много меньшей, чем длина когерентности источника. В (3.1) и (3.2) учтено, что частично поляризованное рассеянное излучение со степенью поляризации  $P$  может быть представлено в некотором базисе, как суперпозиция некоррелированных полевых компонент, поляризованных в ортогональных направлениях,  $\eta$  – коэффициент пропорциональности между внешним воздействием и результирующим фазовым воздействием на оптическое волокно. Так как интерферировать могут только компоненты излучения с одинаковыми состояниями поляризации, запишем мгновенные интенсивности компонент с ортогональными поляризациями:

$$\begin{aligned} \left[ (I_{scat}^\rho(t))_{inst} \right]_{pol1} &= \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^2 \right) \cdot \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^2 \right)^* \\ \left[ (I_{scat}^\rho(t))_{inst} \right]_{pol2} &= \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^2 \right) \cdot \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^2 \right)^* \end{aligned} \quad (3.3),$$

где интенсивности равны:

$$\begin{aligned} \left[ (I_{scat}^\rho(t)) \right]_{pol1} &= \frac{1-P}{2} E_T \left\langle \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^2 \right) \cdot \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^2 \right)^* \right\rangle \\ \left[ (I_{scat}^\rho(t)) \right]_{pol2} &= \frac{1+P}{2} E_T \left\langle \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^2 \right) \cdot \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^2 \right)^* \right\rangle \end{aligned} \quad (3.4),$$

где

$$\begin{aligned} \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^1 &= \int_0^l A_s(t - 2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho(z) dz \\ \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^2 &= \exp(-2i\eta\varphi(t)) \int_l^L A_s(t - 2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho(z) dz \end{aligned} \quad (3.5),$$

комплексные амплитуды полностью поляризованных рассеянных излучений для участков до и после точки воздействия  $O$ . Рассмотрим теперь интенсивность

полностью поляризованного рассеянного излучения, при неизменном распределении коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , которая может быть зафиксирована фотоприемником, помня при этом, что интенсивности для частично поляризованного излучения, для каждой из поляризационных компонент, получаются ее умножением на  $(1-P)/2$  и  $(1+P)/2$ , в соответствии с (3.4):

$$E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle = E_T \left\langle \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^2 \right) \cdot \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^2 \right)^* \right\rangle (3.6).$$

После перемножения получаем 4 члена:

$$\begin{aligned} E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle = & \\ = E_T \left\langle \int_0^l \int_0^l A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle + & \\ + E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle + & \\ + E_T \left\langle \exp(-2i\eta\varphi(t)) \times \right. & \\ \left. \times \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle + & \\ + E_T \left\langle \exp(2i\eta\varphi(t)) \times \right. & \\ \left. \times \int_0^l \int_l^L A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_2 - 2ikz_1) \rho(z_1) \rho^*(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle & \end{aligned} (3.7).$$

Первые два члена в (3.7) не зависят от внешнего воздействия, они характеризуют интенсивность, меняющуюся при изменении реализации  $\{\rho\}$ . Последние два члена, напротив, содержат информацию о внешнем воздействии. Выражение (3.7) представляет собой *передаточную функцию одноканального ВИРИ* [81], она определяет *отклик интерферометра на внешнее воздействие  $\varphi(t)$* , соответствующий некоторому фиксированному распределению  $\{\rho\}$ . Таким образом, величина отклика интерферометра зависит от конкретной реализации

распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  и меняется при переходе от одной реализации к другой случайным образом, при этом, как видно из (3.7), среднее значение этого *отклика* по ансамблю  $\{\rho\}$  при любом внешнем воздействии постоянно и равно среднему значению интенсивности рассеянного участка излучения:  $I_{scat}^{mean}$ . Отметим также, что отклик (3.7) является *нелинейным* по отношению к внешнему воздействию  $\varphi(t)$ , таким образом, в сигнале на выходе интерферометра будут присутствовать частотные гармоники, не содержащиеся в исходном сигнале внешнего воздействия.

Обозначим сумму первых двух членов в (3.7) через  $I_0$ , а усредненные по времени  $T$  двойные интегралы в (3.7) через  $B$  и  $B^*$ , так как они образуют комплексно сопряженную пару :

$$I_0 = E_T \left\langle \int_0^l \int_0^l A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle + \\ + E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \quad (3.8),$$

$$B = E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \quad (3.9),$$

$$B^* = E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_2 - 2ikz_1) \rho(z_1) \rho^*(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \quad (3.10),$$

тогда передаточная функция одноканального ВИРИ (3.7) примет вид:

$$E_T \left\langle \left( I_{scat}^p(t) \right)_{inst} \right\rangle = I_0 + \exp(-2i\eta\varphi(t)) B + \exp(2i\eta\varphi(t)) B^* \quad (3.11),$$

где было сделано допущение о том, что внешнее воздействие изменяется медленно, по сравнению с временными флуктуациями поля излучения источника (которые фиксируются достаточно быстрым фотоприемником, не приводящим, при этом к усреднению сигнала внешнего воздействия), поэтому,

соответствующий экспоненциальный множитель можно вынести из – под знака усреднения  $E_T \langle \rangle$ .

Пусть на интерферометр в точке  $O$  действует внешнее гармоническое воздействие с частотой  $\omega$  и амплитудой  $m$ :

$$\varphi(t) = m \sin(\omega \cdot t) \quad (3.12).$$

Оценим мощность полезного сигнала на выходе интерферометра, то есть мощность колебаний интенсивности рассеянного излучения при внешнем воздействии (3.12) для некоторой фиксированной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ . Обозначим аргумент экспоненциального множителя в (3.11) (фазовую амплитуду):  $\Lambda = 2\eta m$ . тогда (3.11) будет иметь вид:

$$E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle = I_0 + \exp(-i\Lambda \sin(\omega \cdot t)) B + \exp(i\Lambda \sin(\omega \cdot t)) B^* \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle &= I_0 + 2 \operatorname{Re} \left( \exp(-i\Lambda \sin(\omega \cdot t)) B \right) = \\ &= I_0 + 2 \left[ \operatorname{Re} \left( \exp(-i\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right) \operatorname{Re}(B) - \operatorname{Im} \left( \exp(-i\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right) \operatorname{Im}(B) \right] = \\ &= I_0 + 2 \left[ \operatorname{Re}(B) \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \operatorname{Im}(B) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right] \end{aligned} \quad (3.14).$$

Мощность полезного сигнала: временных колебаний интенсивности на выходе одноканального ВИРИ, для фиксированной реализации  $\{\rho\}$ , соответствует дисперсии выражения (3.14), рассчитанной с помощью усреднения по времени

воздействия внешнего сигнала  $E_t \langle f(\tau) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |f(\tau)|^2 dt$ , иными словами она

равна разнице полной мощности сигнала на выходе интерферометра и мощности постоянной составляющей сигнала на выходе интерферометра, и равна:

$$\left( \sigma_I^\rho \right)^2 = E_t \left\langle E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle \right\rangle - \left( E_t \left\langle E_T \left\langle \left( I_{scat}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle \right\rangle \right)^2 \quad (3.15),$$

где  $E_t \langle \rangle$  – обозначает усреднение по времени внешнего воздействия  $t$ . Так как среднее значение интенсивности за время усреднения фотоприемника  $E_T \langle \rangle$  в

выражении (3.15) для участков, расположенных до и после точки воздействия  $O$ , зависит только от разности временных задержек полей интерферирующих излучений и коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , а по условию и то и другое в каждом из участков неизменно (длины рассеивающих участков постоянны, реализации распределения  $\{\rho\}$  в каждом из них – фиксированы), то величины, усредняемые по  $T$ , можно вынести из – под усреднения по времени действия внешнего возмущения  $t$ . Имеем, см приложение 11:

$$(\sigma_t^\rho)^2 = 4(\operatorname{Re}(B))^2 \left[ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Lambda))^2 \right] + 4(\operatorname{Im}(B))^2 \left[ 2 \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Lambda))^2 \right] \quad (3.16),$$

или

$$(\sigma_t^\rho)^2 = 2(\operatorname{Im}(B))^2 \Lambda^2 \quad \text{при малых } \Lambda, \quad (3.17).$$

Мощность четных компонент с частотами:  $2\omega, 4\omega, \dots, 2k\omega$ , равны соответственно:  $8(\operatorname{Re}(B))^2 (J_{2k}(\Lambda))^2$ , а нечетных компонент с частотами:  $\omega, 3\omega, \dots, (2k+1)\omega$ , равны соответственно:  $8(\operatorname{Im}(B))^2 (J_{2k+1}(\Lambda))^2$

Величина мощности полезного сигнала, для конкретной реализации  $\{\rho\}$  зависит таким образом, от величин  $(\operatorname{Im}(B))^2$  и  $(\operatorname{Re}(B))^2$ , которые могут быть выражены через  $B$  и  $B^*$ :

$$(\operatorname{Im} B)^2 = -\frac{(B - B^*)^2}{4}, \quad (\operatorname{Re} B)^2 = \frac{(B + B^*)^2}{4} \quad (3.18).$$

При фиксированной реализации  $\{\rho\}$  величины  $B$  и  $B^*$  – неизменны.

Как и ранее, рассмотрим среднее значение мощности полезного сигнала (3.16) или (3.17), по ансамблю независимых реализаций распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , будем называть эту величину *средней мощностью полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ*. Для этого усредним по ансамблю  $\{\rho\}$  выражения (3.16) и (3.17):

$$\sigma_I^2 = E_\rho \left\langle (\sigma_I^\rho)^2 \right\rangle = 4E_\rho \left\langle (\operatorname{Re}(B))^2 \right\rangle \left[ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Lambda))^2 \right] + 4E_\rho \left\langle (\operatorname{Im}(B))^2 \right\rangle \left[ 2 \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Lambda))^2 \right] \quad (3.19)$$

$$\sigma_I^2 = E_\rho \left\langle (\sigma_I^\rho)^2 \right\rangle = 2E_\rho \left\langle (\operatorname{Im}(B))^2 \right\rangle \Lambda^2 \quad \text{при малых } \Lambda \quad (3.20).$$

Рассмотрим, таким образом, средние значения :

$$E_\rho \left\langle (\operatorname{Re}(B))^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \left( E_\rho \langle B^2 \rangle + 2E_\rho \langle BB^* \rangle + E_\rho \left\langle (B^*)^2 \right\rangle \right) \quad (3.21),$$

$$E_\rho \left\langle (\operatorname{Im}(B))^2 \right\rangle = -\frac{1}{4} \left( E_\rho \langle B^2 \rangle - 2E_\rho \langle BB^* \rangle + E_\rho \left\langle (B^*)^2 \right\rangle \right) \quad (3.22).$$

Можно показать, см. приложение 12, что в силу некоррелированности комплексных амплитуд рассеяния для центров, расположенных на разных отрезках рассеивающего участка: до и после точки воздействия  $O$

$$E_\rho \langle B^2 \rangle = E_\rho \left\langle (B^*)^2 \right\rangle = 0, \text{ поэтому,}$$

$$E_\rho \left\langle (\operatorname{Re}(B))^2 \right\rangle = E_\rho \left\langle (\operatorname{Im}(B))^2 \right\rangle = \frac{1}{2} E_\rho \langle BB^* \rangle \quad (3.23).$$

Усреднение произведения  $E_\rho \langle BB^* \rangle$  дает, см. приложение 12:

$$\begin{aligned} E_\rho \langle BB^* \rangle &= \\ &= \rho_0^2 \int_0^l \int_l^L E_T \left\langle A_s^* \left( t - 2z_1/v_{gr} \right) A_s \left( t - 2z_2/v_{gr} \right) \right\rangle E_T \left\langle A_s \left( t - 2z_1/v_{gr} \right) A_s^* \left( t - 2z_2/v_{gr} \right) \right\rangle dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (3.24),$$

применяя (П.2) и делая замены переменных:  $\tau_1 = 2z_1/v_{gr}$ ,  $\tau_2 = 2z_2/v_{gr}$ , получаем:

$$E_\rho \langle BB^* \rangle = \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^\theta \int_\theta^T \exp \left( -\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}} \right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.25),$$

где  $\theta = 2l/v_{gr}$ ,  $T = 2L/v_{gr}$ . Поэтому, подставляя (3.25) в (3.23), а затем в (3.19), (3.20), получим:

$$\sigma_I^2 = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Lambda))^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Lambda))^2 \right] v_{gr}^2 \rho_0^2 I_s^2 \int_0^\theta \int_\theta^T \exp \left( -\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}} \right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.26),$$



$$\sigma_I^2 = \Lambda^2 \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^\theta \int_0^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 \quad \text{при малых } \Lambda \quad (3.27).$$

Подставляя значение двойного интеграла, см. приложение 13, получим:

$$\sigma_I^2 = \frac{4(I_{scat}^{mean})^2}{T^2} \frac{\tau_{coh}^2}{4} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Lambda))^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Lambda))^2 \right] \times \\ \times \left( \exp\left(\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) \left( \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \right) \quad (3.28)$$

$$\sigma_I^2 = \Lambda^2 \frac{(I_{scat}^{mean})^2}{T^2} \frac{\tau_{coh}^2}{4} \left( \exp\left(\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) \left( \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \right) \quad \text{при малых } \Lambda \quad (3.29),$$

где  $I_{scat}^{mean} = I_s \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 T$  – средняя по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивность рассеянного излучения, найденная в первой главе, см. пункт 1.3. Выражения (3.28) и (3.29), дают, таким образом, усредненную по ансамблю  $\{\rho\}$  мощность полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ с рассеивающим участком с длиной  $L$ , при воздействии на оптическое волокно интерферометра гармонического фазового воздействия с амплитудой  $\Lambda$  в точке  $O$  волокна, расположенной на расстоянии  $l$  от его начала.

Рассмотрим случай частично поляризованного рассеянного излучения со степенью поляризации  $P$ . В этом случае интенсивность каждой из ортогональных поляризационных компонент находится путем умножения интенсивности полностью поляризованного излучения на  $(1-P)/2$  и  $(1+P)/2$ , соответственно, (3.4). Средняя мощность полезного сигнала для ортогональных поляризационных компонент может быть выражена через среднюю мощность полезного сигнала для полностью поляризованного рассеянного излучения: (3.28) или (3.29):

$$\begin{aligned} [\sigma_I^2]_{pol1} &= \frac{(1-P)^2}{4} \sigma_I^2 \\ [\sigma_I^2]_{pol2} &= \frac{(1+P)^2}{4} \sigma_I^2 \end{aligned} \quad (3.30).$$

Суммарная средняя по ансамблю  $\{\rho\}$  мощность полезного сигнала для частично поляризованного рассеянного излучения, при внешнем гармоническом воздействии на волокно интерферометра равна сумме средних мощностей двух поляризационных компонент, в силу того, что они являются некоррелированными:

$$[\sigma_I^2]_{partpol} = \frac{1+P^2}{2} \sigma_I^2 \quad (3.31).$$

Средняя мощность полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ, для частично поляризованного излучения, таким образом, меньше чем, для полностью поляризованного излучения в  $(1+P^2)/2$  раз.

### 3.2. Сравнение средней мощности полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ и интерферометра Маха – Цендера

Произведем сравнение средней мощности полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ, при воздействии на него гармонического внешнего сигнала: (3.12):  $\varphi(t) = m \sin(\omega \cdot t)$ , со средней мощностью полезного сигнала на выходе интерферометра Маха – Цендера, при таком же гармоническом воздействии (3.12). Будем считать, что излучение полностью поляризованное. Мощность полезного сигнала на выходе интерферометра Маха – Цендера, см. приложение 14, определяется как:

$$\sigma_{MZ}^2 = 2I_s^2 \exp\left(-\frac{2|T|}{\tau_{coh}}\right) \left[ \cos^2(\alpha) \left( \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Theta))^2 \right) + \sin^2(\alpha) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Theta))^2 \right) \right] \quad (3.32),$$

или

$$\sigma_{MZ}^2 = \frac{1}{2} I_s^2 \exp\left(-\frac{2|T|}{\tau_{coh}}\right) \sin^2(\alpha) \Theta^2 \quad \text{при малых } \Theta \quad (3.33),$$

где  $\Theta$  – фазовая амплитуда воздействия на оптическое волокно интерферометра. Для интерферометра Маха – Цендера, у которого положение рабочей точки не стабилизировано, а изменяется случайным образом, среднее значение мощности полезного сигнала можно определить как:

$$E_\alpha \langle \sigma_{MZ}^2 \rangle = I_s^2 \exp\left(-\frac{2|T|}{\tau_{coh}}\right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Theta))^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Theta))^2 \right) \quad (3.34),$$

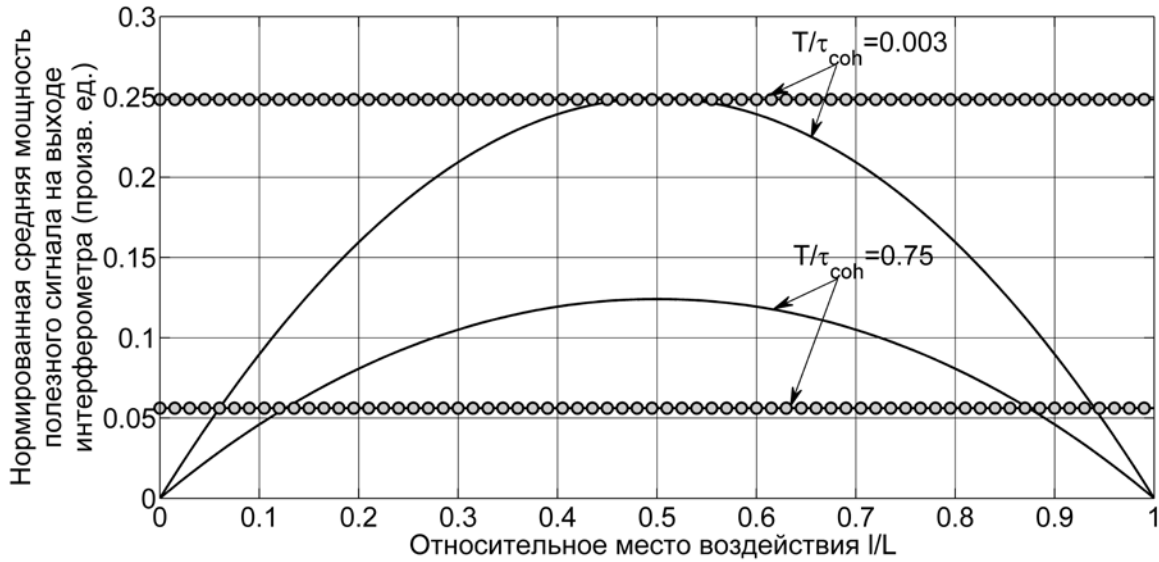
$$E_\alpha \langle \sigma_{MZ}^2 \rangle = \frac{1}{4} I_s^2 \exp\left(-\frac{2|T|}{\tau_{coh}}\right) \Theta^2 \quad \text{при малых } \Theta \quad (3.35),$$

где  $E_\alpha \langle \rangle$  – усреднение по всем положениям рабочей точки интерферометра.

Отметим, что конфигурация интерферометра Маха – Цендера отличается от конфигурации ВИРИ, тем, что в последнем излучение проходит сигнальное плечо два раза – в прямом и обратном направлениях. Поэтому, одно и то же внешнее воздействие (3.12) на оптическое волокно произведет в ВИРИ воздействие:  $\Lambda \sin(\omega \cdot t)$ , имеющее в два раза большую фазовую амплитуду по сравнению с фазовой амплитудой для интерферометра Маха – Цендера:  $\Theta \sin(\omega \cdot t)$ ,  $\Lambda = 2\Theta$ . ВИРИ, поэтому, более корректно сравнивать по величине отклика с интерферометром Майкельсона, в эксперименте, однако, удобнее использовать интерферометра Маха – Цендера, с учетом сделанного замечания.

На рисунке 3.2 показаны графики зависимостей величин средней мощности полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ, нормированной на квадрат среднего значение интенсивности рассеянного излучения:  $\sigma_I^2 / \left( \Lambda^2 (I_{scat}^{mean})^2 \right)$ , и средней мощности полезного сигнала на выходе интерферометра Маха – Цендера, нормированной на квадрат среднего значения интенсивности на выходе

а)



б)

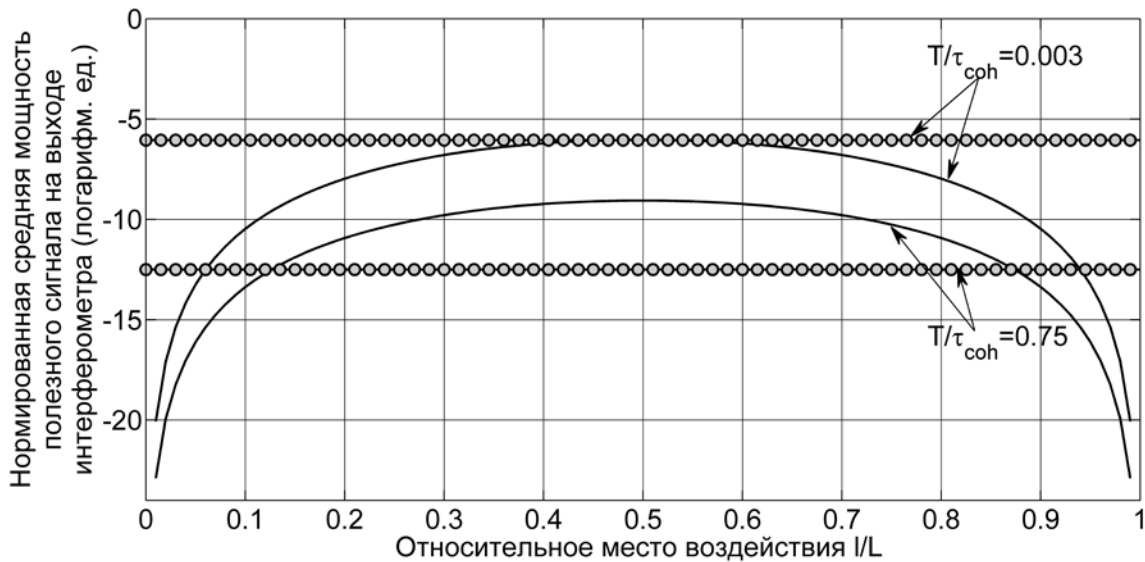


Рисунок 3.2. Зависимости нормированной средней мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ – изогнутые непрерывные линии, и интерферометра Маха – Цендера – круги, при одинаковых амплитудах фазовых воздействий на волокна интерферометров, в линейном (а) и в логарифмическом (б) масштабе, от относительного положения места воздействия, при двух различных значениях отношения максимального времени задержки в интерферометре и времени когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.003$  и  $T/\tau_{coh} = 0.75$  и равных по величине амплитуд фазовых воздействий.

интерферометра:  $E_{\alpha} \langle \sigma_{MZ}^2 \rangle / (\Theta^2 I_s^2)$ , от относительного места воздействия на волокна интерферометров, задаваемого параметром:  $\theta/T = l/L$ , при двух

различных значениях отношения:  $T/\tau_{coh} = 0.003$  и  $T/\tau_{coh} = 0.75$ , в предположении полностью поляризованного рассеянного излучения и сохранения состояния поляризации в интерферометре Маха – Цендера. Отметим, что в приведенных графиках исключена зависимость от величин фазовых амплитуд воздействий  $\Theta$  или  $\Lambda$ , то есть можно считать, что графики отображают величины полезных сигналов *при одинаковых эффективных фазовых воздействиях на волокно. При этом, конечно, величина реального внешнего воздействия на волокно интерферометра Маха – Цендера должна быть в два раза больше по амплитуде, чем величина реального внешнего воздействия для ВИРИ.* Амплитуда воздействия предполагается малой, так что можно пользоваться формулами: (3.29) и (3.33). Для интерферометра Маха – Цендера нормированная средняя мощность полезного сигнала при малом гармоническом воздействии на волокно не зависит от положения точки воздействия, поэтому график представляет собой горизонтальную линию.

Нормированная средняя мощность полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ зависит от положения точки воздействия и максимальна в случае, когда воздействие приложено в центре рассеивающего участка. Для *больших длин когерентности или малых времен задержки* нормированная средняя мощность полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ *при воздействии в центре рассеивающего участка* мало отличается от нормированной средней мощности полезного сигнала на выходе интерферометра Маха – Цендера, при  $T/\tau_{coh} = 0.003$  их разница в логарифмическом масштабе составляет 0.01 дБ.

Для *малых длин когерентности или больших времен задержки* нормированная средняя мощность полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ *при воздействии в центре рассеивающего участка* заметно отличается от нормированной средней мощности полезного сигнала на выходе интерферометра Маха – Цендера, при:  $T/\tau_{coh} = 0.75$  их разница в логарифмическом масштабе составляет: 3.4 дБ.

Из рисунка 3.2 видно, что при увеличении отношения  $T/\tau_{coh}$ , что может быть вызвано *либо снижением когерентности источника, либо увеличением*

*протяженности рассеивающего участка одноканального ВИРИ (или увеличением задержки в интерферометре Маха – Цендера) нормированные средние мощности полезных сигналов на выходах интерферометров снижаются, причем, для интерферометра Маха – Цендера это снижение происходит быстрее, чем для одноканального ВИРИ. Объясняется это тем, что в первом случае, при уменьшении степени когерентности (или увеличении протяженности рассеивающего участка), в рассеивающей среде всегда остается некоторое количество элементарных интерферометров, имеющих относительно большой отклик на внешнее воздействие, эти интерферометры образованы парами центров рассеяния, расположенных близко друг к другу, захватывая при этом область воздействия. Так при увеличении отношения  $T/\tau_{coh}$  в 250 раз, нормированная средняя мощность полезного сигнала для ВИРИ снижается в точке максимального значения на 3 дБ, а для интерферометра Маха – Цендера – на 6.5 дБ*

*Из рисунка 3.2 также следует, что одноканальный ВИРИ, состоящий из одного рассеивающего участка, слабо реагирует на внешнее воздействие, в случае, когда оно приложено близко к краям участка.*

### **3.3. Средняя мощность полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ при внешнем гармоническом фазовом воздействии**

Рассмотрим отклик двухканального ВИРИ, состоящего из двух рассеивающих участков одинаковой длины рисунок 3.3, причем дополнительные задержки полей для излучений, распространяющихся в интерферометре, рассеянных первым и вторым участками, будем считать равными друг другу, то есть будем считать, что схема двухканального ВИРИ является симметричной. Будем также считать, что в отличие от случая, описанного во второй главе, в плече интерферометра не происходит дополнительного смещения частоты излучения.

Без ограничения общности, аналогично предыдущему пункту, будем считать, что рассеянное излучение является частично поляризованным, случай полной поляризованности будет являться частным случаем.

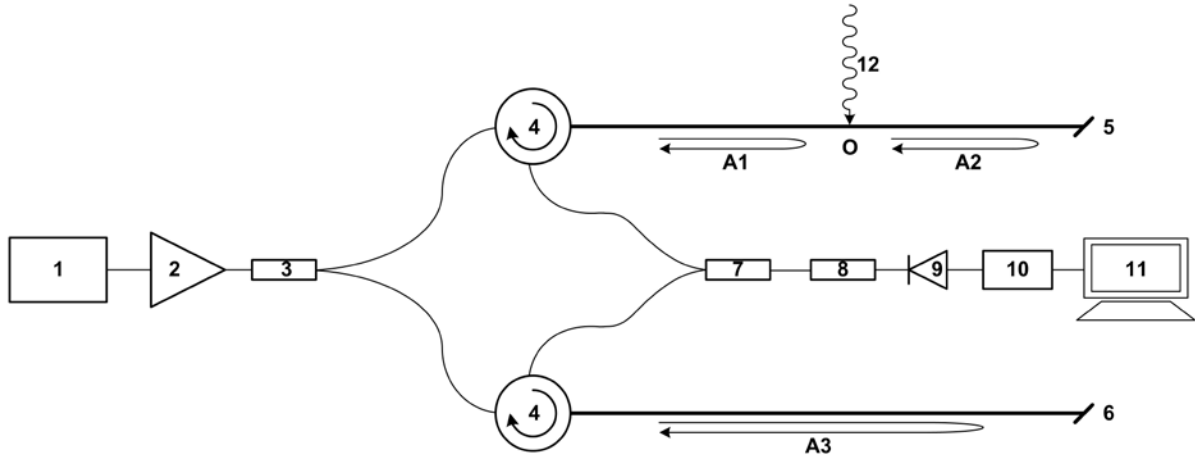


Рисунок 3.3. Схема экспериментальной установки симметричного двухканального ВИРИ для исследования его чувствительности к внешним фазовым воздействиям. 1 – полупроводниковый лазер с распределенной обратной связью, 2 – эрбиевый волоконный усилитель, 3,7 – оптический ответвитель, 4, – оптический циркулятор, 5 – сигнальный отрезок оптического волокна SMF – 28, 6 – опорный отрезок оптического волокна SMF – 28, 8 – оптический аттенюатор, 9 – фотоприемник, 10 – аналогово – цифровой преобразователь, 11 – персональный компьютер, 12 – внешнее фазовое воздействие в точке O

Пусть на один из рассеивающих участков симметричного двухканального ВИРИ с длиной  $L$  в некоторой точке  $O$ , отстоящей от начала рассеивающего участка на расстояние  $l$ , происходит воздействие  $\varphi(t)$ , вида (3.12), приводящее к его периодическому удлинению, при этом на второй участок воздействия не производится. Назовем участок, который подвергается внешнему воздействию *сигнальным*, второй участок, который не подвергается внешнему воздействию, назовем *опорным*. Рассмотрим, как меняется интенсивность излучения на выходе интерферометра.

Воздействие приводит к фазовой модуляции излучения, рассеянного областью, расположенной после точки воздействия  $O$ . Разобьём мысленно,

опорный участок двухканального ВИРИ на два участка точкой  $O'$ , также расположенной на расстоянии  $l$  от начала опорного участка. В предположении, что рассеянное излучение частично поляризовано, со степенью поляризации  $P$ , и что состояния поляризации для излучений, рассеянных двумя рассеивающими участками совпадают, запишем комплексные амплитуды полей излучений для четырех рассматриваемых участков волокна, аналогично предыдущему пункту, в виде:

$$\begin{aligned} [A_{scat}^{\rho}(t)]_{pol1}^1 &= \sqrt{\frac{1-P}{2}} \int_0^l A_s(t-2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho_{sig}(z) dz \\ [A_{scat}^{\rho}(t)]_{pol2}^1 &= \sqrt{\frac{1+P}{2}} \int_0^l A_s(t-2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho_{sig}(z) dz \end{aligned} \quad (3.36),$$

$$\begin{aligned} [A_{scat}^{\rho}(t)]_{pol1}^2 &= \sqrt{\frac{1-P}{2}} \int_l^L A_s(t-2z/v_{gr}) \exp(-2ikz - 2i\eta\varphi(t)) \rho_{sig}(z) dz \\ [A_{scat}^{\rho}(t)]_{pol2}^2 &= \sqrt{\frac{1+P}{2}} \int_l^L A_s(t-2z/v_{gr}) \exp(-2ikz - 2i\eta\varphi(t)) \rho_{sig}(z) dz \end{aligned} \quad (3.37),$$

$$\begin{aligned} [A_{scat}^{\rho}(t)]_{pol1}^3 &= \sqrt{\frac{1-P}{2}} \int_0^l A_s(t-2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho_{ref}(z) dz \\ [A_{scat}^{\rho}(t)]_{pol2}^3 &= \sqrt{\frac{1+P}{2}} \int_0^l A_s(t-2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho_{ref}(z) dz \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} [A_{scat}^{\rho}(t)]_{pol1}^4 &= \sqrt{\frac{1-P}{2}} \int_l^L A_s(t-2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho_{ref}(z) dz \\ [A_{scat}^{\rho}(t)]_{pol2}^4 &= \sqrt{\frac{1+P}{2}} \int_l^L A_s(t-2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho_{ref}(z) dz \end{aligned} \quad (3.39),$$

где нижние индексы  $sig$  и  $ref$  обозначают принадлежность центра рассеяния к сигнальному или к опорному рассеивающим участкам, индекс  $\rho$  показывает, что комплексные амплитуды записаны для некоторой фиксированной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , но уже сигнального и опорного участков,  $\eta$  – коэффициент пропорциональности между внешним воздействием и фазовым воздействием на оптическое волокно. Отметим также, что выражения (3.36) – (3.39), записаны в предположении, что в сигнальный и



опорный участки двухканального ВИРИ заводятся излучения одинаковой мощности, каждая из которых равна мощности, заводимой в единственный участок одноканального ВИРИ, рассмотренного ранее. При записи (3.37) мы пренебрегли изменением комплексной амплитуды поля источника, обусловленным дополнительной задержкой, возникающей при воздействии на волокно.

В силу того, что интерферировать могут только компоненты с одинаковыми поляризациями, запишем мгновенные интенсивности компонент с ортогональными поляризациями:

$$\begin{aligned} \left[ (I_{scat}^\rho(t))_{inst} \right]_{pol1} &= \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^2 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^3 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol1}^4 \right) \times c.c. \\ \left[ (I_{scat}^\rho(t))_{inst} \right]_{pol2} &= \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^2 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^3 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]_{pol2}^4 \right) \times c.c. \end{aligned} \quad (3.40),$$

где  $c.c.$  обозначает комплексно сопряженное значение. Интенсивности (3.40) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \left[ (I_{scat}^\rho(t)) \right]_{pol1} &= \frac{1-P}{2} E_T \left\langle \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^2 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^3 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^4 \right) \times c.c. \right\rangle \\ \left[ (I_{scat}^\rho(t)) \right]_{pol2} &= \frac{1+P}{2} E_T \left\langle \left( \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^1 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^2 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^3 + \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^4 \right) \times c.c. \right\rangle \end{aligned} \quad (3.41),$$

где:

$$\begin{aligned} \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^1 &= \int_0^l A_s(t - 2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho_{sig}(z) dz \\ \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^2 &= \exp(-2i\eta\phi(t)) \int_l^L A_s(t - 2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho_{sig}(z) dz \\ \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^3 &= \int_0^l A_s(t - 2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho_{ref}(z) dz \\ \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^4 &= \int_l^L A_s(t - 2z/v_{gr}) \exp(-2ikz) \rho_{ref}(z) dz \end{aligned} \quad (3.42),$$

комплексные амплитуды полностью поляризованных рассеянных излучений для участков до и после точки воздействия  $O$  сигнального участка и точки  $O'$  опорного участка.

Рассмотрим теперь среднюю по времени интенсивность *полностью поляризованного рассеянного излучения*, которая может быть зафиксирована фотоприемником, помня, при этом, что интенсивности для частично поляризованного излучения, для каждой из поляризационных компонент, получаются ее умножением на  $(1 - P)/2$  и  $(1 + P)/2$  в соответствии с (3.41):

$$E_T \left\langle \left( I_{scat2}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle = E_T \left\langle \left( [A_{scat}^\rho(t)]^1 + [A_{scat}^\rho(t)]^2 + [A_{scat}^\rho(t)]^3 + [A_{scat}^\rho(t)]^4 \right) \times c.c. \right\rangle \quad (3.43).$$

После перемножения получаем 16 членов:

$$\begin{aligned} E_T \left\langle \left( I_{scat2}^\rho(t) \right)_{inst} \right\rangle = & \\ = E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^1 [A_{scat}^\rho(t)]^{1*} \right\rangle + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^1 [A_{scat}^\rho(t)]^{2*} \right\rangle + & \\ + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^1 [A_{scat}^\rho(t)]^{3*} \right\rangle + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^1 [A_{scat}^\rho(t)]^{4*} \right\rangle + & \\ + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^2 [A_{scat}^\rho(t)]^{1*} \right\rangle + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^2 [A_{scat}^\rho(t)]^{2*} \right\rangle + & \\ + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^2 [A_{scat}^\rho(t)]^{3*} \right\rangle + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^2 [A_{scat}^\rho(t)]^{4*} \right\rangle + & \\ + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^3 [A_{scat}^\rho(t)]^{1*} \right\rangle + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^3 [A_{scat}^\rho(t)]^{2*} \right\rangle + & \\ + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^3 [A_{scat}^\rho(t)]^{3*} \right\rangle + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^3 [A_{scat}^\rho(t)]^{4*} \right\rangle + & \\ + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^4 [A_{scat}^\rho(t)]^{1*} \right\rangle + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^4 [A_{scat}^\rho(t)]^{2*} \right\rangle + & \\ + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^4 [A_{scat}^\rho(t)]^{3*} \right\rangle + E_T \left\langle [A_{scat}^\rho(t)]^4 [A_{scat}^\rho(t)]^{4*} \right\rangle & \end{aligned} \quad (3.44).$$

Десять членов суммы (3.44), не зависят от внешнего воздействия  $\varphi(t)$ , они характеризуют интенсивность, меняющуюся при изменении реализации  $\{\rho\}$  распределений коэффициентов рассеяния центров в двух участках интерферометра. Шесть членов суммы, содержащих,  $\varphi(t)$ , содержат информацию о внешнем воздействии. Выражение (3.44) представляет собой *передаточную функцию двухканального ВИРИ* [81], она определяет оклик интерферометра на внешнее воздействие  $\varphi(t)$ , соответствующий некоторой фиксированной

реализации  $\{\rho\}$  двух участков. Величина отклика интерферометра меняется при переходе от одной реализации распределения центров к другой случайным образом. Отклик (3.44) также является *нелинейным* по отношению к внешнему воздействию  $\varphi(t)$ , таким образом, в сигнале на выходе интерферометра будут присутствовать частотные гармоники, не содержащиеся в исходном сигнале внешнего воздействия. Способ демодуляции такого сигнала двухканального ВИРИ, с помощью метода фазового разнесения рассмотрен в следующей главе.

Пусть на сигнальное плечо интерферометра в точке  $O$  действует внешнее гармоническое воздействие вида (3.12)  $\varphi(t) = m \sin(\omega \cdot t)$ . Аналогично предыдущему пункту, оценим мощность полезного сигнала: колебаний интенсивности рассеянного излучения при внешнем воздействии (3.12) для *некоторой фиксированной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , двух рассеивающих участков ВИРИ*. Члены, содержащие информацию о внешнем воздействии, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & E_T \left\langle \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^\dagger \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^{2*} \right\rangle = \\
 & = \exp(2i\eta\varphi(t)) \times \\
 & \times E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_2 - 2ikz_1) \rho_{sig}(z_1) \rho_{sig}^*(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle
 \end{aligned}
 \tag{3.45},$$

$$\begin{aligned}
 & E_T \left\langle \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^{1*} \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^2 \right\rangle = \\
 & = \exp(-2i\eta\varphi(t)) \times \\
 & \times E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{sig}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle
 \end{aligned}
 \tag{3.46},$$

$$\begin{aligned}
& E_T \left\langle \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^3 \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^{2*} \right\rangle \\
& \exp(2i\eta\varphi(t)) \times \\
& \times E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_2 - 2ikz_1) \rho_{ref}(z_1) \rho_{sig}^*(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.47},$$

$$\begin{aligned}
& E_T \left\langle \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^{3*} \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^2 \right\rangle = \\
& = \exp(-2i\eta\varphi(t)) \times \\
& \times E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.48},$$

$$\begin{aligned}
& E_T \left\langle \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^4 \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^{2*} \right\rangle = \\
& = \exp(2i\eta\varphi(t)) \times \\
& \times E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_2 - 2ikz_1) \rho_{ref}(z_1) \rho_{sig}^*(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.49},$$

$$\begin{aligned}
& E_T \left\langle \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^{4*} \left[ A_{scat}^\rho(t) \right]^2 \right\rangle = \\
& = \exp(-2i\eta\varphi(t)) \times \\
& \times E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.50},$$

где также было сделано допущение о том, что внешнее воздействие изменяется медленно, по сравнению с временными флуктуациями поля источника (которые фиксируются достаточно быстрым фотоприемником, не приводящим, при этом к усреднению сигнала внешнего воздействия), поэтому, соответствующий экспоненциальный множитель можно вынести из – под знака усреднения  $E_T \langle \rangle$ .

Выражения (3.45) и (3.46), (3.47) и (3.48), (3.49) и (3.50), образуют соответственно, комплексно сопряженные пары. Обозначим сумму 10 членов в (3.44), не

содержащих информации о внешнем воздействии, через  $I_0$ , а усреднённые по времени  $T$  двойные интегралы в выражениях (3.46), (3.48), (3.50), соответственно, буквами : F, G и H:

$$F = E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s^* \left( t - 2z_1/v_{gr} \right) A_s \left( t - 2z_2/v_{gr} \right) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{sig}^* (z_1) \rho_{sig} (z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \quad (3.51),$$

$$G = E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s^* \left( t - 2z_1/v_{gr} \right) A_s \left( t - 2z_2/v_{gr} \right) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^* (z_1) \rho_{sig} (z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \quad (3.52),$$

$$H = E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s^* \left( t - 2z_1/v_{gr} \right) A_s \left( t - 2z_2/v_{gr} \right) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^* (z_1) \rho_{sig} (z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \quad (3.53).$$

Тогда передаточная функция двухканального ВИРИ (3.44) примет вид:

$$\begin{aligned} E_T \left\langle \left( I_{scat2}^{\rho} (t) \right)_{inst} \right\rangle &= I_0 + \\ &+ \exp(-\Lambda \sin(\omega \cdot t)) F + \exp(-\Lambda \sin(\omega \cdot t)) G + \exp(-\Lambda \sin(\omega \cdot t)) H + \\ &+ \exp(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) F^* + \exp(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) G^* + \exp(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) H^* \end{aligned} \quad (3.54)$$

где  $\Lambda = 2\eta m$ . Отметим, что среднее по ансамблю  $\{\rho\}$  значение отклика двухканального интерферометра равно  $I_0$ , при любом внешнем воздействии.

Запишем аналогично, (3.13) и (3.14) для передаточной функции (3.44):

$$\begin{aligned} E_T \left\langle \left( I_{scat2}^{\rho} (t) \right)_{inst} \right\rangle &= I_0 + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \left( \exp(-\Lambda \sin(\omega \cdot t)) F \right) + 2 \operatorname{Re} \left( \exp(-\Lambda \sin(\omega \cdot t)) G \right) + 2 \operatorname{Re} \left( \exp(-\Lambda \sin(\omega \cdot t)) H \right) = \\ &= I_0 + 2 \left[ \operatorname{Re}(F) \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \operatorname{Im}(F) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right] + \\ &+ 2 \left[ \operatorname{Re}(G) \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \operatorname{Im}(G) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right] + \\ &+ 2 \left[ \operatorname{Re}(H) \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \operatorname{Im}(H) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right] \end{aligned} \quad (3.55).$$

Мощность полезного сигнала: временных колебаний интенсивности на выходе двухканального ВИРИ, для фиксированной реализации распределения

коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  двух участков, соответствует дисперсии выражения (3.55), иными словами она равна разнице полной мощности сигнала на выходе интерферометра и мощности постоянной составляющей сигнала на выходе интерферометра и аналогично (3.15) равна:

$$(\sigma_{II}^{\rho})^2 = E_t \left\langle E_T \left\langle (I_{scat2}^{\rho}(t))_{inst} \right\rangle E_T \left\langle (I_{scat2}^{\rho}(t))_{inst} \right\rangle \right\rangle - \left( E_t \left\langle E_T \left\langle (I_{scat2}^{\rho}(t))_{inst} \right\rangle \right\rangle \right)^2 \quad (3.56),$$

где  $E_t \langle \rangle$  – обозначает усреднение по времени внешнего воздействия  $t$ . Имеем, см. приложение 15, аналогично (3.16) и (3.17):

$$(\sigma_{II}^{\rho})^2 = 4(\operatorname{Re}(X))^2 \left[ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Lambda))^2 \right] + 4(\operatorname{Im}(X))^2 \left[ 2 \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Lambda))^2 \right] \quad (3.57)$$

или

$$(\sigma_{II}^{\rho})^2 = 2(\operatorname{Im}(X))^2 \Lambda^2 \quad \text{при малых } \Lambda \quad (3.58),$$

где  $X = F + G + H$ . Можно аналогично предыдущему пункту сказать, что мощности четных компонент с частотами:  $2\omega, 4\omega, \dots, 2k\omega$ , равны соответственно:  $8(\operatorname{Re}(X))^2 (J_{2k}(\Lambda))^2$ , а нечетных компонент с частотами:  $\omega, 3\omega, \dots, (2k+1)\omega$ , равны соответственно:  $8(\operatorname{Im}(X))^2 (J_{2k+1}(\Lambda))^2$ .

Величина мощности полезного сигнала для конкретной реализации  $\{\rho\}$  зависит, теперь от величин  $(\operatorname{Im}(X))^2$  и  $(\operatorname{Re}(X))^2$ , которые могут быть выражены через  $F, G, H$  и  $F^*, G^*, H^*$ :

$$(\operatorname{Im} X)^2 = -\frac{(X - X^*)^2}{4}, \quad (\operatorname{Re} X)^2 = \frac{(X + X^*)^2}{4} \quad (3.59).$$

Привычным образом, рассмотрим среднее значение мощности полезного сигнала (3.57), по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  двух участков, будем называть эту величину *средней мощностью полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ*. Для этого усредним по ансамблю  $\{\rho\}$  выражения (3.57) и (3.58).

$$\sigma_{II}^2 = E_\rho \left\langle (\sigma_{II}^\rho)^2 \right\rangle = 4E_\rho \left\langle (\operatorname{Re}(X))^2 \right\rangle \left[ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Lambda))^2 \right] + 4E_\rho \left\langle (\operatorname{Im}(X))^2 \right\rangle \left[ 2 \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Lambda))^2 \right] \quad (3.60)$$

или

$$\sigma_{II}^2 = E_\rho \left\langle (\sigma_{II}^\rho)^2 \right\rangle = 2E_\rho \left\langle (\operatorname{Im}(X))^2 \right\rangle \Lambda^2 \quad \text{при малых } \Lambda \quad (3.61).$$

Рассмотрим, средние значения:  $E_\rho \left\langle (\operatorname{Re}(X))^2 \right\rangle$  и  $E_\rho \left\langle (\operatorname{Im}(X))^2 \right\rangle$  аналогично (3.21) и (3.22). Можно показать, см. приложение 16, что в силу некоррелированности комплексных амплитуд рассеяния для центров, расположенных на разных отрезках сигнального участка: до и после точки воздействия  $O$  и разных отрезках опорного участка, разделенных симметричной точкой  $O'$ , имеет место:  $E_\rho \langle XX \rangle = E_\rho \langle X^* X^* \rangle = 0$ , поэтому,

$$E_\rho \left\langle (\operatorname{Re}(X))^2 \right\rangle = E_\rho \left\langle (\operatorname{Im}(X))^2 \right\rangle = \frac{1}{2} E_\rho \langle XX^* \rangle \quad (3.62).$$

Усреднение произведения  $E_\rho \langle XX^* \rangle$  дает, см. приложение 16:

$$\begin{aligned} E_\rho \langle XX^* \rangle &= \\ &= \rho_0^2 \int_0^l \int_l^L E_T \left\langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \right\rangle E_T \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \right\rangle dz_1 dz_2 + \\ &+ \rho_0^2 \int_0^l \int_l^L E_T \left\langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \right\rangle E_T \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \right\rangle dz_1 dz_2 + \\ &+ \rho_0^2 \int_l^L \int_l^L E_T \left\langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \right\rangle E_T \left\langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \right\rangle dz_1 dz_2 \end{aligned} \quad (3.63).$$

Применяя (П.2) и делая замены переменных:  $\tau_1 = 2z_1/v_{gr}$ ,  $\tau_2 = 2z_2/v_{gr}$  получаем:

$$\begin{aligned} E_\rho \langle XX^* \rangle &= \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^\theta \int_0^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 + \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^\theta \int_0^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^\theta \int_0^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (3.64),$$

где  $\theta = 2l/v_{gr}$ ,  $T = 2L/v_{gr}$ . Поэтому, подставляя (3.64) в (3.62) и (3.60), (3.61)

получим:

$$\sigma_{II}^2 = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Lambda))^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Lambda))^2 \right] \times \left[ \begin{aligned} & v_{gr}^2 \rho_0^2 I_s^2 \int_0^{\theta} \int_0^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + v_{gr}^2 \rho_0^2 I_s^2 \int_0^{\theta} \int_0^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + v_{gr}^2 \rho_0^2 I_s^2 \int_{\theta}^T \int_{\theta}^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \right] \quad (3.65),$$

$$\sigma_{II}^2 = \Lambda^2 \times \left[ \begin{aligned} & \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^{\theta} \int_0^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \int_0^{\theta} \int_0^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \frac{v_{gr}^2}{4} \rho_0^2 I_s^2 \int_{\theta}^T \int_{\theta}^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \right] \quad \text{при малых } \Lambda \quad (3.66).$$

Выражения (3.65) и (3.66) для двухканального ВИРИ отличаются от соответствующих выражений (3.26) и (3.27) для одноканального ВИРИ наличием дополнительных второго и третьего слагаемых. Второе слагаемое в (3.65) и (3.66) возникает вследствие интерференции излучения, рассеянного частью сигнального отрезка, расположенной после точки воздействия  $O$ , и излучения, рассеянного частью опорного отрезка, расположенной перед симметричной точкой  $O'$ . Третье слагаемое возникает вследствие интерференции излучения, рассеянного той же частью сигнального отрезка и излучения, рассеянного частью опорного отрезка, расположенной после точки  $O'$ . Второе слагаемое аналогично первому, вычисление третьего слагаемого приведено в приложении 17. В итоге выражение для усредненной по ансамблю  $\{\rho\}$  мощности полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ с двумя одинаковыми участками с длиной  $L$ , при воздействии на один из участков интерферометра гармонического фазового



воздействия с амплитудой  $\Lambda$  в точке  $O$ , расположенной на расстоянии  $l$  от начала рассеивающего отрезка, имеет вид:

$$\sigma_{II}^2 = \frac{4(I_{scat}^{mean})^2}{T^2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Lambda))^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Lambda))^2 \right] \times \left[ \frac{\tau_{coh}^2}{2} \left( \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) \right) + \tau_{coh}(T - \theta) \right] \quad (3.67),$$

$$\sigma_{II}^2 = \Lambda^2 \frac{(I_{scat}^{mean})^2}{T^2} \left[ \frac{\tau_{coh}^2}{2} \left( \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) \right) + \tau_{coh}(T - \theta) \right] \quad \text{при малых } \Lambda \quad (3.68),$$

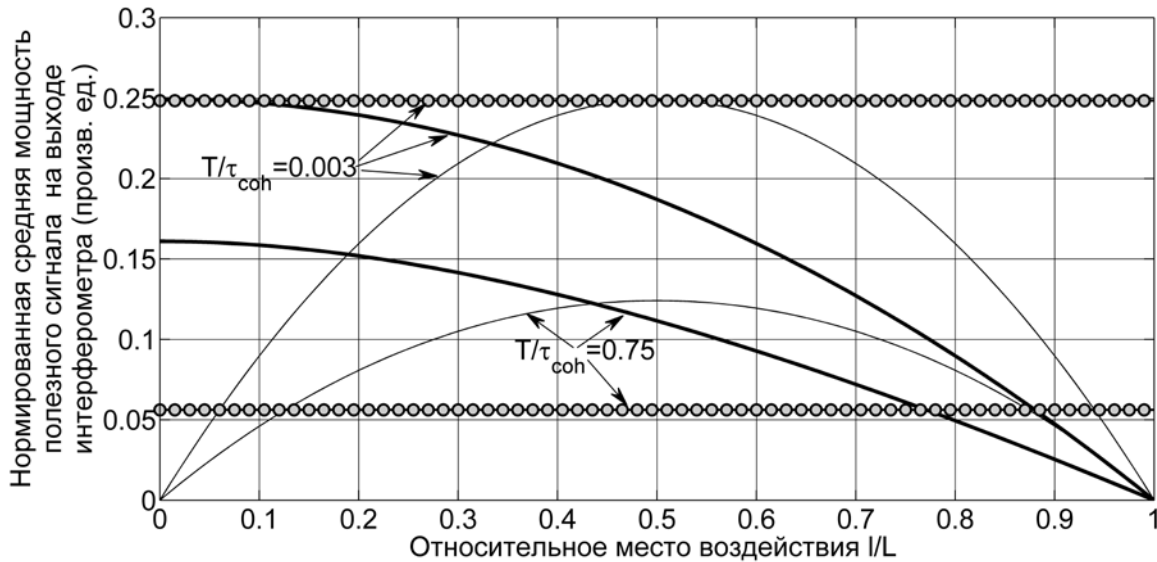
где  $I_{scat}^{mean} = I_s \frac{v_{gr}}{2} \rho_0 T$  – средняя по ансамблю  $\{\rho\}$  интенсивность рассеянного излучения для одного рассеивающего участка, найденная в первой главе, пункт 1.3. Заметим, что среднее по ансамблю  $\{\rho\}$  значение суммарной интенсивности рассеянного излучения для двухканального ВИРИ, в два раза больше величины  $I_{mean}^{scat}$

Произведем сравнение мощностей полезных сигналов, средних по ансамблю  $\{\rho\}$ , для одноканального и двухканального ВИРИ, при воздействии на них внешнего гармонического сигнала (3.12) со средней мощностью полезного сигнала на выходе интерферометра Маха – Цендера, при том же гармоническом воздействии. Пусть:  $\Lambda$  и  $\Theta$  – соответственно, фазовые амплитуды внешних воздействий, для одноканального и двухканального ВИРИ и интерферометра Маха – Цендера, в предположении полностью поляризованного излучения.

На рисунке 3.4 показаны графики зависимостей величин: средней мощности полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ, нормированной на квадрат среднего значения интенсивности рассеянного излучения, на выходе интерферометра:  $\sigma_I^2 / \left( \Lambda^2 (I_{scat}^{mean})^2 \right)$ , средней мощности полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ, нормированной на квадрат среднего значения

интенсивности на выходе интерферометра:  $\sigma_{II}^2 / \left( \Lambda^2 (2I_{scat}^{mean})^2 \right)$ , и средней мощности полезного сигнала на выходе интерферометра Маха – Цендера,

а)



б)

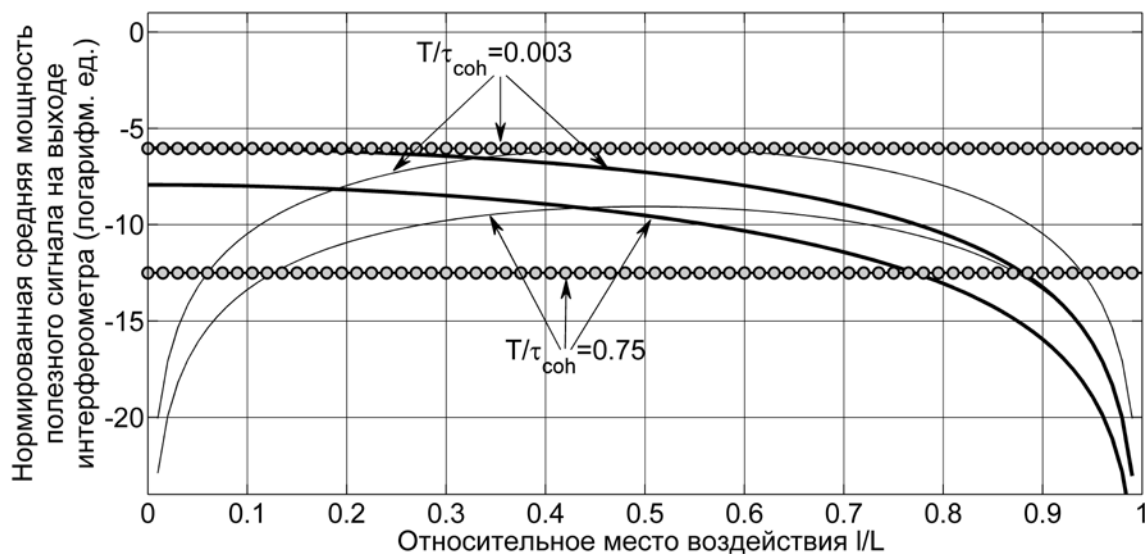


Рисунок 3.4. Зависимости нормированной средней мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ, в линейном (а) и в логарифмическом (б) масштабе, от относительного положения места воздействия, для одноканального ВИРИ – тонкие линии, двухканального ВИРИ с участками одинаковой длины – толстые линии и для интерферометра Маха – Цендера – круги, при двух различных значениях отношения максимального времени задержки в интерферометре и времени когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.003$  и  $T/\tau_{coh} = 0.75$  и равных по величине амплитудах фазовых воздействий.

нормированной на квадрат среднего значения интенсивности на выходе интерферометра:  $E_\alpha \langle \sigma_{MZ}^2 \rangle / (\Theta^2 I_s^2)$  от относительного места воздействия на волокна интерферометров, задаваемого параметром:  $\theta/T = l/L$ , при двух различных значениях отношения:  $T/\tau_{coh} = 0.003$  и  $T/\tau_{coh} = 0.75$ , в предположении полностью поляризованного рассеянного излучения. Отметим, что, как и ранее, в приведенных графиках исключена зависимость от величин амплитуд фазовых воздействий  $\Theta$  или  $\Lambda$ , то есть можно считать, что графики отображают величину полезного сигнала *при одинаковых эффективных фазовых воздействиях на волокно, при этом, опять, величина реального внешнего воздействия на волокно интерферометра Маха – Цендера в два раза больше по амплитуде, чем величина реального воздействия для ВИРИ.*

Амплитуда воздействия предполагается малой, так что можно пользоваться формулами: (3.29), (3.68) и (3.33).

Из графиков на рисунке 3.4 видно, что нормированная средняя мощность полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ зависит от положения точки воздействия и максимальна в случае, когда воздействие приложено в начале рассеивающего участка. Средняя мощность полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ больше средней мощности полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ при воздействии в начале сигнального участка. При воздействии в конце сигнального участка одноканальный ВИРИ имеет более высокое значение средней мощности полезного сигнала, чем двухканальный ВИРИ. *Максимальная средняя мощность полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ достигается при воздействии в самом начале сигнального рассеивающего участка, напротив, минимальная средняя мощность полезного сигнала достигается при воздействии в конце рассеивающего участка.*

Из рисунка 3.4 видно, что при увеличении отношения  $T/\tau_{coh}$ , что может быть вызвано *либо снижением когерентности источника, либо одновременным*

одинаковым увеличением протяженностей сигнального и опорного рассеивающих участков двухканального ВИРИ (или увеличением задержки в интерферометре Маха – Цендера), нормированные средние мощности полезных сигналов на выходах интерферометров снижаются, причем, для интерферометра Маха – Цендера это снижение происходит быстрее, чем для двухканального ВИРИ. Так при увеличении отношения  $T/\tau_{coh}$  в 250 раз, нормированная средняя мощность полезного сигнала для двухканального ВИРИ снижается в точке максимального значения на 2 дБ, а для интерферометра Маха – Цендера – на 6.5 дБ

Из рисунка 3.4 также следует, что двухканальный ВИРИ, состоящий из двух одинаковых рассеивающих участков, слабо реагирует на внешнее воздействие, в случае, когда оно приложено близко к концу сигнального рассеивающего участка.

Отметим важное обстоятельство: графики на рисунках 3.4, построены для средних величин полезных сигналов, нормированных на квадрат среднего значение интенсивности рассеянного излучения для двух интерферометров: одноканального и двухканального ВИРИ, иными словами эти зависимости справедливы при одинаковых средних интенсивностях излучений на выходах этих двух интерферометров. Заметим, что это условие реализуется, когда в двухканальный ВИРИ вводится в два раза меньшая мощность, чем в одноканальный ВИРИ. Часто бывает удобнее обеспечивать одинаковую мощность излучения, вводимого в волокна одноканального и двухканального ВИРИ. Средняя интенсивность рассеянного излучения для двухканального ВИРИ, в этом случае, будет в два раза выше средней интенсивности рассеянного излучения для одноканального ВИРИ. Средняя мощность полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ возрастет, в этом случае, в 4 раза, рисунок 3.5.

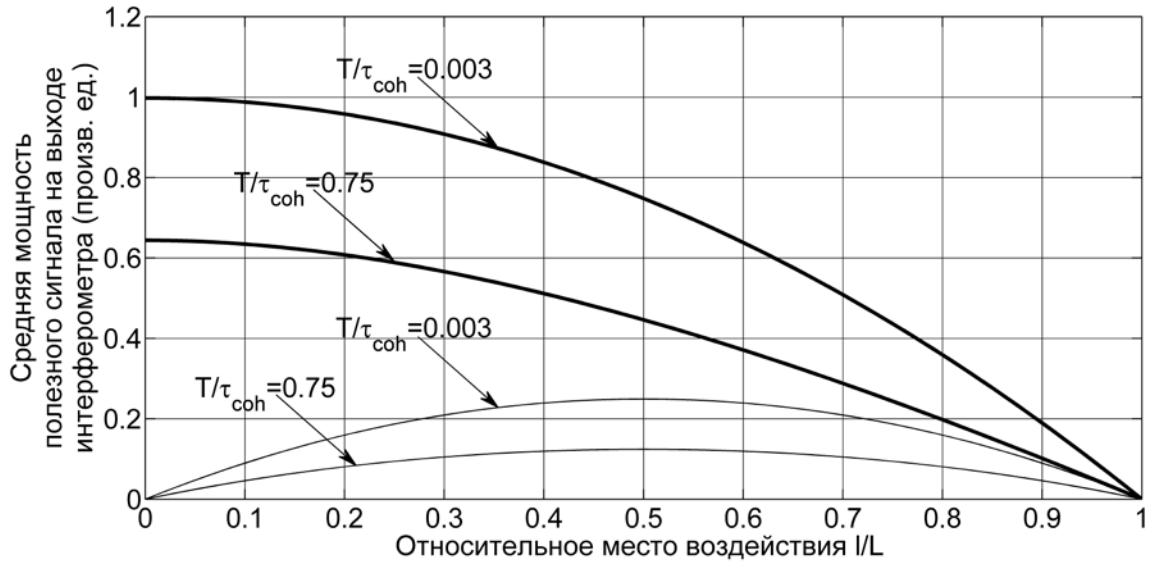


Рисунок 3.5. Зависимости средней мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ, в линейном масштабе, от относительного положения места воздействия, для одноканального ВИРИ – тонкие линии и двухканального ВИРИ с участками одинаковой длины – толстые линии, при одинаковых мощностях излучений, вводимых в оптические волокна интерферометров и при двух различных значениях отношения максимального времени задержки в интерферометре и времени когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.003$  и  $T/\tau_{coh} = 0.75$  и равных по величине амплитуд фазовых воздействий.

Из рисунка 3.5 видно, что для двух конфигураций ВИРИ: одноканальной и двухканальной, при одинаковых мощностях излучений, вводимых в их волокна, средняя мощность полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ всегда выше, чем средняя мощность полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ. Интересно отметить, что *разность средних, не нормированных мощностей полезного сигнала для одноканального ВИРИ:  $\sigma_I^2$  и двухканального ВИРИ:  $\sigma_{II}^2$ ,  $\sigma_{II}^2 - \sigma_I^2$ , при условии одинаковых мощностей, вводимых в волокна интерферометров, при фиксированном отношении  $T/\tau_{coh}$  и одинаковом внешнем воздействии, практически линейно зависит от относительного места этого воздействия на рассеивающий участок, см. рисунок 3.6.*

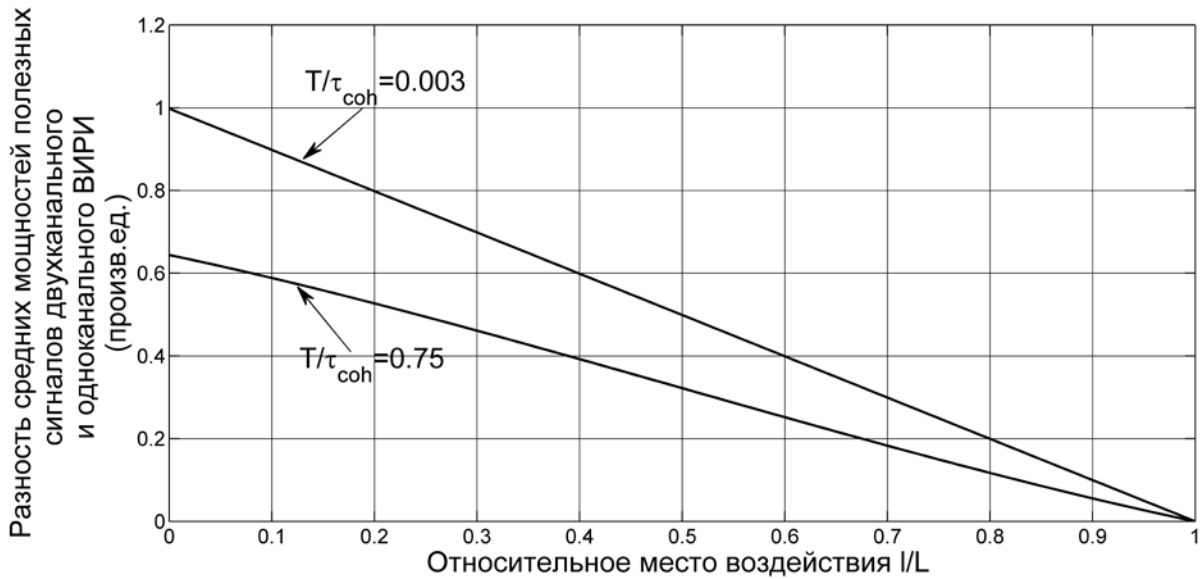


Рисунок 3.5. Зависимости разностей средних мощностей полезных сигналов на выходах одноканального и двухканального ВИРИ, от относительного положения места воздействия, при одинаковых мощностях излучений, вводимых в оптические волокна интерферометров и при двух различных значениях отношения максимального времени задержки в интерферометре и времени когерентности:  $T/\tau_{coh} = 0.003$  и  $T/\tau_{coh} = 0.75$  и равных по величине амплитудах фазовых воздействий. Зависимость близка к линейной.

Данное обстоятельство открывает возможность для оценки относительного положения места воздействия, путем сравнения откликов двух интерферометров: одноканального ВИРИ и двухканального ВИРИ, у которого сигнальный отрезок совпадает с отрезком первого интерферометра.

Рассмотрим случай частично поляризованного рассеянного излучения со степенью поляризации  $P$  и состоянием поляризации одинаковым для двух рассеивающих участков. В этом случае интенсивность каждой из ортогональных поляризационных компонент находится путем умножения интенсивности полностью поляризованного излучения на:  $(1-P)/2$  и  $(1+P)/2$ , соответственно. Средняя мощность полезного сигнала, содержащаяся в ортогональных поляризационных компонентах, может быть выражена через среднюю мощность полезного сигнала для полностью поляризованного рассеянного излучения: (3.67) или (3.68):

$$\begin{aligned} [\sigma_{II}^2]_{pol1} &= \frac{(1-P)^2}{4} \sigma_{II}^2 \\ [\sigma_{II}^2]_{pol2} &= \frac{(1+P)^2}{4} \sigma_{II}^2 \end{aligned} \quad (3.69).$$

Суммарная средняя по ансамблю  $\{\rho\}$  мощность полезного сигнала для частично поляризованного рассеянного излучения, при внешнем гармоническом воздействии на сигнальный отрезок двухканального ВИРИ равна сумме средних мощностей двух поляризационных компонент, в силу того, что они являются некоррелированными:

$$[\sigma_{II}^2]_{partpol} = \frac{1+P^2}{2} \sigma_{II}^2 \quad (3.70)$$

Средняя мощность полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ, для частично поляризованного излучения, таким образом, меньше чем, для полностью поляризованного излучения в  $(1+P^2)/2$  раз, аналогично рассмотренному ранее случаю одноканальному ВИРИ.

### **3.4. Связь средней мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ с дисперсией интенсивности рассеянного излучения по ансамблю независимых рассеивающих участков**

Рассмотрим, как связаны нормированные средние по ансамблю  $\{\rho\}$  мощности полезного сигнала на выходах одноканального и двухканального ВИРИ с дисперсией интенсивности рассеянного излучения по ансамблю  $\{\rho\}$ , см. первую главу. Рассмотрим случай полностью поляризованного рассеянного излучения. Пусть на одноканальный ВИРИ в точке  $O$ , удаленной от начала рассеивающего участка на расстояние  $l$ , происходит внешнее гармоническое воздействие вида (3.12) с малой амплитудой  $m$ . Дисперсия интенсивности по ансамблю  $\{\rho\}$  для всего рассеивающего участка длиной  $L = Tv_{gr}/2$ , найденная нами в первой главе, равна:

$$\begin{aligned}
D(I_{scat}) &= \frac{(I_{scat}^{mean})^2}{T^2} \left( \frac{\tau_{coh}^2}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}^2}{2} + T\tau_{coh} \right) = \\
&= (I_{scat}^{mean})^2 \left( \frac{\tau_{coh}^2}{2T^2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}^2}{2T^2} + \frac{\tau_{coh}}{T} \right)
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Дисперсия (3.71) при фиксированных параметрах источника излучения определяется только длиной рассеивающего участка  $L$ , поэтому для отрезков до и после точки воздействия  $O$  дисперсия находится путем подстановки в (3.71) вместо максимального значения времени распространения  $T$ , эквивалентных времен распространения:  $\theta = 2l/v_{gr}$  и  $T - \theta = 2(L-l)/v_{gr}$ :

$$D1(I_{scat}) = \frac{(I_{scat}^{mean})^2}{T^2} \left( \frac{\tau_{coh}^2}{2} \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}^2}{2} + \theta\tau_{coh} \right) \tag{3.72},$$

$$D2(I_{scat}) = \frac{(I_{scat}^{mean})^2}{T^2} \left( \frac{\tau_{coh}^2}{2} \exp\left(-\frac{2(T-\theta)}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}^2}{2} + (T-\theta)\tau_{coh} \right) \tag{3.73},$$

нормировка в выражениях для дисперсий (3.72) и (3.73) на  $(I_{scat}^{mean})^2/T^2$  остается той же, что и для выражения (3.71), так как уменьшение длины рассеивающего участка приводит к пропорциональному уменьшению среднего значения интенсивности рассеянного им излучения. Нормированная средняя мощность полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ при малом воздействии равна (3.29):

$$\begin{aligned}
[\sigma_I^2]_{norm} &= \frac{\sigma_I^2}{\Lambda^2 (I_{scat}^{mean})^2} = \\
&= \frac{1}{T^2} \left( \frac{\tau_{coh}^2}{4} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}^2}{4} \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}^2}{4} \exp\left(\frac{2\theta-2T}{\tau_{coh}}\right) + \frac{\tau_{coh}^2}{4} \right)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Сравнивая (3.71), (3.72), (3.73) и (3.74), находим, что:

$$[\sigma_I^2]_{norm} = \frac{1}{2(I_{scat}^{mean})^2} (D(I_{scat}) - D1(I_{scat}) - D2(I_{scat})) \tag{3.75}.$$

Таким образом, зная дисперсию распределения интенсивности рассеянного волокном излучения по ансамблю  $\{\rho\}$ , степень когерентности излучения



используемого полупроводникового лазера, а так же предполагаемое место воздействия можно оценить нормированную среднюю мощность полезного сигнала при внешнем гармоническом воздействии на оптическое волокно одноканального ВИРИ.

Максимальная нормированная средняя мощность полезного достигается при воздействии в центре рассеивающего участка одноканального ВИРИ, см. рисунок 3.2. Подставляя в (3.74)  $\theta = T/2$ , находим:

$$\left( [\sigma_I^2]_{norm} \right)_{\max} = \frac{1}{2(I_{scat}^{mean})^2} \left( D(I_{scat}) - \frac{(I_{scat}^{mean})^2}{T^2} \left( \tau_{coh}^2 \exp\left(-\frac{T}{\tau_{coh}}\right) - \tau_{coh}^2 + T\tau_{coh} \right) \right) \quad (3.76).$$

Положим  $x = T/\tau_{coh}$  и рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \exp(-x) - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad (3.77),$$

которая монотонно убывает на интервале  $x \in [0, \infty]$ , стремясь в пределе малых значений  $x$  к максимальному значению:  $1/2$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, максимальное значение нормированной средней мощности полезного сигнала на выходе одноканального ВИРИ ограничена снизу значением:

$$\left( D(I_{scat}) - (I_{scat}^{mean})^2 / 2 \right) / 2(I_{scat}^{mean})^2 : \quad (3.78),$$

$$\frac{1}{2(I_{scat}^{mean})^2} \left( D(I_{scat}) - \frac{(I_{scat}^{mean})^2}{2} \right) \leq \left( [\sigma_I^2]_{norm} \right)_{\max}$$

то есть ограничена значением дисперсии интенсивности рассеянного излучения одного рассеивающего участка.

Рассмотрим теперь двухканальный ВИРИ, на сигнальный отрезок которого, в точке  $O$ , удаленной от начала рассеивающего участка на расстояние  $l$ , происходит внешнее гармоническое воздействие вида (3.12) с малой амплитудой

*m*. Нормированная средняя мощность полезного сигнала на выходе интерферометра равна (3.68):

$$\left[ \sigma_{II}^2 \right]_{norm} = \frac{\sigma_{II}^2}{\Lambda^2 (I_{scat}^{mean})^2} = \frac{1}{T^2} \left[ \frac{\tau_{coh}^2}{2} \left( \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) \right) + \tau_{coh} (T - \theta) \right] \quad (3.79),$$

Сравнивая (3.71), (3.72) и (3.79), находим, что:

$$\left[ \sigma_{II}^2 \right]_{norm} = \frac{1}{(I_{scat}^{mean})^2} (D(I_{scat}) - D1(I_{scat})) \quad (3.80).$$

Таким образом, зная дисперсию распределения интенсивности рассеянного волокном излучения по ансамблю  $\{\rho\}$ , степень когерентности излучения используемого полупроводникового лазера, а также предполагаемое место воздействия можно оценить нормированную среднюю мощность полезного сигнала при внешнем гармоническом воздействии на оптическое волокно двухканального ВИРИ.

Максимальная нормированная средняя мощность полезного достигается при воздействии в начале сигнального рассеивающего участка двухканального ВИРИ, см. рисунок 3.4. Подставляя в (3.79)  $\theta = 0$ , находим:

$$\left( \left[ \sigma_{II}^2 \right]_{norm} \right)_{max} = \left[ \frac{\tau_{coh}^2}{2T^2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}^2}{2T^2} + \frac{\tau_{coh}}{T} \right] = \frac{1}{(I_{scat}^{mean})^2} D(I_{scat}) \quad (3.81).$$

*Таким образом, мы получили важный результат: максимальная нормированная средняя мощность полезного сигнала на выходе двухканального ВИРИ, при воздействии на него внешнего гармонического сигнала, достигается при воздействии в начале сигнального рассеивающего участка, и равна нормированной дисперсии интенсивности рассеянного излучения одного рассеивающего участка.*

В предельном случае большой длины когерентности, имеем:

$$\lim_{\tau_{coh} \rightarrow \infty} \left( \left[ \sigma_{II}^2 \right]_{norm} \right) = \frac{T^2 - \theta^2}{T^2} \quad (3.82).$$

### 3.5. Среднее отношение сигнала к шуму (ОСШ) для одноканального и двухканального ВИРИ при внешнем гармоническом воздействии на оптическое волокно

Применим теперь полученные ранее результаты для средних по ансамблю  $\{\rho\}$  уровней шумов для двух схем ВИРИ и средних мощностей полезного сигнала на выходе ВИРИ при внешнем гармоническом воздействии, для оценки *среднего отношения сигнала к шуму и пороговой чувствительности одноканального и двухканального ВИРИ*.

В предыдущей главе было показано, что уровни шумов на выходах одноканального и двухканального ВИРИ вблизи нулевой частоты определяются, в основном, флуктуациями фазы источника излучения в интерферометрах. Данное обстоятельство связано с тем, что ВИРИ, в отличие от интерферометра Маха – Цендера или Майкельсона, не может быть сбалансирован, в том смысле, что между интерферирующими в нем полями рассеянных излучений всегда присутствует фазовая задержка.

Оценим вклады шумов различного вида в общий шум на выходе ВИРИ [81 – 83]. При падении оптического излучения на фотоприёмник, в нем возникает фототок пропорциональный поглощаемой оптической мощности:

$$i = \frac{\eta_{eff} e}{h\nu} P_{in} \quad (3.83),$$

где  $\eta_{eff}$  – квантовая эффективность (число эмитированных фотоэлектронов в расчёте на один поглощенный квант излучения),  $e$  – заряд электрона,  $h$  – постоянная Планка,  $\nu$  – частота оптического излучения,  $P_{in}$  – оптическая мощность, падающая на фотоприемник. Основными видами шумов, возникающих при регистрации оптического излучения *pin* (Positive – Intrinsic – Negative) фотодиодом, являются дробовые и тепловые шумы. Кроме того, если принимаемый сигнал имеет низкий уровень, при его оцифровке необходимо также учитывать шум квантования или шум дискретизации.

Дробовой шум возникает в силу того, что носителями тока являются дискретные частицы – электроны и дырки, образующиеся в полупроводнике фотоприемника при поглощении им оптического излучения. При малой мощности поглощаемого оптического излучения, необходимо учитывать статистические характеристики, возникающего фототока. Дробовой ток представляет собой случайный процесс, который описывается распределением Пуассона, и имеет белый энергетический спектр. Среднеквадратичное значение тока, вызываемое дробовым эффектом, определяется как :

$$\langle i_{SN}^2 \rangle = 2e i_s \Delta f \quad (3.84),$$

где  $i_s$  – ток вызванный полезным сигналом, в данном случае суммарной интенсивностью, падающей на фотоприемник,  $\Delta f$  – спектральная ширина полосы, в которой происходит измерение. Произведем оценку среднеквадратичного значения дробового тока, для рассматриваемого в настоящей работе эксперимента. Средняя оптическая мощность, падающая на фотоприемник, равна:  $P_{in} = -31$  дБм, что соответствует:  $P_{in} = 800$  нВт, квантовая эффективность  $\eta_{eff} = 0.95$ , оптическая спектральная полоса детектируемого сигнала, ограничивается с помощью фильтра низких частот и равна:  $\Delta f = 50$  кГц, соответственно, для фототока, образованного полезным сигналом, согласно (3.83) имеем:  $i_s = 0.95$  мкА, для среднеквадратичного значения шумового тока (3.84):  $\langle i_{SN}^2 \rangle = 1.5 \times 10^{-20} \text{ A}^2$ .

Тепловой или Джонсовский шум, возникает вследствие нарушения локальной электрической нейтральности, при случайном движении носителей заряда в полупроводнике на тепловых скоростях. Статистически независимые флуктуации заряда создают локальные электрические поля, которые складываясь друг с другом создают шумовую электродвижущую силу. Среднеквадратичное значение тока, вызываемого тепловым шумом, определяется как:

$$\langle i_T^2 \rangle = \frac{4kT}{R} \Delta f \quad (3.85),$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $R$  – сопротивление нагрузки. Для рассматриваемого эксперимента:  $T = 2000$  К,  $R \approx 400$  кОм,

соответственно:  $\langle i_T^2 \rangle = 1.42 \times 10^{-20} \text{ А}^2$ , что сравнимо со среднеквадратичным значением тока, вызванного дробовым эффектом.

Рассчитаем среднеквадратичное значение шумового тока вызванного флуктуациями фазы излучения полупроводникового лазера, пользуясь выражением (2.96) предыдущей главы и (3.83):

$$\langle i_{phase}^2 \rangle \approx \frac{2\tau_{coh}\Delta f}{T^2} \left( \frac{\eta e P_{in}}{h\nu} \right)^2 \left\{ \frac{T^2}{2} + \frac{3\tau_{coh}^2}{4} - T\tau_{coh} - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( \frac{3\tau_{coh}^2}{4} + \frac{T\tau_{coh}}{2} \right) \right\} \quad (3.86),$$

для максимального времени задержки  $T = 400$  нс, что соответствует времени распространения излучения на расстояние 40м и обратно, времени когерентности:  $\tau_{coh} = 160$  мкс, что соответствует спектральной ширине полосы лазерного источника:  $\Delta\nu = 2$  кГц, среднеквадратичное значение шумового тока равно:  $\langle i_{phase}^2 \rangle = 1490 \times 10^{-20} \text{ А}^2$ , что намного больше значений тепловых и дробовых шумов фотоприёмника.

Отметим, что фотоприемник, применяемый в работе, имеет гораздо более высокий уровень шума в силу наличия в его цепи радиочастотных усилителей, а также дополнительных сопротивлений. На рисунке 3.7. показаны экспериментальные спектры мощности шума интенсивности на выходе одноканального ВИРИ, для лазера со спектральной шириной полосы:  $\Delta\nu = 2$  кГц и разными средними мощностями сигналов, регистрируемых фотоприемником, а также уровень собственных шумов фотоприемника, для случая, когда на него не подается оптический сигнал. Верхняя кривая соответствует усредненному спектру мощности шума интенсивности для сигнала со средней мощностью: – 31 дБм, средняя кривая, соответствует усредненному спектру мощности шума интенсивности для сигнала со средней мощностью: – 34 дБм, нижняя кривая соответствует усредненному спектру мощности собственных шумов фотоприемника.

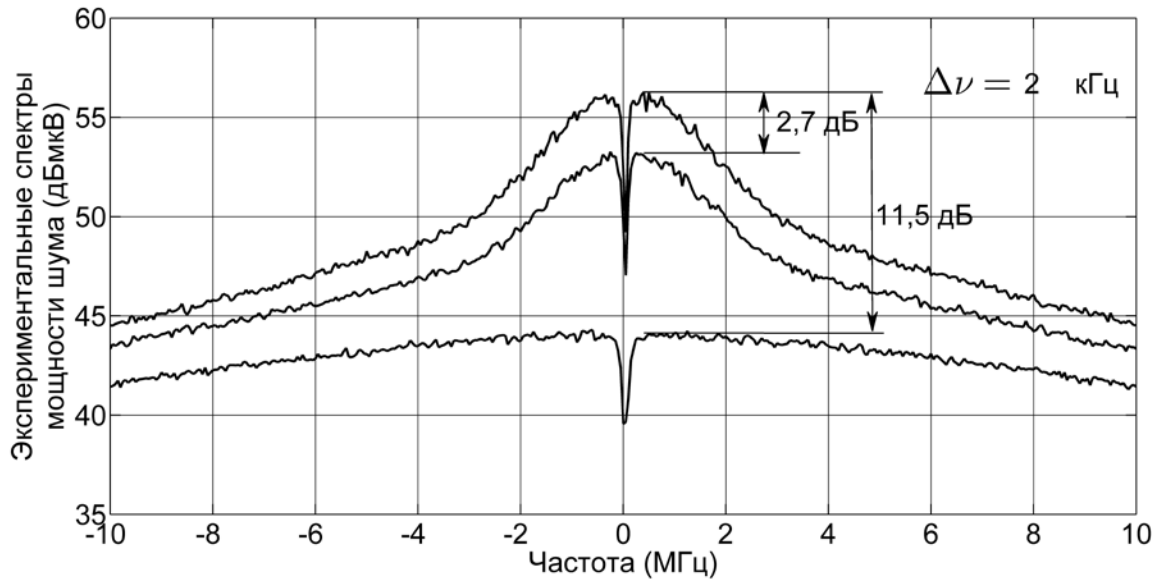


Рисунок 3.7. Экспериментальные усредненные по 500 реализациям спектры мощности шума интенсивности на выходе одноканального ВИРИ с длиной рассеивающего участка 47.5 м, лазером со спектральной шириной полосы  $\Delta\nu = 2$  кГц и разными средними мощностями рассеянного излучения. Верхняя кривая – средний уровень мощности рассеянного излучения: – 31 дБм, средняя кривая – средний уровень мощности рассеянного излучения: – 34 дБм. нижняя кривая – усредненный спектр мощности шума фотоприемника, при отсутствии оптического сигнала на его входе.

В области частот, близких к нулевой, разница между верхней кривой и средним собственным уровнем шума фотоприемника составляет: 11.5 дБ. Соответственно, при вычислении среднего отношения сигнала к шуму необходимо учесть, что в этой области частот средний уровень мощности шума фотоприемника ниже среднего уровня мощности сигнала на 11.5 дБ.

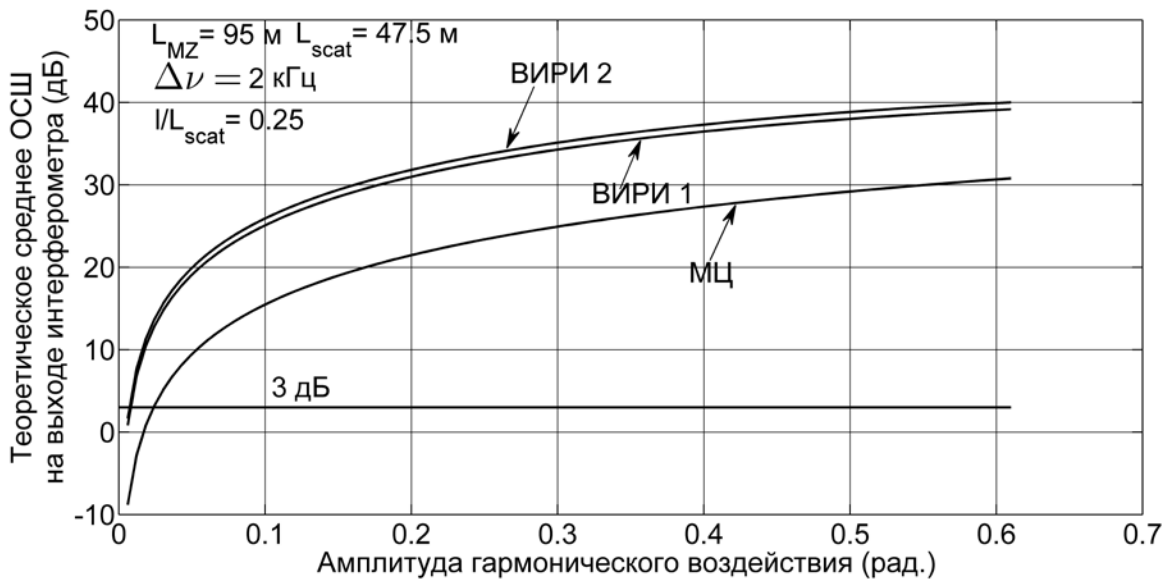
Приведенная оценка еще раз подтверждает, что преобладающим вкладом в шум на выходе ВИРИ в области частот, близких к нулевой, является шум, вызванный шумовыми флуктуациями фазы источника излучения. Таким образом, при воздействии на ВИРИ внешнего сигнала, например, гармонического растяжения чувствительного волокна, в некоторой малой области, минимальное значение амплитуды этого воздействия, которое может быть зафиксировано, ограничивается, в основном, уровнем шумов, вызванных флуктуациями фазы полупроводникового лазера (3.86). Разумной характеристикой средней

чувствительности ВИРИ к внешним воздействиям является отношение средней по ансамблю  $\{\rho\}$  мощности полезного сигнала, при воздействии на интерферометр гармонического возмущения, и среднего по ансамблю  $\{\rho\}$  уровня мощности шумов интенсивности в спектральной полосе измерения. В дальнейшем изложении будем называть эту характеристику *средним отношением сигнала к шуму или средним ОСШ*.

Для одноканального ВИРИ среднее ОСШ определяется отношением выражений: (3.28) или (3.29) и (2.96), с учетом полосы измерения. Для двухканального ВИРИ среднее ОСШ определяется отношением выражений: (3.67) или (3.68) и выражения (2.96) умноженного на 4, с учетом полосы измерения. Для интерферометра Маха – Цендера среднее ОСШ определяется отношением выражений (3.34) или (3.35) и средним значением по положению рабочей точки от выражений (2.46), (2.47) [53, 79].

На рисунке 3.8 показаны *теоретические* зависимости среднего ОСШ (для шумов, определяемых флуктуациями фазы источника излучения) для интерферометров, Маха – Цендера с длиной линии задержки равной  $L_{MZ} = 95$  м, одноканального ВИРИ, имеющим длину участка:  $L_{scat} = 47.5$  м и двухканальный ВИРИ с одинаковой длиной участков:  $L_{scat} = 47.5$  м, при относительном положении точки воздействия  $O$  равном:  $l/L_{scat} = 1/4$ , от амплитуды воздействующего гармонического сигнала в спектральной полосе измерения:  $\Delta f = 50$  кГц, для двух различных значений спектральных ширин полос источников.

а)



б)

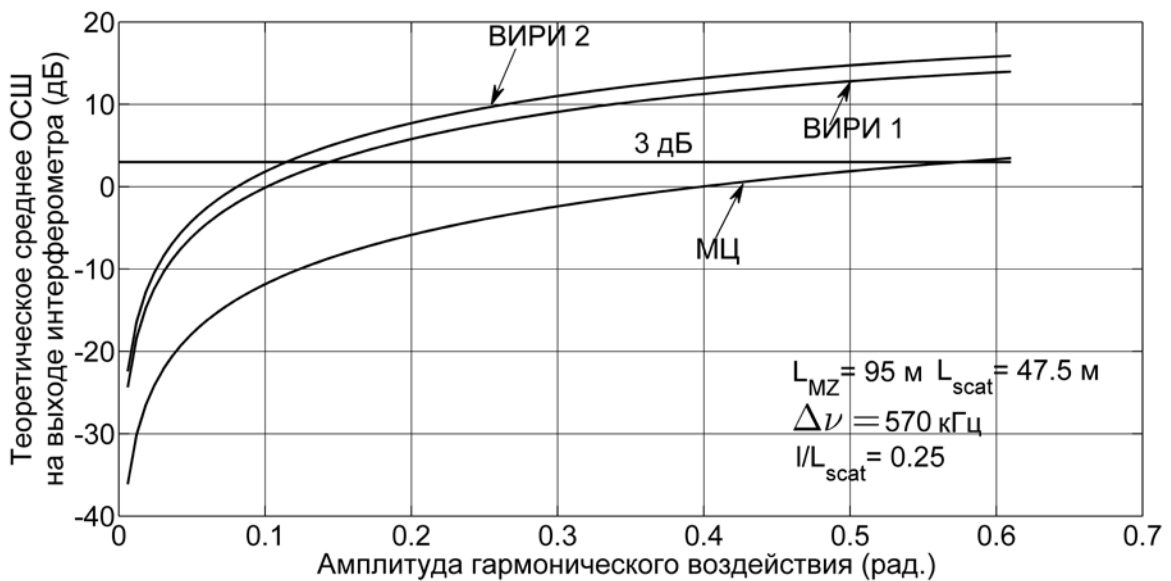


Рисунок 3.8. Теоретические зависимости среднего ОСШ в спектральной полосе  $\Delta f = 50$  кГц, для интерферометра Маха – Цендера с разностью длин плеч:  $L_{MZ} = 95$  м, одноканального ВИРИ и двухканального ВИРИ с длинами участков  $L_{scat} = 47.5$  м, при относительном положении точки воздействия  $O$  равном:  $l/L_{scat} = 1/4$ , от амплитуды внешнего гармонического воздействия, с полупроводниковым лазерным источником со спектральной шириной полосы (а)  $\Delta \nu = 2$  кГц и (б)  $\Delta \nu = 570$  кГц. Горизонтальной линией показано пороговое значение отношения сигнала и шума, равное 3 дБ. Надписи ВИРИ 1, ВИРИ 2 и МЦ, соответствуют графикам, соответственно, для одноканального и двухканального ВИРИ и интерферометра Маха – Цендера.



Предполагается, что для интерферометра Маха – Цендера, состояния поляризации для интерферирующих полей одинаковые. Для ВИРИ предполагается, что излучение частично поляризовано, со степенью поляризации  $P = 1/3$ . Временная задержка интерферирующих полей в интерферометре Маха – Цендера равна максимальной временной задержке полей в ВИРИ и соответствует длине линии задержки равной  $L_{MZ} = 2L_{scat} = 95$  м. Для всех трех интерферометров предполагается, что амплитуда внешнего воздействия одинаковая, при этом учтено, что в ВИРИ оптическое излучение проходит область воздействия дважды, поэтому модуляционный эффект, оказываемый одним и тем же воздействием на оптическое волокно, для ВИРИ в два раза больше, чем для интерферометра Маха – Цендера. Предполагается, что средние мощности рассеянных излучений на выходах одноканального и двухканального ВИРИ равны друг другу. В этом случае необходимо учесть, что в формуле для средней мощности полезного сигнала для двухканального ВИРИ (3.67) или (3.68) средняя интенсивность рассеянного излучения для одного рассеивающего участка:  $I_{scat}^{mean}$  должна быть уменьшена в два раза. Вспомним также, что средний шум интенсивности для двухканального ВИРИ в 4 раза выше, чем средний шум интенсивности для одноканального ВИРИ см. (2.92), при условии одинаковой мощности, заводимой в оба рассеивающих участка. Если вводимая в двухканальный ВИРИ мощность в два раза меньше мощности, вводимой в одноканальный ВИРИ, средние уровни шумов интенсивности на выходах этих двух интерферометров будут равны друг другу. Таким образом, обеспечивая равенство выходных мощностей для одноканального и двухканального ВИРИ, мы обеспечиваем равенство шумов на их выходах, но при этом уменьшаем значение полезного сигнала для двухканального ВИРИ в 4 раза.

Пороговой чувствительностью ВИРИ, по аналогии с пороговой чувствительностью интерферометра Маха – Цендера [72, 84], можно считать значение амплитуды внешнего воздействия, когда средняя мощность полезного сигнала в два раза больше средней мощности шума, в некоторой заданной

спектральной полосе измерения, то есть, когда среднее ОСШ составляет 3дБ в логарифмическом масштабе.

Как видно из рисунка 3.8 (а), для лазера с высокой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 2$  кГц, теоретическое среднее ОСШ достигает значения 3 дБ в спектральной полосе измерения равной:  $\Delta f = 50$  кГц, при значениях амплитуд гармонических воздействий равных:

а)  $\Theta = 0.024$  рад, для интерферометра Маха – Цендера, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной см. (1.107): **5 нм**,

б)  $\Lambda = 0.0078$  рад, для одноканального ВИРИ, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной: **1,7 нм**, здесь учтено, что рассеянное излучение проходит участок воздействия дважды, увеличивая оптический путь в два раза.

в)  $\Lambda = 0.0071$  рад, для двухканального ВИРИ, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной **1,52 нм**, здесь учтено, что рассеянное излучение проходит участок воздействия дважды.

Из рисунка 3.7 (б) видно, что для лазера с низкой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 570$  кГц, теоретическое среднее ОСШ достигает значения 3 дБ в спектральной полосе измерения равной:  $\Delta f = 50$  кГц, при значениях амплитуд гармонических воздействий равных:

а)  $\Theta = 0.57$  рад, для интерферометра Маха – Цендера, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной: **122 нм**,

б)  $\Lambda = 0.14$  рад, для одноканального ВИРИ, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной: **30 нм**, здесь учтено, что рассеянное излучение проходит участок воздействия дважды,

в)  $\Lambda = 0.11$  рад, для двухканального ВИРИ, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной: **24 нм**, здесь учтено, что рассеянное излучение проходит участок воздействия дважды.

*Отметим, что, как было показано выше, см. рисунок 3.2, рисунок 3.4. средняя мощность полезного сигнала на выходе ВИРИ зависит от положения области воздействия на волокно, поэтому, среднее ОСШ для этих интерферометров может быть как больше, так и меньше среднего ОСШ для интерферометра Маха – Цендера, при одной и той же величине внешнего воздействия.*

Например, для случая, показанного на рисунке 3.8 (а), для лазера с высокой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 2$  кГц, при относительном положении области воздействия:  $l/L_{scat} = 1/4$ , среднее ОСШ для одноканального и двухканального ВИРИ больше среднего ОСШ для интерферометра Маха – Цендера, *при любых амплитудах внешнего гармонического воздействия.* Для одноканального ВИРИ разница между ними составляет: **9,4 дБ**. Для двухканального ВИРИ эта разница равна: **10.3 дБ**. При этом разница между значениями для одноканального и двухканального ВИРИ, составляет **0.9дБ**.

Если область воздействия для *одноканального ВИРИ* сместить в положение близкое к краям рассеивающего участка, определяемое как:  $l/L_{scat} = 0.025$  или  $l/L_{scat} = 0.975$ , то среднее ОСШ для этого ВИРИ и среднее ОСШ для интерферометра Маха – Цендера, *будут равны при любых амплитудах внешнего гармонического воздействия.*

Аналогично, для *двухканального ВИРИ*, смещение точки внешнего воздействия ближе к концу рассеивающего участка, в положение, определяемое как:  $l/L_{scat} = 0.95$ , приведет к тому, что среднее ОСШ для этого ВИРИ и среднее ОСШ для интерферометра Маха – Цендера *будут равны при любых амплитудах внешнего гармонического воздействия.*

Подобным же образом, для случая, изображенного на рисунке 3.8 (б), для лазера с низкой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 570$  кГц, при относительном положении области воздействия:  $l/L_{scat} = 1/4$ , среднее ОСШ для одноканального и двухканального ВИРИ больше среднего ОСШ для интерферометра Маха – Цендера, *при любых амплитудах внешнего гармонического воздействия.* Для

одноканального ВИРИ разница между ними составляет: **11,5 дБ**. Для двухканального ВИРИ эта разница равна: **13.4 дБ**. При этом разница между значениями для одноканального и двухканального ВИРИ, составляет **1.9дБ**.

Для *одноканального ВИРИ*, при использовании лазера с невысокой степенью когерентности, среднее ОСШ будет равно среднему ОСШ для интерферометра Маха – Цендера, *при любых амплитудах внешнего гармонического воздействия*, при относительном положении области воздействия, определяемом как:  $l/L_{scat} = 0.015$  или  $l/L_{scat} = 0.985$ .

Для *двухканального ВИРИ*, среднее ОСШ будет равно среднему ОСШ для интерферометра Маха – Цендера, *при любых амплитудах внешнего гармонического воздействия*, при относительном положении области воздействия, определяемом как:  $l/L_{scat} = 0.97$ .

*Таким образом, среднее ОСШ для ВИРИ, при заданной величине амплитуды внешнего гармонического воздействия, практически всегда выше среднего ОСШ для интерферометра Маха – Цендера, с аналогичными параметрами временной задержки интерферирующих полей и при одинаковой амплитуде внешнего гармонического растяжения волокна. То есть в среднем ВИРИ более чувствителен к внешним фазовым воздействиям на оптическое волокно, чем интерферометр Маха – Цендера.*

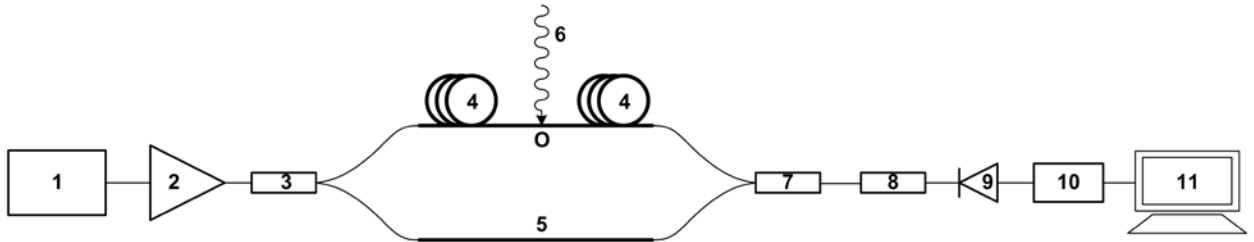
### **3.6. Экспериментальное измерение среднего ОСШ для одноканального и двухканального ВИРИ**

#### **3.6.1. Описание экспериментальной установки для измерения среднего ОСШ**

Для экспериментального подтверждения теоретических выводов были рассмотрены три конфигурации интерферометров с двумя лазерными источниками, имеющими различные степени когерентности.

*Первая конфигурация интерферометра* представляла собой интерферометр Маха – Цендера, см. рисунок 3.9, с разницей длин сигнального и опорного плеч

равной:  $L_{MZ} = 95$  м. Для определения среднего по всем положениям рабочей точки ОСШ, опорное плечо интерферометра подвергалось температурному воздействию от лампы накаливания.



*Рисунок 3.9. Схема экспериментальной установки интерферометра Маха – Цендера для исследования его чувствительности к внешним фазовым воздействиям. 1 – полупроводниковый лазер с распределенной обратной связью, 2 – эрбиевый волоконный усилитель, 3, 7 – оптический ответвитель, 4 – сигнальное плечо интерферометра, 5 – опорное плечо интерферометра, 6 – внешнее фазовое воздействие в точке O, 8 – оптический аттенюатор, 9 – фотоприемник, 10 – аналого-цифровой преобразователь, 11 – персональный компьютер.*

Вторая конфигурация интерферометра представляла собой одноканальный ВИРИ с длиной участка  $L_{scat} \approx 47.5$  м, рисунок 3.1., так что максимальное время задержки для интерферирующего рассеянного излучения соответствовало времени задержки в интерферометре Маха – Цендера. Для определения среднего по ансамблю  $\{\rho\}$  ОСШ, рассеивающее волокно интерферометра подвергалось температурному воздействию от лампы накаливания.

Третья конфигурация интерферометра представляла собой симметричный двухканальный ВИРИ с одинаковой длиной участков  $L_{scat} \approx 47.5$  м, рисунок 3.3, так что максимальное время задержки для интерферирующего рассеянного излучения также соответствовало времени задержки в интерферометре Маха – Цендера. Для определения среднего по ансамблю  $\{\rho\}$  ОСШ, сигнальное и опорное рассеивающие волокна интерферометра подвергались температурному воздействию от лампы накаливания.

Внешнее фазовое воздействие на интерферометры производилось путем намотки области волокна, длиной порядка 20 см. на пьезокерамический цилиндр, на который подавалось синусоидальное напряжение различной амплитуды от лабораторного генератора сигналов, в результате область волокна, намотанная на цилиндр, испытывала периодическое растяжение. Необходимое для сравнения результатов *равенство амплитуд внешних воздействий для трех исследуемых схем*, обеспечивалось тем, что волокно длиной  $L_{scat} \approx 47.5$  м, с областью, намотанной на пьезокерамический цилиндр, *являлось попеременно составной частью первой, второй и третьей схем интерферометров*.

При этом:

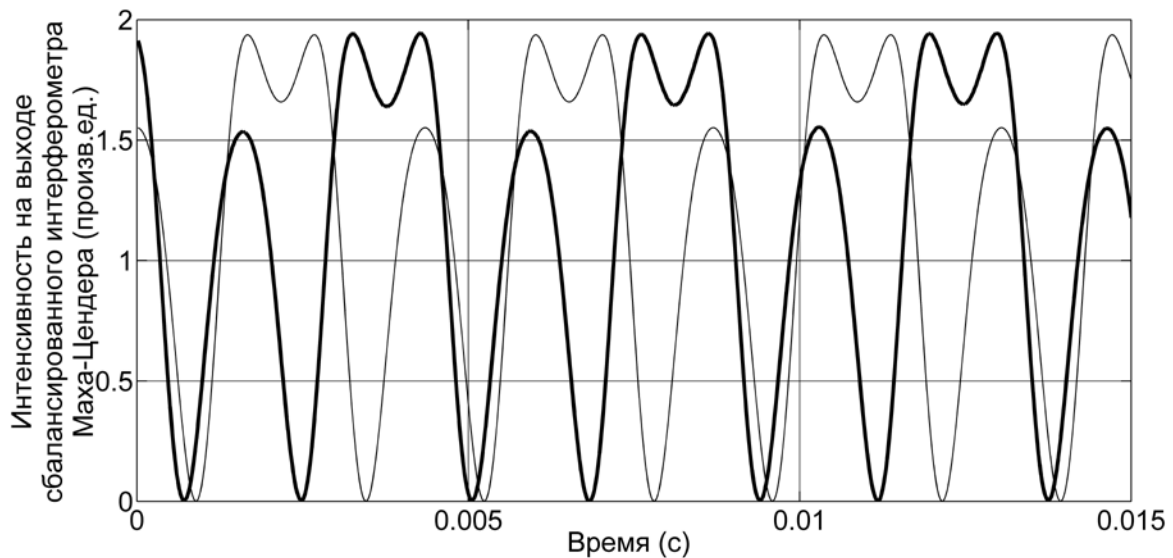
- для построения первой схемы – интерферометра Маха – Цендера, к концу волокна с областью намотки присоединялся дополнительный отрезок волокна такой же длины: 47.5, в итоге длина сигнального плеча составляла 95 м, длина опорного плеча, при этом, составляла минимальную возможную величину;
- для построения второй схемы – одноканального ВИРИ, в качестве сигнального плеча использовалось только волокно с областью намотки;
- для построения третьей схемы – двухканального ВИРИ, в качестве сигнального плеча использовалось волокно с областью намотки, в качестве опорного плеча использовалось волокно без намотки с длиной 47.5 м.

Для исключения отражений от торцов волокон в ВИРИ, на концах рассеивающих участков делались узлы малого радиуса, через которые происходило высвечивание излучения.

### **3.6.2. Калибровка зависимости амплитуды фазового воздействия на волокно от напряжения, подаваемого на пьезокерамический цилиндр**

Для точного количественного определения фазовой амплитуды внешнего воздействия, волокно с областью, намотанной на пьезокерамический цилиндр, было предварительно прокалибровано. Калибровка зависимости амплитуды фазового воздействия на волокно от подаваемого на пьезокерамический цилиндр

напряжения, производилась следующим образом: волокно с областью намотки длиной 47.5 м. включалось в качестве сигнального плеча в сбалансированный интерферометр Маха – Цендера, опорное плечо которого также имело длину 47.5 м. В качестве источника излучения при калибровке был использован лазер с высокой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 2\text{кГц}$ . Подавая синусоидальное напряжение с некоторой частотой и амплитудой на пьезокерамический цилиндр, производилась запись меняющейся интенсивности интерференционной картины на выходе интерферометра, пример такой картины показан на рисунке 3.10, в данном случае частота подаваемого синусоидального сигнала составляла:  $f = 230\text{ Гц}$ .



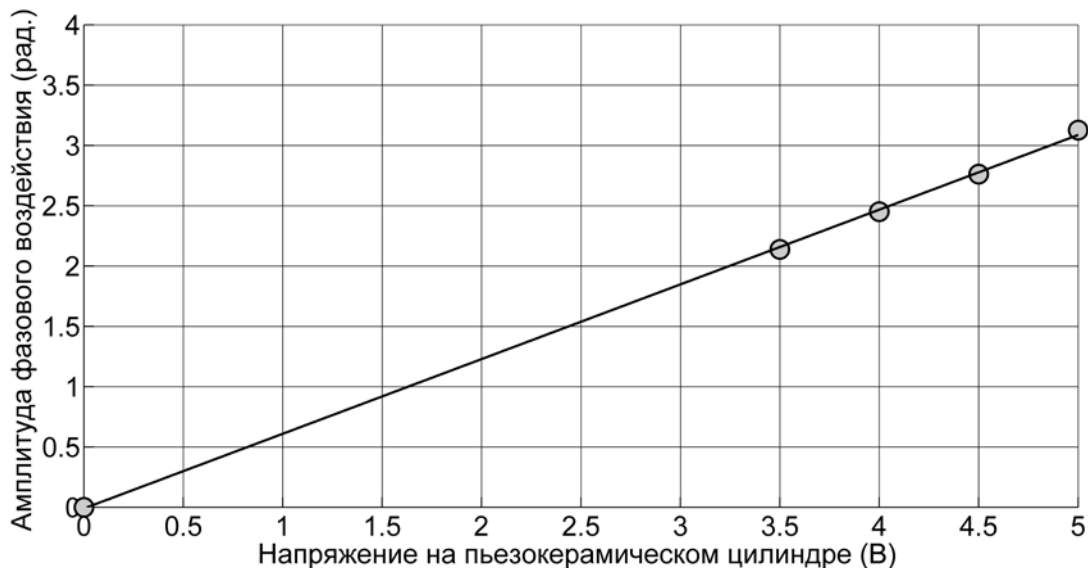
*Рисунок 3.10. Изменение интенсивности на выходе сбалансированного интерферометра Маха – Цендера, при воздействии на сигнальное плечо гармонического сигнала с амплитудой 3 рад. Жирная линия – экспериментальная зависимость, тонкая линия – теоретическая зависимость.*

Определяя по графику на рисунке 3.10 относительные координаты минимумов и максимумов в результирующей временной зависимости интенсивности сигнала на выходе интерферометра, можно, пользуясь известной формулой [85, 86], вычислить амплитуду фазового воздействия в радианах:

$$A = \frac{\pi}{2} \left[ (N + 1) - \frac{1}{\pi} \arcsin \left( \frac{U - 2d_1}{U} \right) - \frac{1}{\pi} \arcsin \left( \frac{U - 2d_2}{U} \right) \right] \quad (3.87),$$

где  $N$  – число полных переходов от абсолютного максимума до абсолютного минимума или от абсолютного минимума до абсолютного максимума в одном периоде на временной зависимости, на рисунке 3.10  $N = 1$ ,  $d_1, d_2$  – координаты минимумов и максимумов в одном периоде, отличных от абсолютных максимумов и минимумов, соответствующих полному переходу,  $U$  – амплитуда временной зависимости – разница между значениями абсолютного максимума и абсолютного минимума.

Для проверки корректности вычисленного по экспериментальному графику значения амплитуды фазового гармонического воздействия, строилась теоретическая зависимость изменения интенсивности на выходе интерферометра от времени, которая показана тонкой линией на рисунке 3.10. *Изменяя амплитуду подаваемого на пьезокерамический цилиндр напряжения, производилась калибровка соответствующей амплитуды фазового воздействия на волокно.* Зависимость амплитуды фазового воздействия на волокно от подаваемого напряжения, при частоте подаваемого сигнала  $f = 230$  Гц, имела вид прямой, выходящей из начала координат, рисунок 3.11.

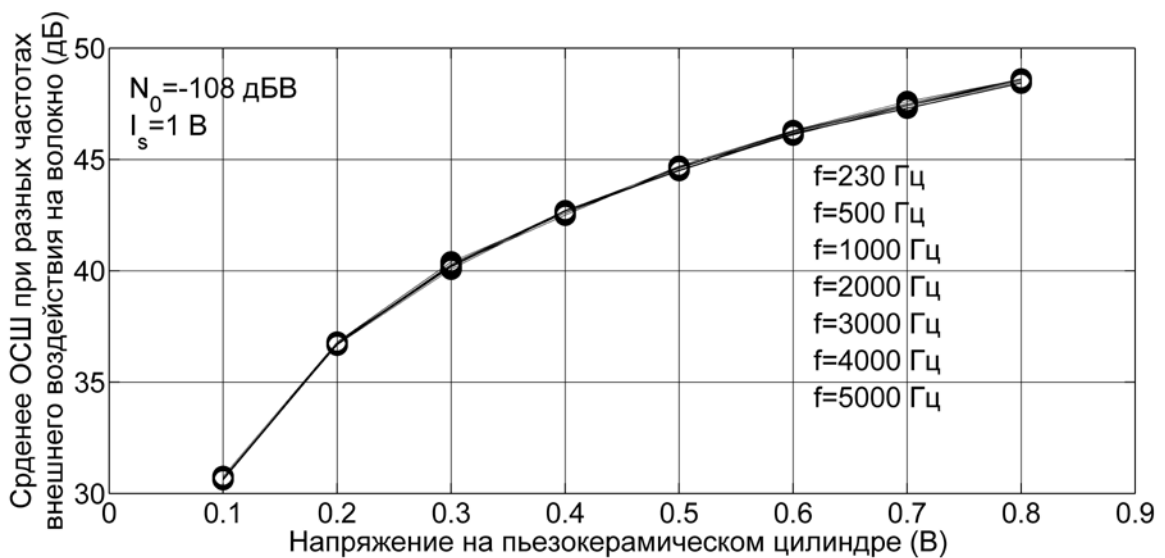


*Рисунок 3.11. Линейная аппроксимация зависимости амплитуды фазового воздействия на оптическое волокно от напряжения, подаваемого на пьезокерамический цилиндр. Экспериментальные точки – кружки, линейная аппроксимация – непрерывная линия.*



*Пользуясь графиком на рисунке 3.11., можно определять реальные фазовые амплитуды воздействий на волокна интерферометров, при малых напряжениях, подаваемых на пьезокерамический цилиндр.*

Частота напряжения, подаваемого на пьезокерамический цилиндр, существенно не влияла на амплитуду его колебаний, в диапазоне частот, используемых в эксперименте. Для проверки этого факта было произведено измерение среднего ОСШ на выходе интерферометра Маха – Цендера с равными плечами, при различных частотах и амплитудах гармонического напряжения, подаваемого на обкладки пьезокерамического цилиндра, рисунок 3.12.



*Рисунок 3.12. Изменение среднего ОСШ для сбалансированного интерферометра Маха – Цендера, при изменении амплитуды гармонического напряжения, подаваемого на пьезокерамический цилиндр, при постоянном уровне средней интенсивности на выходе интерферометра. Кривые, соответствующие различным частотам подаваемого напряжения, показанным на рисунке, совпадают в пределах погрешности эксперимента.*

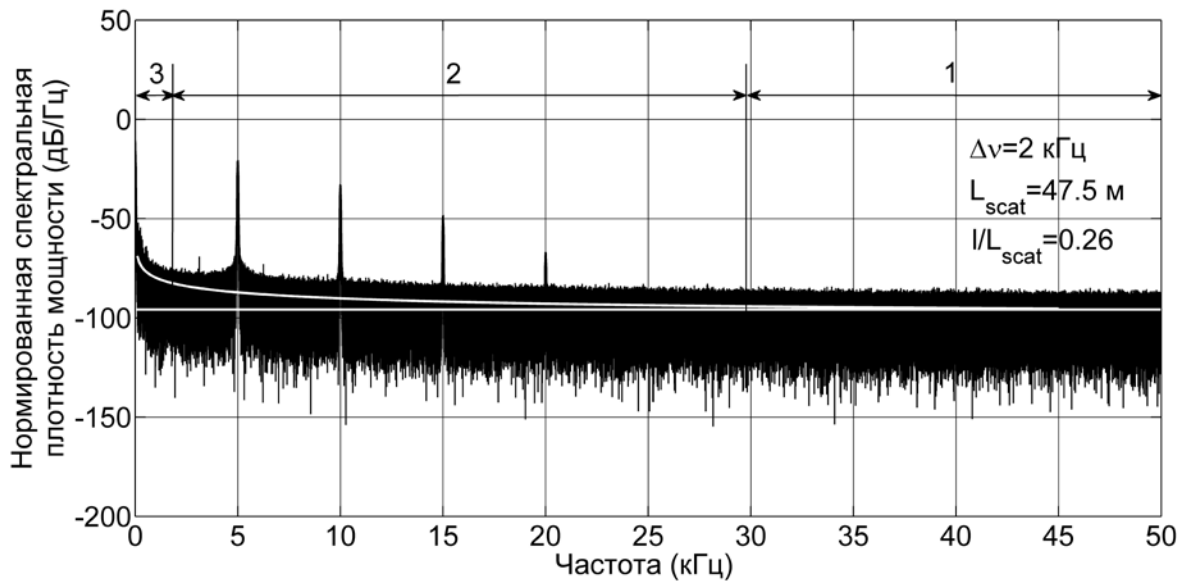
Для корректности измерения, средний уровень сигнала на выходе сбалансированного интерферометра Маха–Цендера, поддерживался постоянным :  $I_s = 1$  В, для всего диапазона изменяемых напряжений и всего диапазона измеряемых частот. Уровень мощности полезного сигнала определялся по первой гармонике в спектре выходного сигнала, соответствующей частоте подаваемому

на пьезокерамический цилиндр сигналу. Уровень шума, в данном случае, определялся, в основном, собственными шумами фотоприемника и принимающей электроники (так как интерферометр сбалансирован), экспериментальное значение шума составило:  $N_0 = -108$  дБВ. Из рисунка 3.12. видно, что кривые зависимостей среднего ОСШ от амплитуды внешнего гармонического напряжения, соответствующие различным частотам, подаваемым на пьезокерамический цилиндр, совпадают в пределах погрешности эксперимента. Таким образом, можно считать, что диапазон частот:  $f = 230 - 5000$  Гц, является линейной областью частотной характеристики используемого пьезокерамического цилиндра. Поэтому, зависимость амплитуды колебаний пьезокерамического цилиндра от амплитуды напряжения, подаваемого на его обкладки, имеет одинаковый вид для частот  $f = 230$  Гц и  $f = 5000$  Гц. Калибровку зависимости амплитуды фазового воздействия от напряжения, подаваемого на пьезокерамический цилиндр, с использованием формулы (3.87), удобнее производить при низких частотах, что и было сделано ранее. Измерение среднего ОСШ для ВИРИ, напротив, удобнее производить при высоких частотах.

### 3.6.3. Метод измерения среднего ОСШ для ВИРИ

Для каждой из трех конфигураций интерферометров производилось измерение среднего ОСШ, при различных амплитудах гармонического напряжения, подаваемого на пьезокерамический цилиндр. Для определения среднего ОСШ, при фиксированной амплитуде внешнего гармонического фазового воздействия на волокно, производилась оцифровка и запись в течение 30 секунд сигнала с фотоприемника, установленного на выход каждой из трех конфигураций интерферометров, при воздействии на них внешнего модулирующего сигнала описанным выше способом. Частота дискретизации используемого аналого – цифрового преобразователя составляла: 100 кГц, соответственно, максимальная спектральная полоса сигнала на входе принимающей электроники должна быть не более: 50 кГц, для обеспечения этого

условия сигнал, поступающий на аналого – цифровой преобразователь, предварительно фильтровался RC – фильтром нижних частот, настроенным на частоту среза, равную 50 кГц. После чего, с помощью быстрого преобразования Фурье в вычислительной среде MatLab, строилась периодограмма с использованием окна Ханна [47]. Типичный вид периодограммы, соответствующей оценке усредненной СПМШ выходного сигнала интерферометра, показан на рисунке 3.13.



*Рисунок 3.13. Экспериментальная периодограмма – оценка спектральной плотности мощности на выходе одноканального ВИРИ с длиной участка  $L_{scat} = 47.5$  м, и лазером со спектральной шириной полосы  $\Delta\nu = 2$  Гц, при воздействии на него внешнего гармонического сигнала с частотой 5 кГц и амплитудой 1 рад, видны четыре спектральные компоненты, кратные 5 кГц. 1 – область спектральной характеристики, определяемая случайными флуктуациями фазы полупроводникового лазера, 2 – область спектральной характеристики, определяемая фликкер – шумами лазерного источника, 3 – область спектральной характеристики, определяемая фликкер – шумами принимающей электроники. Горизонтальная белая линия – теоретическое значение шума, определяемое случайными флуктуациями фазы лазера, спадающая белая линия – аппроксимация фликкер – шума интерферометра.*

Изображенная периодограмма получена с помощью преобразования Фурье сигнала с выхода одноканального ВИРИ и лазером со спектральной шириной полосы:  $\Delta\nu = 2$  кГц. Частота внешнего гармонического фазового воздействия на

волокно была равна:  $f = 5$  кГц, фазовая амплитуда:  $\Lambda = 0.5$  рад, в силу того, что в ВИРИ излучение проходило область воздействия дважды, амплитуда фазового воздействия для ВИРИ также удваивалась и составляла:  $2\Lambda = 1$  рад. Относительное положение области воздействия равно:  $l/L_{scat} = 0.26$ .

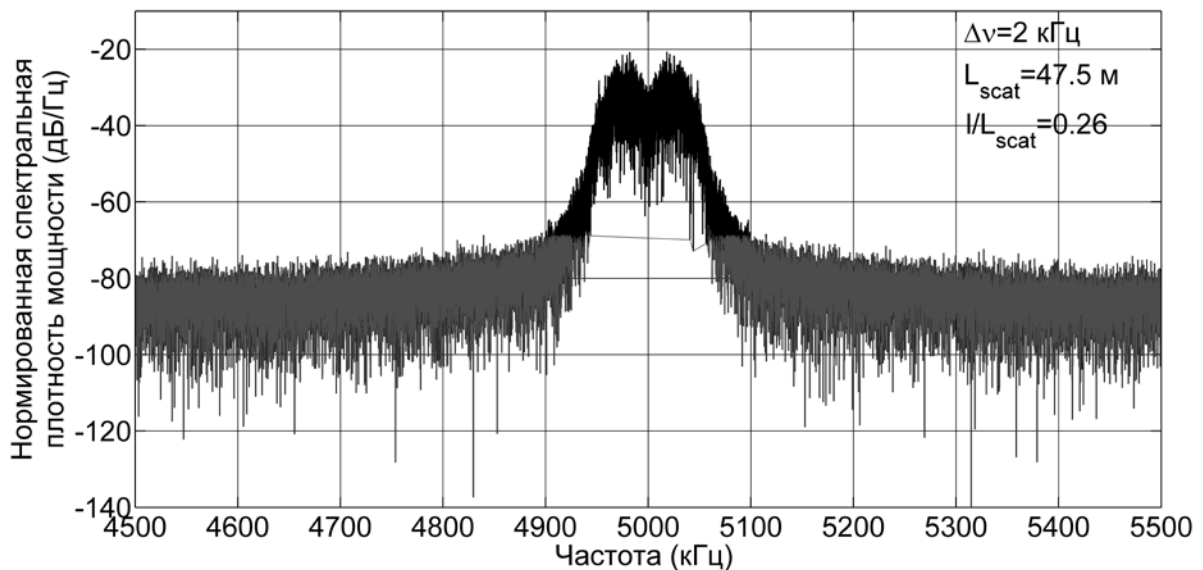
Как видно из рисунка 3.13, в спектре сигнала присутствуют 4 гармоники, соответственно, с центральными частотами: 5 кГц, 10 кГц, 15 кГц и 20 кГц, таким образом, кроме основной гармоники сигнала внешнего воздействия, в спектре присутствуют дополнительные гармоники с кратными частотами, *то есть сигнал на выходе одноканального ВИРИ искажается*. Вторая гармоника ниже первой на 12 дБ, третья гармоника ниже второй на 15.5 дБ. На рисунке 3.13 показаны три области спектральной характеристики: 1 – область спектральной характеристики, где шумы определяются, в основном, случайными флуктуациями фазы полупроводникового лазера, горизонтальная белая линия, показывает теоретическое значение шума, 2 – область спектральной характеристики, где преобладают фликкер – шумы лазерного источника, белая спадающая кривая соответствует аппроксимации данного шума функцией вида:  $1/f$ , 3 – область спектральной характеристики, где преобладают фликкер – шумы принимающей электроники. Фликкер – шумы полупроводникового лазера, обычно наблюдаются при частотах ниже 100 кГц [87, 88], причины возникновения данного вида шумов до конца не ясны. Фликкер – шум, увеличивает общий уровень шумов на выходе интерферометра: его уровень находится выше уровня шума, даваемого теоретическим расчётом, проведенным в предыдущей главе (горизонтальная белая линия).

Из рисунка 3.13 видно, что для использованного полупроводникового лазера, фликкер – шум вносит слабый вклад в шумы на частотах выше 30 кГц, данное обстоятельство позволяет получить оценку среднего ОСШ, *в предположении, что фликкер – шум отсутствует*, такая оценка должна соответствовать теоретическим выводам настоящей главы, *где учитывался только шум лазера, вызванный флуктуациями фазы его излучения*.

Таким образом, по экспериментальной спектральной характеристике производились две различные оценки среднего ОСШ:

- 1) Оценка среднего ОСШ, в предположении что *фликкер – шумы (лазера и принимающей электроники) отсутствуют*. За уровень шума, в этом случае, принимался средний уровень шума, рассчитанный вблизи частоты 50 кГц – в области отсутствия фликкер – шума лазера.
- 2) Оценка реального среднего ОСШ. В этом случае учитывалась полная мощность шума (включающая фликкер-шумы лазера и принимающей электроники) в спектральной полосе 50 кГц.

*Средний уровень мощности полезного сигнала в регистрируемом излучении оценивался с помощью периодограммы по мощности, содержащейся в первой гармонике, при этом суммировались мощности всех спектральных компонент, находящихся вблизи первой гармоники и не равных при этом шумовой мощности, рисунок 3.14.*



*Рисунок 3.14. Экспериментальная периодограмма, соответствующая оценке спектральной плотности мощности первой гармоники сигнала на выходе одноканального ВИРИ, с одним участком с длиной  $L_{\text{scat}} = 47.5 \text{ м}$ , при воздействии на него внешнего гармонического сигнала с частотой 5 кГц и амплитудой 1 рад. Средняя мощность, содержащаяся в первой гармонике, находилась с помощью суммирования мощностей всех спектральных компонент, сосредоточенных вблизи частоты воздействия: 5 кГц. Черным цветом выделены спектральные компоненты, составляющие полезный сигнал.*

В силу того, что при переходе от одной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$  к другой, амплитуда полезного сигнала изменялась, отклик интерферометра на внешнее воздействие оказывался модулированным по амплитуде, соответственно, спектральная компонента полезного сигнала оказывалась уширенной. Средняя мощность полезного сигнала в интервале измерения (30 с) равна сумме всех спектральных компонент периодограммы вблизи частотной компоненты полезного сигнала. Это справедливо в силу того, что периодограмма является *оценкой средней мощности каждой из спектральных компонент, присутствующих в измеряемом сигнале*, в интервале измерения [47]. Так как выходной сигнал ВИРИ является модулированным по амплитуде, среднее значение его мощности равно *сумме средних мощностей всех спектральных компонент*, которые возникают в сигнале вследствие амплитудной модуляции, эти спектральные компоненты являются некоррелированными друг с другом, потому что наблюдаются в различные не пересекающиеся промежутки времени.

Отметим, что для того, чтобы среднее значение мощности полезного сигнала внешнего воздействия, оцененное по спектральной характеристике, было адекватным, необходимо, чтобы временная характеристика представляла собой выборку достаточно большого количества реализаций интенсивности на выходе интерферометра. В этом случае можно ожидать, что средняя мощность полезного сигнала, оцененная по спектральной характеристике, будет равна средней мощности, рассчитанной с помощью усреднения по ансамблю  $\{\rho\}$ . На рисунке 3.15. показана запись временной флуктуации интенсивности на выходе одноканального ВИРИ, вызванной изменением реализации  $\{\rho\}$  во времени, при этом дополнительно интерферометр подвергался воздействию постоянного внешнего гармонического сигнала. Без масштабирования флуктуации интенсивности показаны на рисунке 3.15.(а), в увеличенном масштабе – на рисунке 3.15.(б) и (в). При увеличении, видна дополнительная случайная

амплитудная модуляция полезного сигнала на выходе интерферометра, приводящая к уширению его спектра.

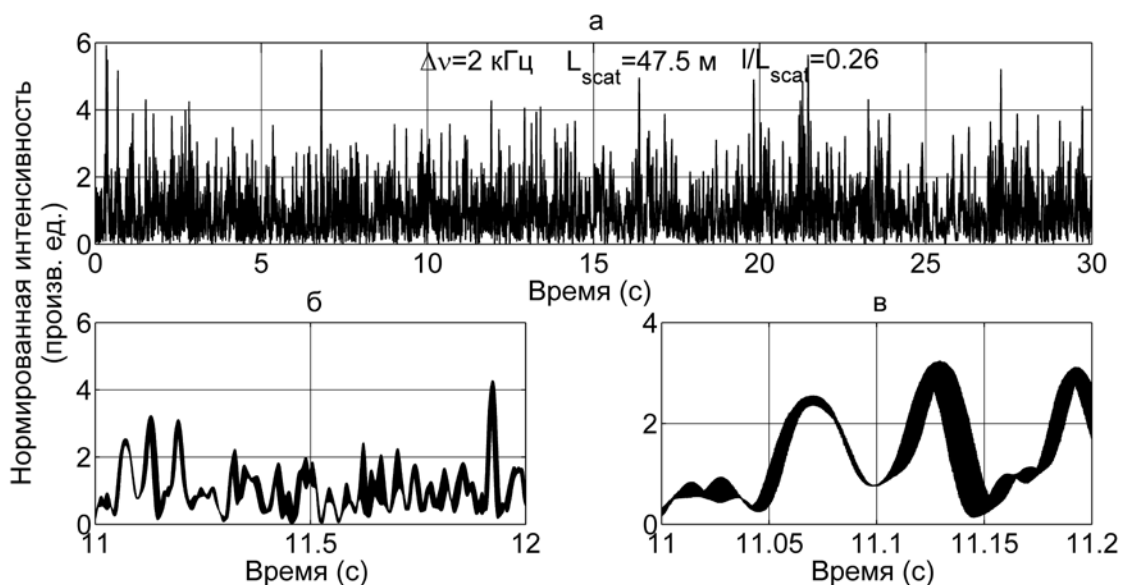
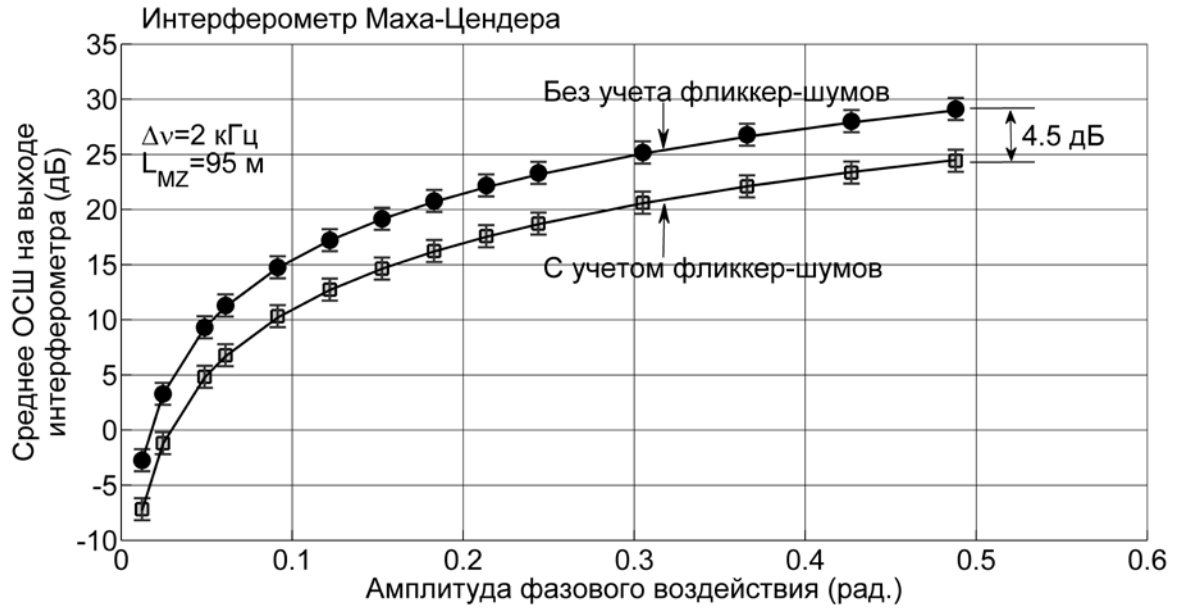


Рисунок 3.15. Экспериментальная запись временного изменения интенсивности на выходе одноканального ВИРИ, с длиной участка  $L_{scat} = 47.5$  м, при воздействии на него внешнего гармонического сигнала с частотой 5 кГц и амплитудой 1 рад. (а) полная запись в течение 30 с. (б) и (в) увеличенные временные масштабы, видна дополнительная случайная амплитудная модуляция полезного сигнала.

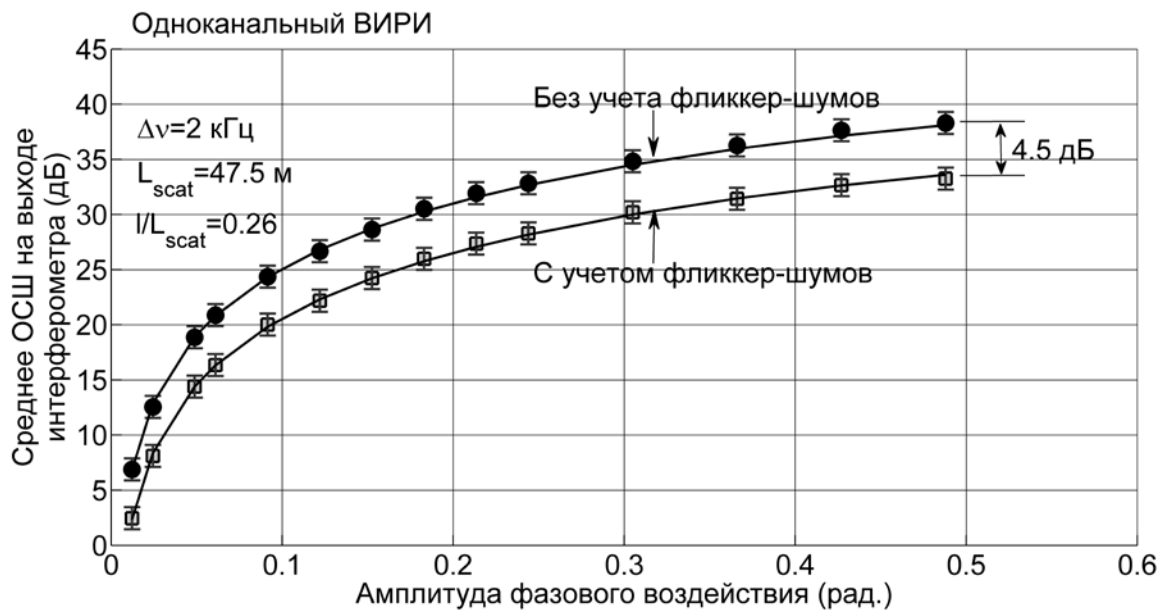
### 3.6.4. Результаты эксперимента

На рисунке 3.16 показаны результаты экспериментальных измерений средних ОСШ для трех исследованных конфигураций интерферометров: а) интерферометра Маха – Цендера с длиной волоконной линии задержки:  $L_{MZ} = 95$  м, (б) одноканального ВИРИ с длиной участка:  $L_{scat} = 47.5$  м, (в) двухканального ВИРИ с длинами сигнального и опорного участков:  $L_{scat} = 47.5$  м, при использовании лазера с высокой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 2$  кГц, в спектральной полосе:  $\Delta f = 50$  кГц (ограниченной радиочастотным фильтром). Среднее ОСШ вычислялось по периодограмме сигнала с выхода интерферометра, записанного в течение 30 секунд, частота внешнего фазового воздействия на сигнальный участок составляла:  $f = 5$  кГц, амплитуда внешнего гармонического фазового воздействия изменялась от:  $\Theta = 0.0122$  рад, до 0.49 рад.

а)



б)





в)

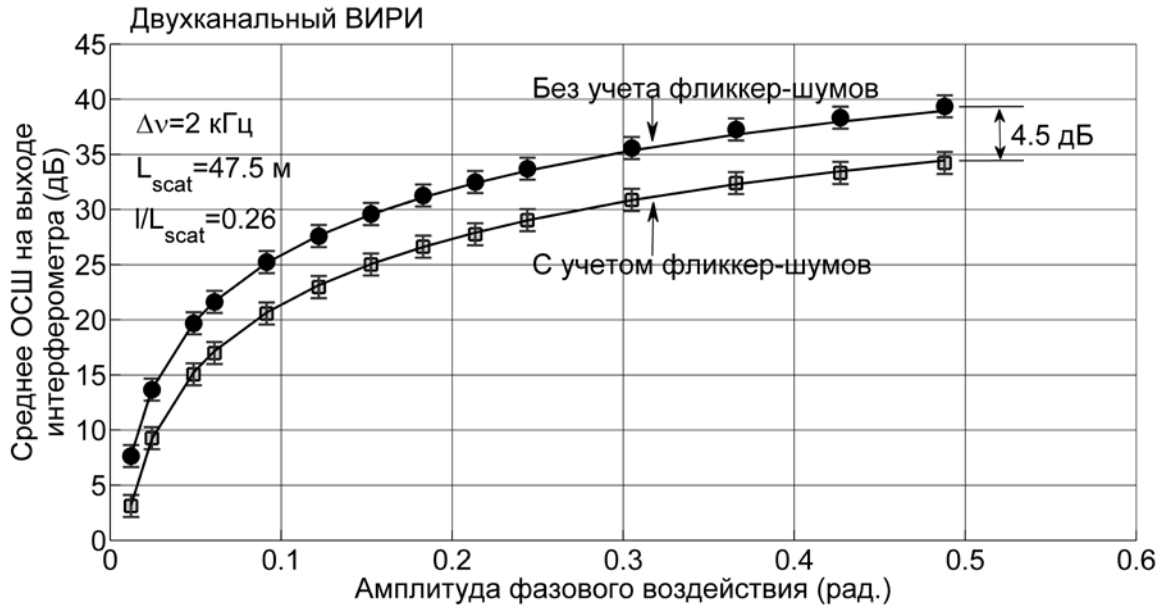


Рисунок 3.16. Измерение среднего ОСШ для трех конфигураций интерферометров (а) интерферометра Маха – Цендера, (б) одноканального ВИРИ и (в) двухканального ВИРИ, при использовании лазера с высокой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 2$  кГц и частоте внешнего фазового воздействия на сигнальный участок интерферометра:  $f = 5$  кГц, в спектральной полосе измерения:  $\Delta f = 50$  кГц. Разница длин плеч в интерферометре Маха – Цендера равна:  $L_{MZ} = 95$  м, длины участков в ВИРИ равны:  $L_{scat} = 47.5$  м. Кругами показана экспериментальная зависимость, в предположении отсутствия фликкер – шумов лазера и приемника. Квадратами показана экспериментальная зависимость, с учетом всех шумов интерферометра в полосе измерения. Верхней непрерывной линией показана теоретическая зависимость, нижней непрерывной линией показана теоретическая зависимость, смещенная на 4.5 дБ.

Средний уровень мощности сигнала вычислялся по первой гармонике в спектре на частоте 5 кГц, см. рисунок 3.13, рисунок 3.14.

Две сплошные линии, показанные на графиках на рисунке 3.16, соответствуют двум способам измерения средней мощности шума на выходах интерферометров в спектральной полосе:  $\Delta f = 50$  кГц. Круги на графиках: рисунок 3.16. (а), (б) и (в) соответствуют среднему ОСШ без учета фликкер – шумов лазера и приёмника, средняя мощность шума, в этом случае, определяется только случайными флуктуациями фазы источника излучения, см. рисунок 3.13 (горизонтальная белая линия). Квадраты на графиках: рисунок 3.16. (а), (б) и (в)

соответствуют среднему ОСШ с учетом всех шумов в спектральной полосе:  $\Delta f = 50$  кГц, см. рисунок 3.13 (спадающая белая линия).

Теоретические значения средних ОСШ, показанные на графиках рисунок 3.16. (а), (б) и (в) верхними непрерывными кривыми, были рассчитаны в предыдущем пункте. Учет фликкер – шумов приводит к уменьшению среднего ОСШ, по сравнению с теоретическим на 4.5 дБ, для всех рассмотренных конфигураций интерферометров с конкретным источником с высокой степенью когерентности:  $\Delta \nu = 2$  кГц. Непрерывные кривые, изображенные ниже, соответствуют теоретическим кривым, смещенным на эмпирический поправочный коэффициент 4.5 дБ вниз по оси ординат. В настоящей работе не производится попытка объяснения причин появления фликкер – шумов, возникающих на низких частотах, вместо этого вводится поправочный коэффициент, измеряемый экспериментально, увеличивающий средний уровень шума.

Для лазера с высокой степенью когерентности, использованного в работе, как видно из рисунка 3.13, фликкер – шумы, становятся малыми при частоте большей, чем 30 кГц. Поэтому более целесообразно производить детектирование сигнала с частотами большими, чем 30 кГц. При детектировании сигналов, имеющих частоты меньшие, чем 30 кГц, избежать влияния фликкер – шумов можно применив дополнительно фазовую модуляцию в опорном плече интерферометра (при его наличии), сместив, таким образом, искомый сигнал в область более высоких частот.

Состояние поляризации излучения в двух плечах интерферометра Маха – Цендера не влияет на результирующее среднее ОСШ, в случае если учтен собственный шум фотоприемника. Это объясняется тем, что как средняя мощность шума, так и средняя мощность сигнала определяются мощностью проекции вектора поляризации одного из интерферирующих лучей на направление вектора поляризации другого, при вычислении отношения, квадрат косинуса угла между направлениями поляризаций интерферирующих лучей сокращается [1].

Степень поляризации рассеянного излучения, в ВИРИ предполагается равной  $P = 1/3$ , что описано в предыдущей главе. Для одноканального и двухканального ВИРИ, степень поляризации рассеянного излучения не влияет на итоговое среднее ОСШ, так как и в выражении для средней мощности сигнала (3.31), (3.70) и в выражении для средней мощности шума (2.54), (2.95) входит один и тот же множитель  $(1 + P^2)/2$ , который сокращается при делении. Состояния поляризаций рассеянного излучения, для двух участков двухканального ВИРИ, предполагаются равными друг другу, хотя это и не является строгим ограничением, в силу того, что, как и для интерферометра Маха-Цендера, косинус угла между состояниями поляризаций сокращается при делении. *Стоит опять отметить, указанная независимость от степени поляризации справедлива только в случае, если учтен собственный шум фотоприемника, который от поляризации излучения не зависит.*

Как указывалось ранее, в ВИРИ поле проходит область воздействия дважды, поэтому при расчётах амплитуда фазового воздействия была удвоена.

Отметим, что в силу того, что уровень мощности сигнала и уровень мощности шума являются случайными величинами, изменяющимися при изменении распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , для корректного определения их средних значений необходимо достаточно длительное время наблюдения, при соблюдении плавного изменения кривой интенсивности рассеянного излучения, рисунок 3.15. При плавном изменении интенсивности не происходит сильного уширения детектируемых спектральных компонент. Экспериментальное время записи изменения интенсивности составляло: 30 секунд, и было ограничено вычислительной мощностью используемого ПК. При условии плавного изменения интенсивности на выходе ВИРИ, см. рисунок 3.15. этого времени оказывалось недостаточно, поэтому приходилось применять меры для обеспечения более быстрого ее изменения – немного нагревать оптические волокна интерферометров, описание этого метода получения статистически независимых распределений приведено в первой главе.

Тем не менее, значение среднего ОСШ, измеренное несколько раз, при одном и том же внешнем воздействии, изменялось от измерения к измерению в пределах  $\pm 2$  дБ от значения, даваемого теоретическим расчётом и изображенного на рисунке 3.16. (а), (б), (в) верхними сплошными линиями. На рисунке 3.16. видно, что теоретическая кривая попадает в рамки установленной погрешности измерения среднего ОСШ и демонстрирует хорошее совпадение проведенного теоретического рассмотрения и экспериментальных данных для одноканального и двухканального ВИРИ.

На рисунке 3.17. приведено сравнение реально измеренных (с учетом шумов всех видов) средних ОСШ для интерферометров: Маха – Цендера – показано ромбами, одноканального ВИРИ – показано квадратами, двухканального ВИРИ – показано кругами. Изображенные на рисунке 3.17. кривые соответствуют нижним кривым на рисунках 3.16 (а), (б), (в).

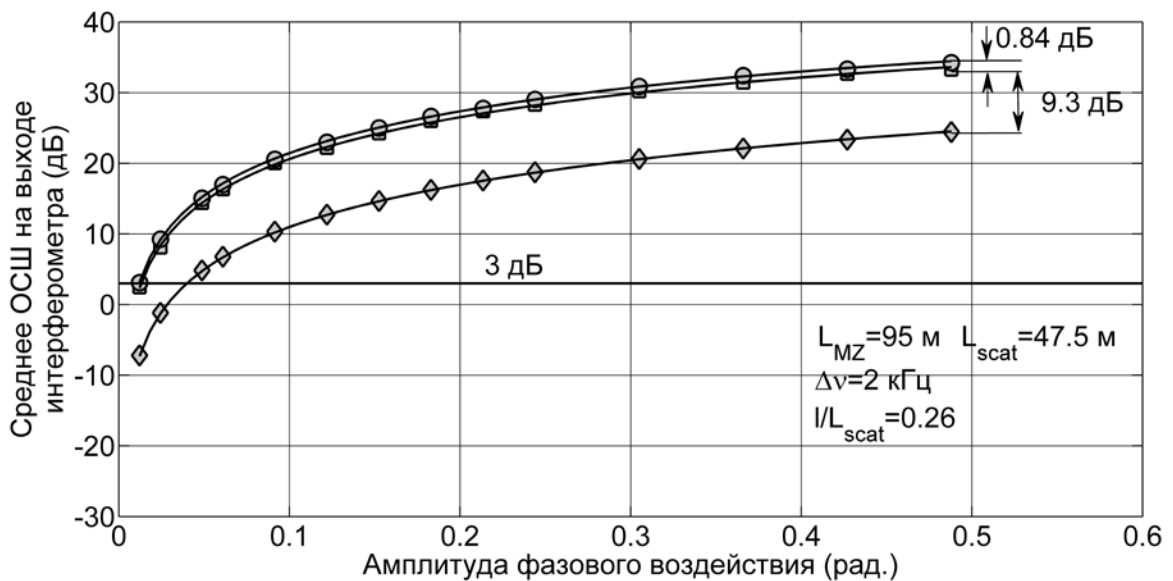


Рисунок 3.17. Экспериментальные средние ОСШ, с учетом шумов всех видов, при увеличении амплитуды внешнего гармонического воздействия, для интерферометра Маха – Цендера – показано ромбами, одноканального ВИРИ – показано квадратами, двухканального ВИРИ – показано кругами. Спектральная ширина полосы лазерного источника  $\Delta\nu = 2$  кГц, относительное место воздействия:  $I/L_{scat} = 0.26$ . Горизонтальной линией показано пороговое значение отношения сигнала и шума, равное 3 дБ

Относительная разность положения экспериментальных кривых, показанная на рисунке 3.17, равна: 9.3 дБ для интерферометра Маха – Цендера и одноканального ВИРИ (теоретическая оценка: 9,4 дБ), и равна: 0.83 дБ для двух ВИРИ (теоретическая оценка: 0.9 дБ). Данные величины соответствуют теоретическим оценкам, проведенным в предыдущем пункте, с хорошей точностью.

Второй тип лазерного источника, использованный в работе, был лазер со спектральной шириной полосы:  $\Delta\nu = 570$  кГц. Типичная периодограмма для сигнала на выходе одноканального ВИРИ с данным низкокогерентным источником, показана на рисунке 3.18.

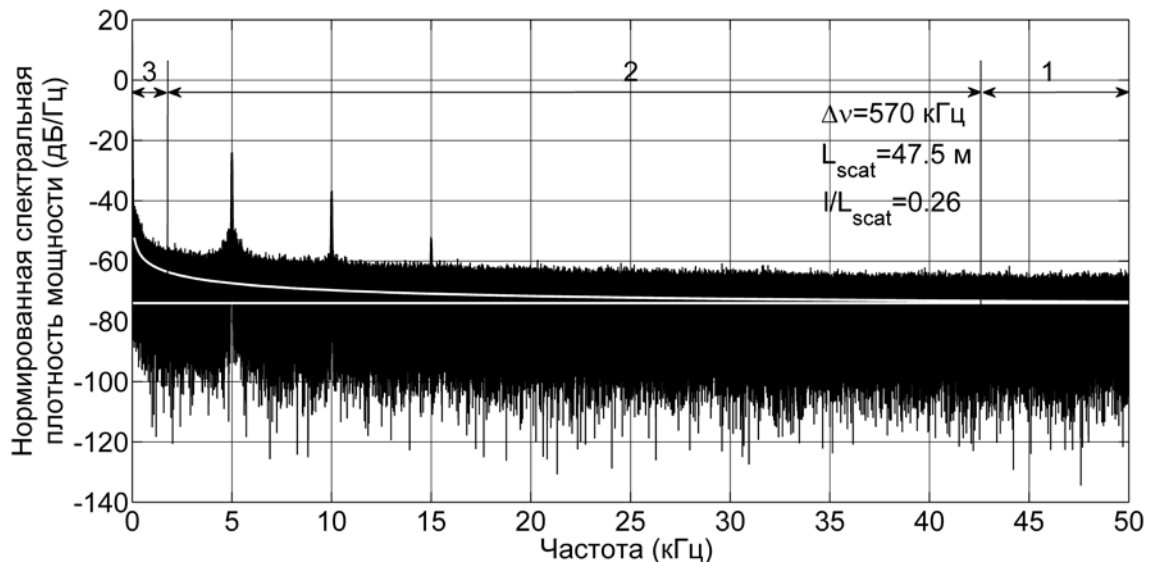


Рисунок 3.18. Экспериментальная периодограмма – оценка спектральной плотности мощности на выходе одноканального ВИРИ с длиной участка:  $L_{scat} = 47.5$  м, и лазером со спектральной шириной полосы:  $\Delta\nu = 570$  Гц, при воздействии на него внешнего гармонического сигнала с частотой 5 кГц и амплитудой 1 рад, видны три спектральные компоненты, кратные 5 кГц. 1 – область спектральной характеристики, определяемая случайными флуктуациями фазы полупроводникового лазера, 2 – область спектральной характеристики, определяемая фликкер – шумами лазерного источника, 3 – область спектральной характеристики, определяемая фликкер – шумами принимающей электроники. Горизонтальная белая линия – теоретическое значение шума интерферометра, спадающая белая линия – аппроксимация фликкер – шума интерферометра.

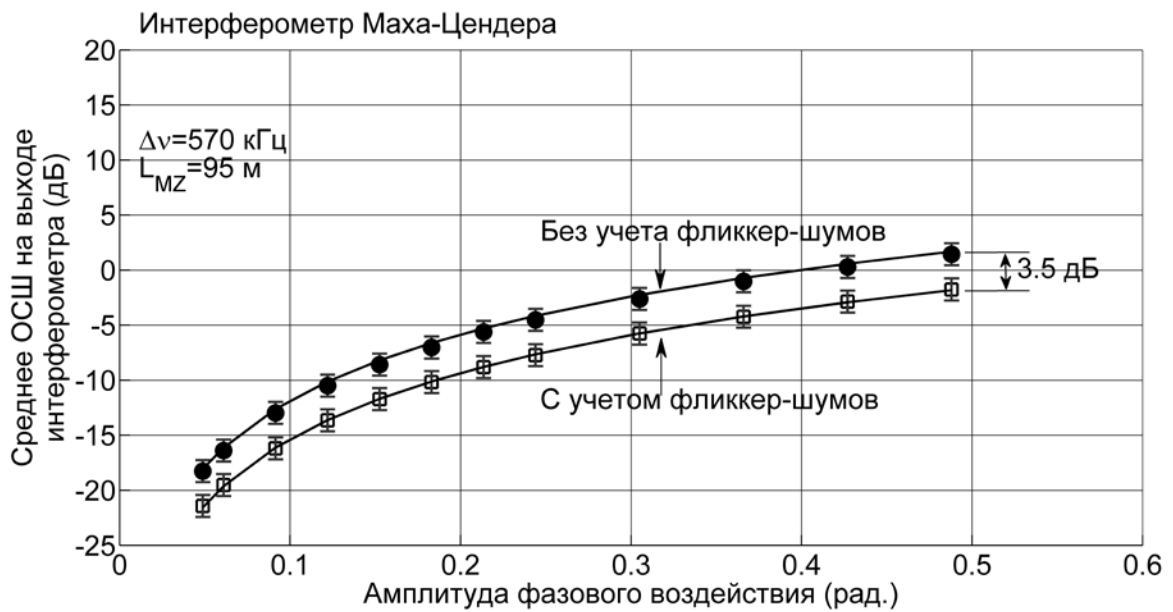
Частота внешнего гармонического фазового воздействия на волокно равна:  $f = 5$  кГц, амплитуда:  $\Lambda = 0.5$  рад, в силу того, что излучение проходит область воздействия дважды, амплитуда фазового воздействия также удваивается и составляет:  $2\Lambda = 1$  рад. Относительное положение области воздействия равно:  $l/L_{scat} = 0.26$ .

Как видно из рисунка 3.18, в спектре сигнала присутствуют 3 гармоники, соответственно, с центральными частотами: 5 кГц, 10 кГц, 15 , таким образом, кроме основной гармоники сигнала внешнего воздействия, в спектре присутствуют дополнительные с кратными частотами, *то есть сигнал на выходе двухканального ВПРИ искажается*. На рисунке показаны три области спектральной характеристики: 1 – область спектральной характеристики, где шумы определяются, в основном, случайными флуктуациями фазы полупроводникового лазера, исследованного в предыдущей главе, горизонтальная белая линия показывает теоретическое значение шума; 2 – область спектральной характеристики, где преобладают фликкер – шумы лазерного источника, белая спадающая кривая соответствует аппроксимации данного шума функцией вида:  $1/f$  ; 3 – область спектральной характеристики, где преобладают фликкер – шумы принимающей электроники.

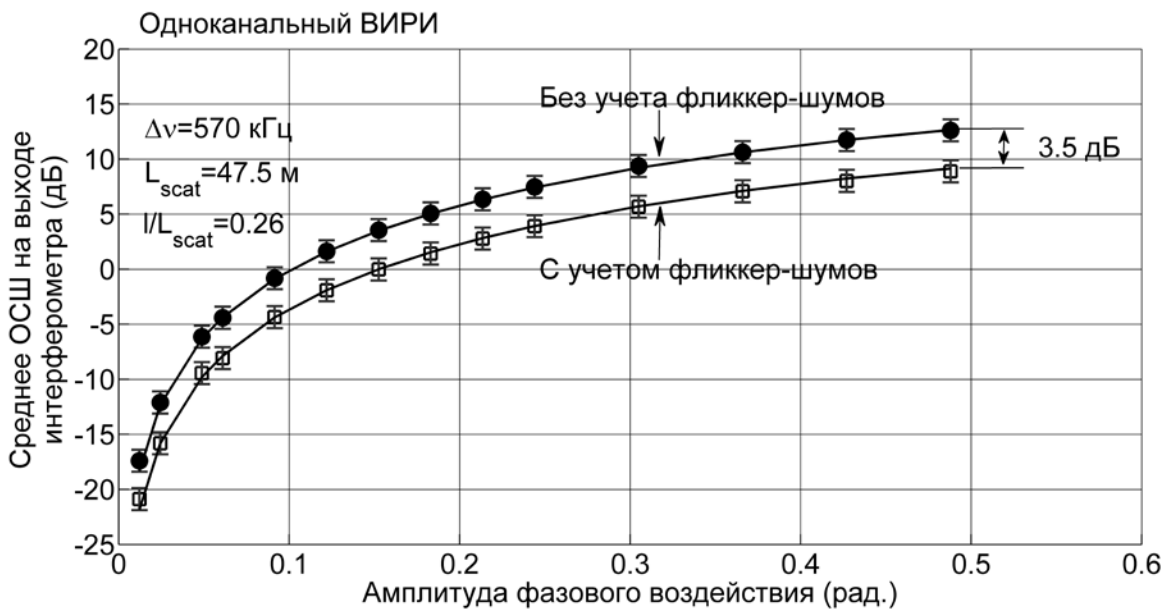
Фликкер – шумы, становятся малыми при частоте большей, чем 35 кГц. Поэтому, как и для лазера с высокой степенью когерентности, более целесообразно производить детектирование сигнала, с частотами большими, чем 30 кГц. Отметим, что спектральная плотность мощности фликкер – шумов, при использовании низкокогерентного лазера, на всех частотах, показанных на рисунке 3.18, в том числе и на частоте близкой к 50 кГц, оказывалась выше, чем предсказанная теорией усредненная СПМШ, вызванного флуктуациями фазы полупроводникового лазера. Поэтому для получения более точной оценки среднего ОСШ, *без учета фликкер – шумов*, из мощности шума, измеренного вблизи частоты 50 кГц, необходимо было вычесть поправку, учитывающую, величину превышения уровня фликкер – шумов над уровнем шумов, вызванных флуктуациями фазы лазера, в исследуемом случае эта поправка составила: 0.8дБ.

На рисунке 3.19 показаны результаты экспериментальных измерений средних ОСШ для тех же трех конфигураций интерферометров: (а) интерферометра Маха – Цендера с длиной волоконной линии задержки:  $L_{MZ} = 95$  м, (б) одноканального ВИРИ с длиной участка:  $L_{scat} = 47.5$  м и (в) двухканального ВИРИ с длинами сигнального и опорного участков:  $L_{scat} = 47.5$  м, при использовании лазера с низкой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 570$  кГц, в спектральной полосе:  $\Delta f = 50$  кГц (ограниченной радиочастотным фильтром).

а)



б)



в)

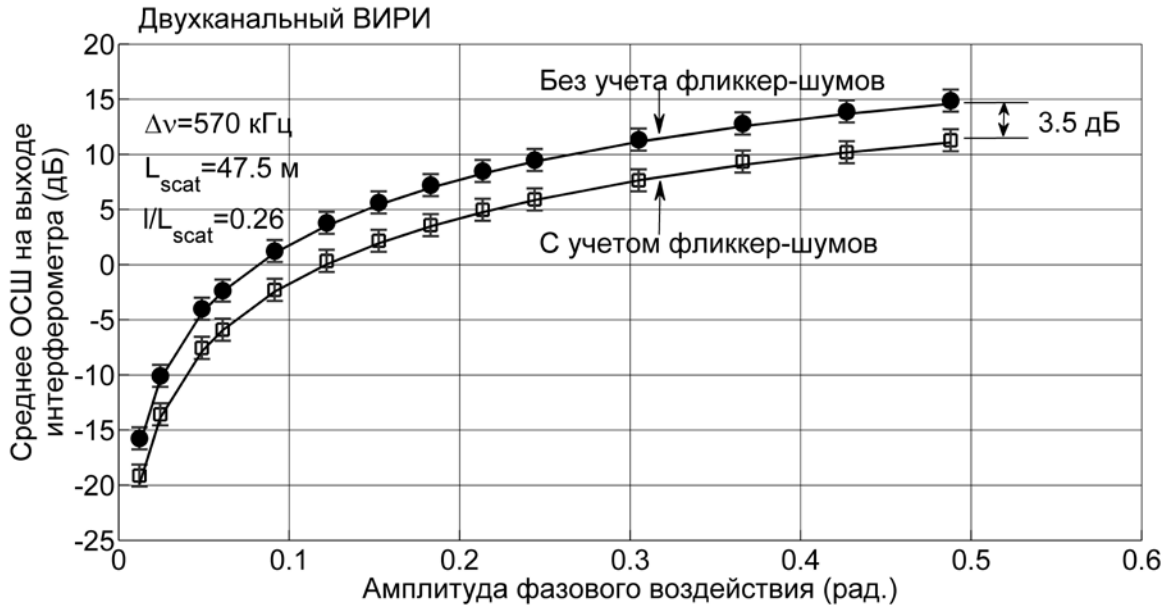


Рисунок 3.19. Измерение среднего ОСШ для трех конфигураций интерферометров (а) интерферометра Маха – Цендера, (б) одноканального ВИРИ и (в) двухканального ВИРИ, при использовании лазера с невысокой степенью когерентности:  $\Delta\nu = 570$  кГц и частоте внешнего фазового воздействия на сигнальный участок интерферометра:  $f = 5$  кГц, в спектральной полосе измерения:  $\Delta f = 50$  кГц. Разница длин плеч в интерферометре Маха – Цендера равна:  $L_{MZ} = 95$  м, длины участков в ВИРИ равны:  $L_{scat} = 47.5$  м. Кругами показана экспериментальная зависимость, в предположении отсутствия фликкер – шумов лазера и приемника. Квадратами показана экспериментальная зависимость с учетом всех шумов интерферометра в измеряемой полосе. Верхней непрерывной линией показана теоретическая зависимость, нижней непрерывной линией показана теоретическая зависимость, смещенная на 3.5 дБ.

Среднее ОСШ также вычислялось по периодограмме сигнала с выхода интерферометра, записанного в течение 30 секунд, частота внешнего фазового воздействия на сигнальный участок составляла:  $f = 5$  кГц, амплитуда внешнего гармонического фазового воздействия изменялась от  $\Theta = 0.0122$  рад, до 0.49 рад. Средний уровень мощности сигнала вычислялся по первой гармонике в спектре на частоте 5 кГц, см. рисунок 3.12, рисунок 3.14, рисунок 3.18.

Подобно графикам для лазера с высокой степенью когерентности, две сплошные линии, показанные на графиках на рисунке 3.19, соответствуют двум способам измерения суммарной средней мощности шума на выходе



интерферометра в спектральной полосе:  $\Delta f = 50$  кГц. *Круги* на графиках: рисунок 3.19. (а), (б), (в) соответствует среднему ОСШ без учета фликкер – шумов лазера и приёмника, средняя мощность шума, в этом случае, определяется только случайными флуктуациями фазы источника излучения, см. рисунок 3.18 (горизонтальная белая линия). *Квадраты* на графиках: рисунок 3.16. (а), (б) и (в) соответствуют среднему ОСШ с учетом всех шумов в спектральной полосе:  $\Delta f = 50$  кГц, см. рисунок 3.18 (спадающая белая линия).

Теоретические значения средних ОСШ, показанные на графиках рисунок 3.19. (а), (б), (в), верхними непрерывными кривыми, были рассчитаны в предыдущем пункте. Учет фликкер – шумов приводит к уменьшению среднего ОСШ по сравнению с теоретическим на 3.5 дБ, для всех рассмотренных конфигураций интерферометров, с конкретным источником с низкой степенью когерентности:  $\Delta \nu = 570$  кГц. Непрерывные кривые, изображенные ниже, соответствуют теоретическим кривым, смещенным на эмпирический поправочный коэффициент 3.5 дБ вниз по оси ординат.

Состояние поляризации излучения в двух плечах интерферометра Маха – Цендера, как и в предыдущем случае, не влияет на результирующее среднее ОСШ, если учтен собственный шум фотоприемника. Как указывалось ранее, в ВИРИ амплитуда фазового воздействия в два раза больше, чем в интерферометре Маха – Цендера диапазон ее изменения:  $\Lambda = 2\Theta = 0.024$  рад до 0.98 рад.

Степень поляризации рассеянного излучения в ВИРИ, предполагается равной  $P = 1/3$ , что рассмотрено в предыдущей главе. Состояния поляризаций рассеянного излучения, для двух участков двухканального ВИРИ, предполагаются равными друг другу, хотя, в силу описанного ранее, состояние поляризации рассеянного излучения для ВИРИ не влияет на итоговое среднее ОСШ, в случае если учтен собственный шум фотоприемника.

Отметим, что, как и ранее, для корректного определения средних значений мощностей сигнала и шума, необходимо достаточно длительное время наблюдения, при соблюдении плавного изменения кривой интенсивности рассеянного излучения: рисунок 3.15. Экспериментальное время записи также

составляло 30 секунд. При условии плавного изменения интенсивности на выходе ВИРИ, см. рисунке 3.15. этого времени оказывалось недостаточно, поэтому оптические волокна интерферометров немного нагревались. Тем не менее, значение среднего ОСШ, измеренное несколько раз, при одном том же внешнем воздействии, изменялось от измерения к измерению в пределах  $\pm 2$  дБ от значения, даваемого теоретическим расчетом и изображенного на рисунке 3.19.(а), (б), (в) верхними сплошными линиями. На рисунке 3.19. видно, что теоретическая кривая попадает в рамки установленной погрешности, и демонстрирует хорошее совпадение проведенного теоретического рассмотрения и экспериментальных данных для одноканального и двухканального ВИРИ.

На рисунке 3.20. приведено сравнение реально измеренных (с учетом шумов всех видов) средних ОСШ для интерферометров: Маха – Цендера – показано ромбами, одноканального ВИРИ – показано квадратами, двухканального ВИРИ – показано кругами.

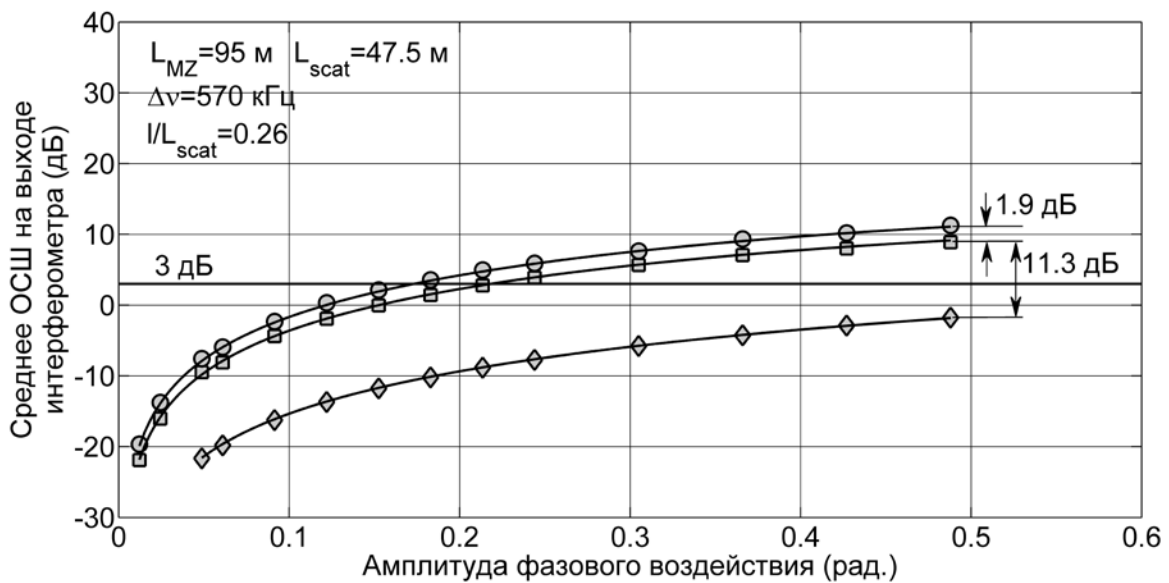


Рисунок 3.20. Экспериментальные средние ОСШ, с учетом шумов всех видов, при увеличении амплитуды внешнего гармонического воздействия, для интерферометра Маха – Цендера – показано ромбами, одноканального ВИРИ – показано квадратами, двухканального ВИРИ – показано кругами. Спектральная ширина полосы лазерного источника:  $\Delta\nu = 570$  кГц, относительное место воздействия:  $l/L_{scat} = 0.26$ . Горизонтальной линией показано пороговое значение отношения сигнала и шума, равное 3 дБ

Изображенные на рисунке 3.20. кривые соответствуют нижним кривым на рисунке 3.19 (а), (б), (в).

Относительная разность положения экспериментальных кривых, показанная на рисунке 3.20. равна: 11.3 дБ для интерферометра Маха – Цендера и одноканального ВИРИ (теоретическая оценка: 11,5 дБ), и равна: 1.9 дБ для двух ВИРИ (теоретическая оценка: 1.9дБ). Данные величины соответствуют теоретическим оценкам, проведенным в предыдущем пункте, с хорошей точностью.

На рисунке 3.21. показано сравнение экспериментальных графических зависимостей средних ОСШ, которые изображены на рисунке 3.17 и рисунке 3.20, то есть для лазерных источников двух типов (а) и (б).

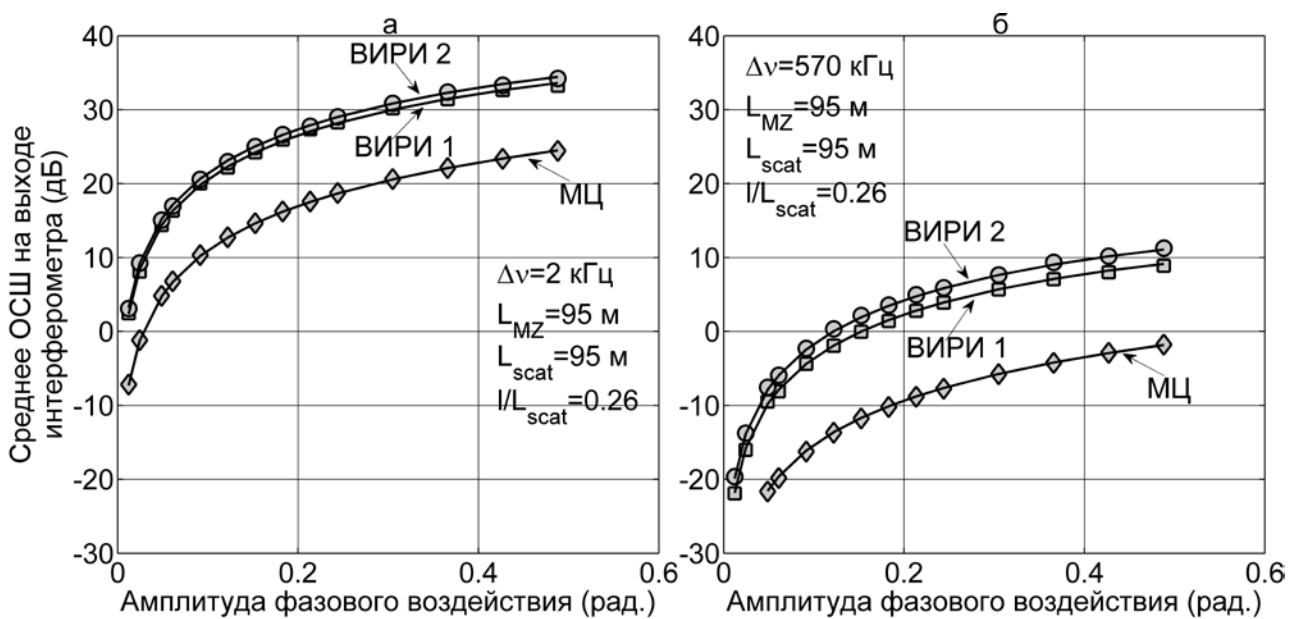


Рисунок 3.21. Сравнение экспериментальных значений средних ОСШ в измеряемой полосе:  $\Delta f = 50$  кГц (с учетом шумов всех видов), для: интерферометра Маха – Цендера (ромбы, подписанная: МЦ), одноканального ВИРИ (квадраты, подписанная: ВИРИ 1) и двухканального ВИРИ (круги, подписанная: ВИРИ 2), для лазеров со спектральной шириной полосы: (а)  $\Delta\nu = 2$  кГц и (б)  $\Delta\nu = 570$  кГц. Сплошными линиями показаны теоретические значения среднего ОСШ (без учета фликкер – шумов), но смещенные на эмпирические коэффициенты для случая (а) на 4.5 дБ и для случая (б) на 3.5 дБ.

В качестве средней мощности шума для каждого из случаев, показанных на рисунке, была принята полная (с учетом фликкер-шумов) мощность шума в измеряемой полосе:  $\Delta f = 50$  кГц.

Из рисунка 3.21 видно, что одноканальный и двухканальный ВИРИ, при данном расположении области внешнего воздействия:  $l/L_{scat} = 0.26$ , обладают более высоким значением среднего ОСШ, при внешнем фазовом воздействии на оптическое волокно, чем интерферометр Маха – Цендера с длиной линии задержки равной максимальной длине задержки в ВИРИ. Среднее ОСШ для ВИРИ превосходит среднее ОСШ для интерферометра Маха – Цендера, как из – за более низкого значения шума в ВИРИ, так и из – за того, что одинаковое внешнее воздействие вызывает в ВИРИ в два раза большее фазовое воздействие.

Использование лазерных источников с различными степенями когерентности, приводит к различным средним ОСШ при заданной амплитуде внешнего воздействия, что можно видеть на рисунке 3.21. Для ВИРИ с лазерными источниками со спектральными ширинами полос излучения:  $\Delta \nu = 2$  кГц и  $\Delta \nu = 570$  кГц, относительная разница средних ОСШ, при заданной амплитуде внешнего воздействия, составляет порядка **24 дБ**, то есть среднее ОСШ, при заданной фиксированной амплитуде внешнего воздействия для лазера с более высокой степенью когерентности выше на **24 дБ**.

Пользуясь графиками на рисунке 3.17, рисунке 3.20 и рисунке 3.21 можно оценить *пороговую чувствительность и минимально детектируемый сигнал для ВИРИ с двумя типами источников*. При этом можно считать, что сигнал можно отделить от шума при среднем ОСШ равном: 3 дБ [1, 72], приняв за полосу измерения:  $\Delta f = 50$  кГц и рассчитывая мощность шума с учетом всех шумов в данной спектральной полосе измерения. Для лазерного источника со спектральной шириной полосы:  $\Delta \nu = 2$  кГц минимально экспериментально детектируемая фазовая амплитуда гармонического воздействия в полосе  $\Delta f = 50$  кГц, при среднем ОСШ равном: 3 дБ равна:

а)  $\Theta = 0.04$  рад, для интерферометра Маха – Цендера, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной см. (1.107): **8.6 нм**. Теоретическое значение: 5 нм.

б)  $\Lambda = 0.013$  рад, для одноканального ВИРИ, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной: **2.8 нм**, здесь учтено, что рассеянное излучение проходит участок воздействия дважды, при этом, оптический путь при данном воздействии увеличивается в два раза. Теоретическое значение: 1.7 нм.

в)  $\Lambda = 0.012$  рад, для двухканального ВИРИ, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной **2.6 нм**, здесь учтено, что рассеянное излучение проходит участок воздействия дважды. Теоретическое значение: 1.52 нм.

Для лазерного источника со спектральной шириной полосы:  $\Delta\nu = 570$  кГц минимально экспериментально детектируемая фазовая амплитуда гармонического воздействия в полосе:  $\Delta f = 50$  кГц, при среднем ОСШ равном: 3 дБ равна:

а)  $\Lambda = 0.22$  рад, для одноканального ВИРИ, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной: **47 нм**, здесь учтено, что рассеянное излучение проходит участок воздействия дважды. Теоретическое значение: 30 нм.

б)  $\Lambda = 0.17$  рад, для двухканального ВИРИ, что соответствует амплитуде абсолютного удлинения участка волокна равной: **36 нм**, здесь учтено, что рассеянное излучение проходит участок воздействия дважды. Теоретическое значение : 24 нм.

Сравнивая значения амплитуд фазовых воздействий с теоретическими значениями, полученными в предыдущем пункте, можно сделать вывод, что фликкер – шумы увеличивают минимально детектируемый сигнал для высококогерентного лазера примерно на 70%, для низкокогерентного лазера примерно на 50%.

### 3.7. Выводы

В третьей главе рассмотрен вопрос о чувствительности одноканального и двухканального ВИРИ к внешним фазовым воздействиям. Впервые получены выражения для средних по ансамблю мощностей полезных сигналов для двух ВИРИ, при воздействии на них гармонического сигнала различной амплитуды.

Одноканальный ВИРИ обладает наибольшим откликом при воздействии в центре рассеивающего участка, двухканальный ВИРИ имеет наибольший отклик при воздействии в начале сигнального рассеивающего участка. Нормированное значение мощности полезного сигнала определяется при этом дисперсией интенсивности рассеянного излучения, найденной нами в первой главе.

Произведено сравнение средних мощностей полезных сигналов на выходах ВИРИ и интерферометра Маха – Цендера с эквивалентной величиной разности оптических путей интерферирующих лучей. Теоретически показано, что отклик ВИРИ в *большинстве случаев выше*, чем отклик интерферометра Маха – Цендера, при одинаковых условиях измерений.

Произведено экспериментальное сравнение средних ОСШ для трех указанных интерференционных схем и двух типов лазерных источников: с высокой и низкой степенями когерентности. Экспериментальные зависимости совпадают с теоретическими с хорошей точностью, при учете дополнительных фликкер–шумов, возникающих в схемах интерферометров.

Теоретически рассчитаны минимально возможные детектируемые амплитуды внешних гармонических фазовых воздействий на волокна одноканального и двухканального ВИРИ и соответствующие удлинения оптических волокон. С помощью анализа графиков средних ОСШ на выходе интерферометров экспериментально определены минимально возможные значения амплитуд внешних фазовых воздействий. Сравнение этих значений с теоретическими, позволило количественно охарактеризовать степень влияния фликкер – шумов.

Экспериментально определено, что для исследованного двухканального ВИРИ, для лазера с высокой степенью когерентности минимально детектируемая амплитуда абсолютного удлинения волокна, при внешнем гармоническом воздействии, в спектральной полосе измерения:  $\Delta f = 50$  кГц составляет: **2.6 нм**. (теоретическое значение составляет: **1.52 нм**) Для этого же интерферометра, но для лазера с низкой степенью когерентности минимально детектируемая амплитуда абсолютного удлинения волокна, при внешнем гармоническом воздействии составляет : **36 нм** (теоретическое значение составляет: **24 нм**).

Характеристики, рассмотренные в данной главе, являются усредненными по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , конкретные значения средних ОСШ, для различных фиксированных реализаций  $\rho$  могут отличаться как в большую, так и в меньшую от среднего значения сторону.

## Глава 4. Регистрация внешнего акустического воздействия на оптическое волокно с помощью ВИРИ методом фазового разнесения

Особый интерес при регистрации внешних фазовых воздействий представляет регистрация акустического сигнала. В данной главе будет рассматриваться метод регистрации внешних акустических воздействий на двухканальный ВИРИ с использованием метода фазового разнесения ( phase diversity) [45].

Для применения этого метода для ВИРИ необходимо осуществить сложение сигнального рассеянного излучения, содержащего информацию о внешнем воздействии и опорного излучения, не содержащего информацию о внешнем воздействии. В рассматриваемом двухканальном ВИРИ, в качестве сигнального и опорного излучений выступают излучения, рассеянные, соответственно, первым и вторым участками ВИРИ . Отметим, что в качестве опорного излучения может выступать непосредственно излучение используемого лазерного источника. Отрезок интерферометра, подвергающийся внешнему воздействию, будем, как и ранее, называть *сигнальным плечом интерферометра*, отрезок, формирующий опорное излучение, *будем называть опорным плечом интерферометра*.

Внешнее воздействие на оптическое волокно сигнального плеча ВИРИ приводит к фазовой модуляции рассеянного им излучения, в результате сигнал внешнего воздействия воспроизводится интерферометром с нелинейными искажениями, которые увеличиваются при увеличении амплитуды фазового воздействия. Данные нелинейные искажения были продемонстрированы в предыдущей главе на примере внешнего гармонического воздействия см. рисунок 3.13, для одноканального ВИРИ и рисунок 3.18, для двухканального ВИРИ. Предлагаемый в данной главе метод позволяет устранять нелинейные искажения и определять форму сигнала фазового воздействия на волокно с индексами модуляции, превышающими  $\pi$  рад.



В соответствии с ранее изложенным, поля излучений, рассеянных средой оптического волокна ВИРИ, являются случайными, как по модулю, так и по фазе, при этом возможны моменты времени, когда интенсивность излучения, рассеянного сигнальным или опорным (или обоими сразу) участками, обращается в нуль. В этом случае внешняя фазовая модуляция излучения в сигнальном плече ВИРИ может не приводить к изменению интенсивности на выходе интерферометра и его отклик на внешнее воздействие *будет равен нулю*. Ситуация, когда интерферометр не реагирует на внешнее воздействие называется эффектом *замирания сигнала* или *федингом*. Замирания для одноканального ВИРИ хорошо видны на рисунке 3.15 (в), они выглядят как узлы на графике изменения интенсивности. В настоящей главе рассматриваются возможные виды фединга, а также способы их устранения для двухканального ВИРИ, который применяется для регистрации внешнего фазового воздействия.

Применимость метода фазового разнесения для регистрации внешнего фазового воздействия на оптическое волокно с использованием двухканального ВИРИ демонстрируется экспериментально, на примере восстановления тонового сигнала и музыки [А7-А9].

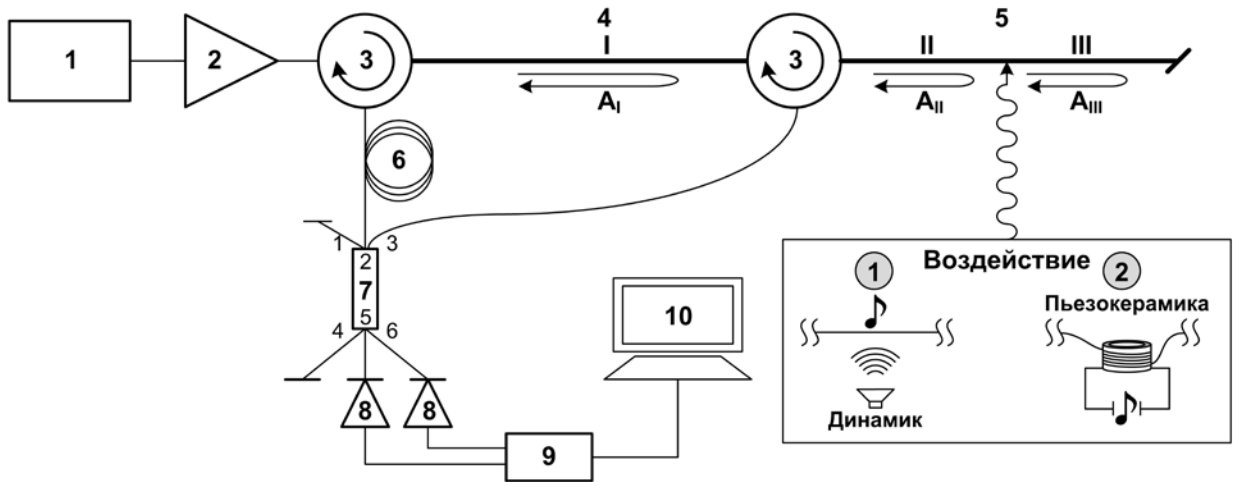
#### **4.1. Регистрация и демодуляция рассеянного излучения методом фазового разнесения**

В основе предлагаемой схемы регистрации сигнала внешнего фазового воздействия на оптическое волокно, как было указано ранее, лежит интерферометрический метод с использованием двухканального ВИРИ [А8]. Использование именно такой схемы регистрации обусловлено тем, что ее аналог относительно просто может быть реализован при создании приемной части в когерентном рефлектометре [48]. Для этого на приемной стороне рефлектометра необходимо реализовать линию задержки в виде интерферометра Маха – Цендера, которая позволяет сбивать излучения, рассеянные любыми последовательными участками волокна, занимаемыми распространяющимся импульсом. Интерференция этих полей в рефлектометре становится возможна,

потому что разница оптических путей между ними компенсируется линией задержки на приеме, длина которой выбирается равной пространственной протяженности оптического импульса в волокне. Ранее указано, что распределенный волоконный тракт когерентного рефлектометра представляет собой каскад последовательно соединенных рассеивающих участков, занимаемых распространяющимся импульсом. *Без линии задержки на приемной стороне, волоконный тракт можно интерпретировать, как каскад последовательно соединенных одноканальных ВИРИ. При добавлении линии задержки на приеме, распределенный волоконный тракт можно интерпретировать, как каскад последовательно соединенных двухканальных ВИРИ.*

Ключевым элементом в рассматриваемой схеме регистрации с применением метода фазового разнесения [45], является *оптический гибрид*, в котором и происходит интерференция полей излучений, рассеянных сигнальным и опорным плечами интерферометра. Гибрид объединяет сигнальную и опорную волны, поступающие на его входные порты, таким образом, что на разных выходных портах они суммируются с разными относительными фазами, т.е. оказываются разнесенными по фазе. Наиболее распространенными типами оптических гибридов являются шестипортовые [41, 43, 45, 89], вносящие относительную фазовую задержку в  $120^\circ$ , и восьмипортовые [42], в которых величина фазовой задержки обычно составляет  $90^\circ$ . В рассматриваемой схеме регистрации используется шестипортовый гибрид, которым является ответвитель  $3 \times 3$ .

Рассмотрим схему двухканального ВИРИ: рисунок 4.1. Будем считать, что в качестве источника используется лазер с высокой степенью когерентности, поэтому шумы интерферометра, вызванные флуктуациями фазы полупроводникового лазера достаточно малы.



*Рисунок 4.1. Схема экспериментальной установки двухканального ВИРИ для регистрации внешнего воздействия методом фазового разнесения: 1 – полупроводниковый лазер с распределенной обратной связью, 2 – эрбиевый волоконный усилитель, 3 – циркулятор, 4,5 – сигнальный и опорный рассеивающие участки, 6 – балансирующая линия задержки, 7 – оптический гибридный ответвитель 3×3, 8 – фотоприемник, 9 – аналого-цифровой преобразователь, 10 – компьютер.*

Согласно результатам предыдущей главы, для симметричного двухканального ВИРИ, с длинами участков: 47.5 м, средний уровень шума, нормированный на квадрат среднего значения интенсивности рассеянного излучения, в полосе измерения:  $\Delta f = 50$  кГц, составляет:  $-49$  дБ. Это значение можно считать малым, при условии измерения сигналов с большими амплитудами, сравнимыми со средним значением интенсивности рассеянного излучения, которые рассматриваются в данной главе.

Излучение высокой степени когерентности вводится последовательно в два независимых участка волокна, рассеянное излучение выводится из этих участков с помощью циркуляторов. Такая схема двухканального ВИРИ выбрана потому, что она, по сути, повторяет схему регистрации рассеянного излучения в когерентном рефлектометре с линией задержки на приемной стороне [48]. Схема интерферометра, изображенная на рисунке 4.1., аналогична схеме интерферометра, рассмотренной нами в предыдущих главах, рисунок 3.3. Для обеспечения условия симметричности ВИРИ (не являющегося существенным в

данном случае, в силу высокой когерентности источника излучения ) применяется дополнительная линия задержки, рисунок 4.1, таким образом, максимальное время задержки интерферирующих излучений, соответствует длине одного рассеивающего участка, то есть схема двухканального ВИРИ приводится к симметричной. Первый участок, обозначенный на рисунке 4.1  $I$  , не подвергается внешнему воздействию и является опорным плечом. На второй участок, обозначенный  $II$  и  $III$  , в некоторой области  $O$  оказывается внешнее воздействие:  $\varphi(t)$ , этот участок является сигнальным плечом.

Для моделирования внешнего фазового воздействия, как и в предыдущей главе, применяется пьезокерамический цилиндр, с намотанным на него отрезком волокна. Область воздействия также считается малой, по сравнению с длиной рассеивающего участка. Сигнальный участок делится малой областью воздействия, сосредоточенной вблизи точки  $O$  , дополнительно на два участка:  $II$  и  $III$  . Так как воздействие приводит к изменению оптического пути в волокне, излучение, рассеянное областью  $III$  , *будет модулировано по фазе*. Рассмотрим далее интерференцию полей в оптическом гибриде, рассеянных участками:  $I$  ,  $II$  и  $III$  . В силу предполагаемой высокой когерентности интерферирующих полей рассеянных излучений, будем считать, что эти поля коррелированы по времени и значение автокорреляционной функции поля источника близко к 1, поэтому при интерференции складываются их комплексные амплитуды. В результате, при суммировании полей рассеянного излучения, для каждого из участков, образуется новое поле с некоторой случайной комплексной амплитудой, статистика интенсивности суммарного поля рассмотрена в первой главе. Запишем комплексные амплитуды суммарных полей, рассеянных каждым из участков в виде:

$$\vec{A}_I^{scat} = \vec{p}_I A_I \exp(i\varphi_I) , \vec{A}_{II}^{scat} = \vec{p}_{II} A_{II} \exp(i\varphi_{II}) , \vec{A}_{III}^{scat} = \vec{p}_{III} A_{III} \exp(i\varphi_{III} + ik\varphi(t)) \quad (4.1),$$

где  $A_I, A_{II}, A_{III}$  – случайные амплитуды полей рассеянных излучений, для трех рассматриваемых участков,  $\varphi_I, \varphi_{II}, \varphi_{III}$  – случайные фазы полей рассеянных

излучений,  $\vec{p}_I$ ,  $\vec{p}_{II}$ ,  $\vec{p}_{III}$  – векторы поляризации полей рассеянных излучений рассеянных излучений,  $k\varphi(t)$  – сигнал пропорциональный внешнему воздействию с коэффициентом  $k$ . Рассмотрим упрощенный случай, когда поля рассеянного излучения, для каждого из рассматриваемых участков, полностью поляризованы и имеют одинаковое состояние поляризации. Комплексные амплитуды полей на выходных портах оптического гибрида (ответвителя 3x3) связаны с комплексными амплитудами на его входных портах через передаточную матрицу  $\mathbf{H}_3$  гибрида  $120^\circ$  [41, 90]:

$$\mathbf{H}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \exp(i\delta) & \exp(-i\delta) \\ 1 & \exp(-i\delta) & \exp(i\delta) \end{vmatrix} \quad (4.2).$$

Отметим, что запись (4.2) справедлива лишь для симметричного оптического ответвителя 3x3, в этом случае фазовая задержка  $\delta = 2\pi/3$ , при асимметричном ответвителе фазовая задержка отлична от  $2\pi/3$ , кроме того, модули комплексных коэффициентов матрицы (4.2) будут не равны друг другу, однако результаты демодуляции в этом случае аналогичны симметричному случаю, которым мы ограничимся. Для комплексных амплитуд полей на выходных портах оптического гибрида имеем:

$$\|A_4 \ A_5 \ A_6\|^T = \mathbf{H}_3 \|A_1 \ A_2 \ A_3\|^T \quad (4.3),$$

где индексами :1, 2, 3, – обозначены комплексные амплитуды полей, входящих в оптический гибрида, а индексами: 4, 5, 6 – обозначены комплексные амплитуды полей, выходящих из оптического гибрида. Для применяемого нами метода фазового разнесения достаточно использовать два входных и два выходных порта оптического гибрида, например: 2 и 3, 5 и 6. данный случай показан на рисунке 4.1. Проведем преобразования, учитывая, что комплексная амплитуда поля, поступающего на первый порт, равна нулю:  $A_1 = 0$ . Выходные комплексные амплитуды полей на портах 5 и 6 оптического гибрида из (4.3) имеют вид:

$$A_5(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ A_I \exp(i\varphi_I + i\delta) + A_{II} \exp(i\varphi_{II} - i\delta) + A_{III} \exp(i\varphi_{III} + ik\varphi(t) - i\delta) \right]$$

(4.4),

$$A_6(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ A_I \exp(i\varphi_I - i\delta) + A_{II} \exp(i\varphi_{II} + i\delta) + A_{III} \exp(i\varphi_{III} + ik\varphi(t) + i\delta) \right]$$

(4.5).

Опуская коэффициент нормировки  $1/\sqrt{3}$  для соответствующих интенсивностей получим:

$$I_5(t) = (A_I)^2 + (A_{II})^2 + (A_{III})^2 + 2A_I A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II} + 2\delta) +$$

$$+ 2A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t) + 2\delta) + 2A_{II} A_{III} \cos(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II})$$

(4.6)

$$I_6(t) = (A_I)^2 + (A_{II})^2 + (A_{III})^2 + 2A_I A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II} - 2\delta) +$$

$$+ 2A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t) - 2\delta) + 2A_{II} A_{III} \cos(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II})$$

(4.7),

где  $\delta = 2\pi/3$  в случае симметричного ответвителя  $3 \times 3$  [41]. Из выражений (4.6) и (4.7) видно, что один из членов в (4.6), содержащий переменную составляющую  $k\varphi(t)$ , сдвинут по фазе относительно аналогичного члена в (4.7) на  $4\delta = 8\pi/3$ , что и является основной особенностью метода фазового разнесения. Таким образом, косинус искомого сигнала внешнего фазового воздействия фигурирует в двух вышенаписанных выражениях с разными фазами.

Амплитуды и фазы всех полей рассеянного излучения (4.1), в случае если интерферометр находится в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой, плавно изменяются во времени под влиянием температурных дрейфов и не несут информации о воздействии, однако, в силу этих изменений может существенно снизиться отклик интерферометра на внешнее возмущение и возникнуть фединг сигнала.

Как отмечалось ранее, и что видно из выражений (4.6) и (4.7), внешнее фазовое воздействие  $k\varphi(t)$  вызывает нелинейный отклик интерферометра, тем не менее, оно может быть извлечено с применением методики, предложенной в [43] и развитой в [46], которая, по сути, является аналогом метода квадратурной обработки сигнала с угловой модуляцией [47]. Основная идея метода заключается в формировании из разнесенных по фазе сигналов: (4.6) и (4.7) сигнала следующего вида:

$$S = I^+ \frac{dI^-}{dt} - I^- \frac{dI^+}{dt} \quad (4.8),$$

где  $I^+ = \tilde{I}_5 + \tilde{I}_6$ ,  $I^- = \tilde{I}_5 - \tilde{I}_6$ , а сигналы  $\tilde{I}_5$  и  $\tilde{I}_6$  получены из исходных  $I_5$  и  $I_6$  путем удаления составляющих, плавно изменяющихся во времени – не содержащих члена  $\varphi(t)$ ,  $d/dt$  – производная по времени. Переменная  $S$ , в этом случае, оказывается пропорциональна производной по времени от модулирующего сигнала:  $d(k\varphi(t))/dt$ , а ее интеграл, с точностью до масштабного коэффициента, равен модулирующему сигналу  $k\varphi(t)$ , т.е. форма сигнала воздействия восстанавливается. Динамический диапазон при регистрации переменной интенсивности, вызванной внешним воздействием, ограничен сверху спектральной полосой принимающей электроники, которая должна включать все частотные гармоники, образующиеся при нелинейном отклике двухканального ВИРИ. Снизу динамический диапазон ограничен, шумами различного вида, основным из которых, как было подробно рассмотрено в предыдущей главе, являются шумы интенсивности, вызванные флуктуациями фазы полупроводникового лазера.

Предполагая, что в (4.6) и (4.7) составляющие, не содержащие модулирующий сигнал  $\varphi(t)$ , плавно изменяются во времени и не пропускаются принимающей электроникой, будем рассматривать только переменные члены этих уравнений. Таким образом, рассмотрим выражения:

$$\tilde{I}_5(t) = 2A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t) + 2\delta) + 2A_{II} A_{III} \cos(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \quad (4.9),$$

$$\tilde{I}_6(t) = 2A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t) - 2\delta) + 2A_{II} A_{III} \cos(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \quad (4.10).$$

Формируя комбинации уравнений (4.9) и (4.10) в соответствии с (4.8), получим:

$$I^+(t) = 4A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \cos(2\delta) + 4A_{II} A_{III} \cos(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \quad (4.11),$$

$$I^-(t) = -4A_I A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) \quad (4.12),$$

$$\frac{d}{dt}[I^+(t)] = \left[ \begin{array}{l} 4A_I A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \cos(2\delta) - \\ -4A_{II} A_{III} \sin(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \end{array} \right] \frac{d(k\varphi(t))}{dt} \quad (4.13),$$

$$\frac{d}{dt}[I^-(t)] = \left[ 4A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) \right] \frac{d(k\varphi(t))}{dt} \quad (4.14).$$

В итоге для переменной  $S$  получим следующее выражение [A7, A8], см. приложение 18:

$$S(t) = 16A_I (A_{III})^2 \sin(2\delta) \left[ A_I \cos(2\delta) + A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) \right] \frac{d(k\varphi(t))}{dt} \quad (4.15).$$

Таким образом, интегрируя по времени выражение (4.15), можно получить восстановленный сигнал  $\Phi(t) = \int_0^t S(t) dt$  фазового воздействия  $k\varphi(t)$ , с точностью до множителя, плавно изменяющегося во времени под воздействием окружающей среды. Этот множитель зависит от соотношения амплитуд и фаз полей излучений, рассеянных рассматриваемыми участками, и в некоторых случаях он может обращаться в нуль, тогда сигнал внешнего фазового воздействия невозможно восстановить подобным способом, то есть в двухканальном ВИРИ возникает эффект замирания или фединг восстановленного сигнала.

## 4.2. Фединг сигнала, восстановленного методом фазового разнесения

Причины возникновения фединга восстановленного сигнала в двухканальном ВИРИ можно вывести из уравнений (4.6), (4.7) или (4.9), (4.10) и (4.15) [A7-A9]. Как отмечалось ранее, амплитуды и фазы полей рассеянных излучений вследствие температурных дрейфов плавно изменяются во времени случайным образом, при этом, в некоторые моменты времени амплитуда излучения, рассеянного каким – либо из двух участков ВИРИ, может быть близкой к нулю. Рассмотрим различные возможности возникновения фединга сигнала в двухканальном ВИРИ, при его восстановлении методом фазового разнесения [A7, A8]:



1) Если амплитуда поля, рассеянного опорным отрезком ВИРИ:  $A_I$ , мала, тогда в (4.6), (4.7) преобладающими становятся последние члены (если  $A_{II}$  и  $A_{III}$  не равны нулю), при этом, оба сигнала, регистрируемых на 5 и 6 портах гибрида, примерно равны друг другу, и изменяются в фазе:

$$I_5(t) \approx (A_{II})^2 + (A_{III})^2 + 2A_{II}A_{III} \cos(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \quad (4.16),$$

$$I_6(t) \approx (A_{II})^2 + (A_{III})^2 + 2A_{II}A_{III} \cos(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \quad (4.17).$$

При этом, из (4.15) следует, что восстановленный сигнал близок к нулю. Отметим, что этот случай фединга может также соответствовать ортогональности состояния поляризаций полей  $\vec{p}_I A_I$  и  $\vec{p}_{III} A_{III}$ .

2) Если амплитуда поля, рассеянного сигнальным отрезком ВИРИ,  $A_{III}$  мала, тогда члены уравнений (4.6), (4.7), содержащие модулирующий сигнал  $k\varphi(t)$ , малы, а сами сигналы на портах 5 и 6 гибрида, не содержат информацию о внешнем воздействии и равны, соответственно:

$$I_5(t) \approx (A_I)^2 + (A_{II})^2 + 2A_I A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II} + 2\delta) \quad (4.18)$$

$$I_6(t) \approx (A_I)^2 + (A_{II})^2 + 2A_I A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II} - 2\delta) \quad (4.19).$$

Из (4.15) следует, что восстановленный сигнал близок к нулю. Этот случай может также соответствовать ортогональности состояния поляризаций поля  $\vec{p}_{III} A_{III}$  к полям  $\vec{p}_I A_I$  и  $\vec{p}_{II} A_{II}$ .

3) Если член в квадратных скобках в (4.15) близок к нулю, при условии, что  $A_I$ ,  $A_{II}$  и  $A_{III}$  не равны нулю:

$$A_I \cos(2\delta) + A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) \approx 0 \quad (4.20).$$

Прямой подстановкой условия (4.20) в выражения (4.9) и (4.10) преобразуются к виду, см. приложение 19:

$$\tilde{I}_5(t) = -2A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) [A_I \sin(2\delta) + A_{II} \sin(\varphi_{II} - \varphi_I)] \quad (4.21),$$

$$\tilde{I}_6(t) = +2A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) [A_I \sin(2\delta) - A_{II} \sin(\varphi_{II} - \varphi_I)] \quad (4.22).$$

Из выражений (4.21) и (4.22) видно, что при условии (4.20) переменные составляющие интенсивностей сигналов на портах 5 и 6 гибрида находятся в противофазе друг с другом, причем амплитуды их изменения не равны друг другу.

Интересно отметить частный случай, возникающий при условии (4.20),: обращение в нуль одной из переменных составляющих в (4.9) или (4.10), соответственно, на портах 5 или 6 гибрида, который достигается при выполнении одного из равенств:

$$A_I \sin(2\delta) \pm A_{II} \sin(\varphi_{II} - \varphi_I) = 0 \quad (4.23).$$

После несложных тригонометрических преобразований, см. приложение 20 можно установить, что одновременное выполнение условий (4.20) и (4.23) достигается, если:

$$A_I = A_{II}, \quad \varphi_I - \varphi_{II} = \pi \pm 2\delta + 2\pi n, \quad n - \text{целое} \quad (4.24).$$

При выполнении условий (4.24), как несложно установить, происходит «уничтожение» сигнальной составляющей в одном из уравнений (4.9) или (4.10), т.е. соответствующая интенсивность не изменяется во времени.

Три условия, описанные выше, исчерпывают все возможности возникновения фединга восстановленного сигнала в двухканальном ВИРИ с применением метода фазового разнесения. В силу того, что фазы и амплитуды полей рассеянных излучений для трех рассматриваемых участков изменяются независимо друг от друга, рассмотренные случаи фединга могут происходить одновременно, в различных сочетаниях.

### 4.3. Методы устранения фединга восстановленного сигнала

Полученное выражение (4.15) также позволяет определить условия, при которых фединг восстановленного сигнала может быть снижен. В силу своего случайного характера, амплитуды полей рассеянных излучений изменяются во времени случайным образом, существуют также моменты времени, когда эти амплитуды близки к нулю. При этом малая величина амплитуды опорного поля

$A_I$  приводит к случаю фединга 1, а также способствует случаю 3. Простой способ уменьшения влияния флуктуаций амплитуды опорного поля заключается в его дополнительном усилении на приемной стороне, в этом случае фединг вида 1 становится более редким, а вида 3 практически исчезает, в силу того что при большой величине опорного поля  $A_I$ , условие (4.20) выполняется значительно реже.

Фединг вида 1 и 2, связанный с малым значением амплитуды опорного поля, рассеянного участком I :  $A_I$  и амплитуды сигнала поля, рассеянного участком III :  $A_{III}$  уменьшится, если величины этих амплитуд будут поддерживаться на высоком уровне. Для выполнения этого условия вспомним, что случайная амплитуда поля, рассеянного участком, зависит, как от конкретной реализации распределения коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , так и от длины волны и состояния поляризации заводимого в рассеивающее волокно излучения. В случае источника с высокой степенью когерентности, плотность распределения интенсивности излучения, рассеянного участком, по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров  $\{\rho\}$ , имеет экспоненциальный вид, см. первую главу и [32 – 34], случайная амплитуда рассеянного поля (величина модуля комплексной амплитуды) имеет в этом случае *релеевскую плотность распределения*. Простым способом устранения фединга вида 1 и 2 является *изменение конкретной реализации амплитуд излучений, рассеянных участками I :  $A_I$  и III :  $A_{III}$ , в случае их малости*. Например, если амплитуда сигнала поля  $A_{III}$  становится малой, изменение длины волны лазерного излучения или его состояния поляризации может привести к увеличению амплитуды поля  $A_{III}$  и фединг вида 2 устраняется. Отметим, что подобные способы *не всегда* приводят к устранению фединга. Это, по – видимому, объясняется тем, что при изменении длины волны или состояния поляризации излучения источника, амплитуда поля рассеянного излучения изменяется в пределах одного и того же случайного распределения, описываемого релеевской плотностью. Однако, при изменении длины волны или состояния

поляризации излучения, существует *ненулевая вероятность* того, что случайная реализация амплитуды поля излучения, рассеянного участком, изменится незначительно, оставаясь малой по величине. Тем не менее, изменение описанных параметров устраняет фединг достаточно эффективно.

#### **4.4. Экспериментальное детектирование сигнала внешнего фазового воздействия с помощью двухканального ВИРИ**

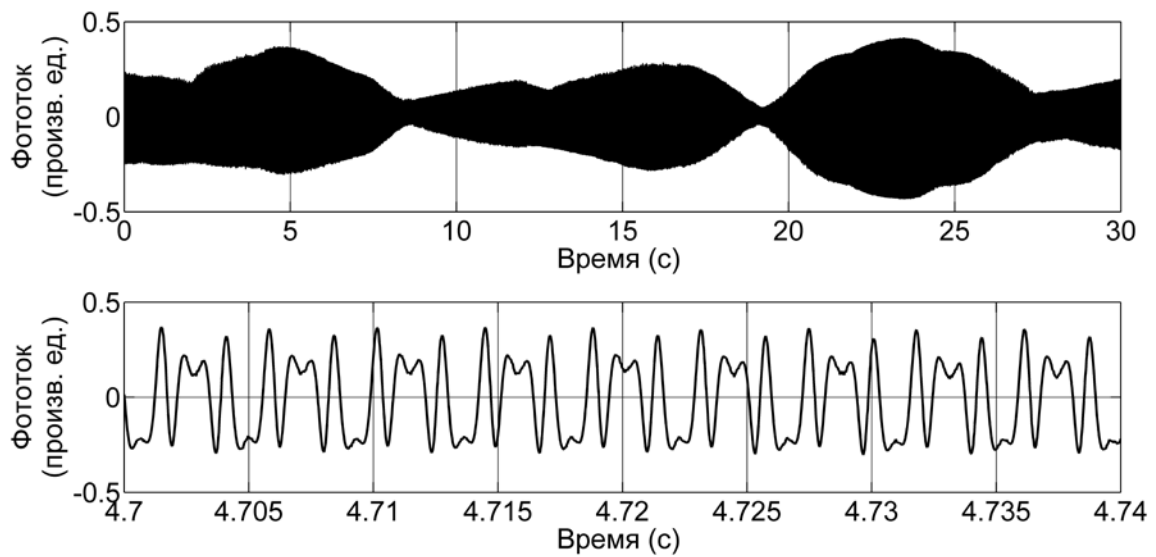
Схема экспериментальной установки соответствует схеме, изображенной на рисунке 4.1. Излучение полупроводникового лазера со спектральной шириной полосы 2 кГц генерируется в непрерывном режиме на длине волны в диапазоне 1555 нм и усиливается эрбиевым волоконным усилителем до мощности 25 дБм. Излучение проходит в два плеча ВИРИ длиной 47.2 м каждое, через два циркулятора, пропускающие в обратном направлении излучения, рассеянные каждым из участков: *I*, *II* и *III*. Далее рассеянные излучения интерферируют в гибриде  $120^\circ$  и принимаются двумя фотоприемниками, сигналы от которых оцифровываются с частотой 100 кГц каждый и анализируются с помощью персонального компьютера. Радиочастотные РС – фильтры, установленные перед фотоприемниками, предотвращают эффект наложения частот больших чем 50 кГц. Внешнее фазовое воздействие на участок волокна моделировалось аналогично способу, рассмотренному в предыдущей главе: с помощью отрезка волокна, намотанного на пьезокерамический цилиндр. На цилиндр подавались два типа сигналов: тоновый сигнал с частотой 230 Гц и различной амплитуды и музыка различной громкости.

Первичная обработка принятых сигналов состояла в их фильтрации фильтрами низких (до 60 Гц) и высоких (свыше 10 кГц) частот, для устранения составляющей, плавно меняющейся во времени и шумовой составляющей. Дальнейшая обработка двух сигналов осуществлялась по формуле (4.8).

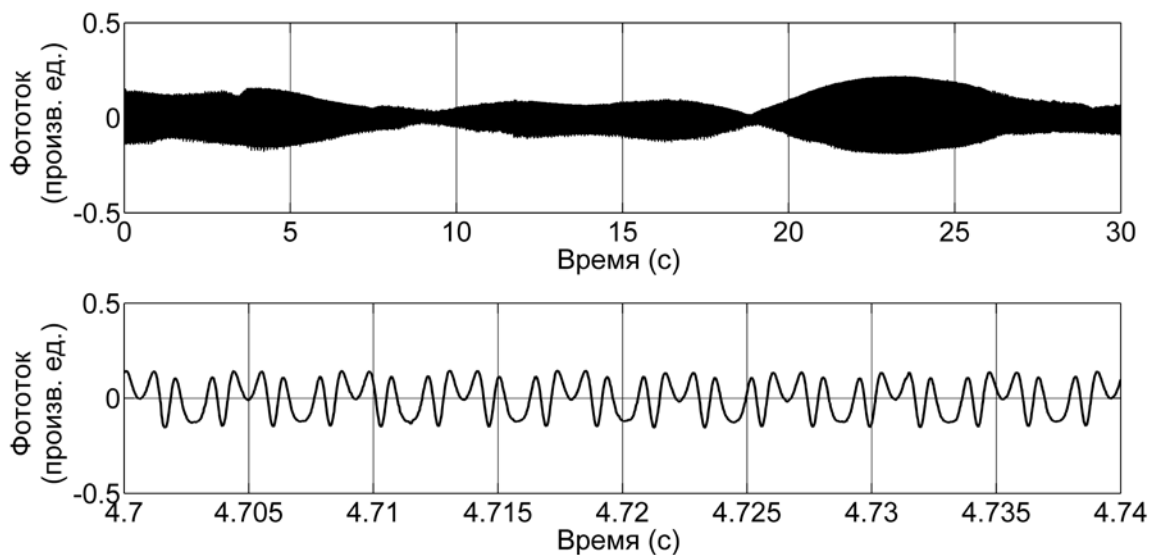
Записи сигналов с двух фотоприемников, регистрирующих интенсивности излучений, выходящих с пятого и шестого портов оптического гибрида, для тонового сигнала с частотой 230 Гц, воздействующего на волокно через

пьезокерамический цилиндр, показаны на рисунке 4.2 (а) и 4.2 (б) [А7, А8]. Индекс фазовой модуляции излучений был равен 3, вследствие чего тоновый сигнал воспроизводился интерферометром с нелинейными искажениями. Нелинейные искажения проявлялись в появлении дополнительных частот, превышающих частоту фазовой модуляции и кратных ей, эти искажения видны на рис 4.2 (а) и (б).

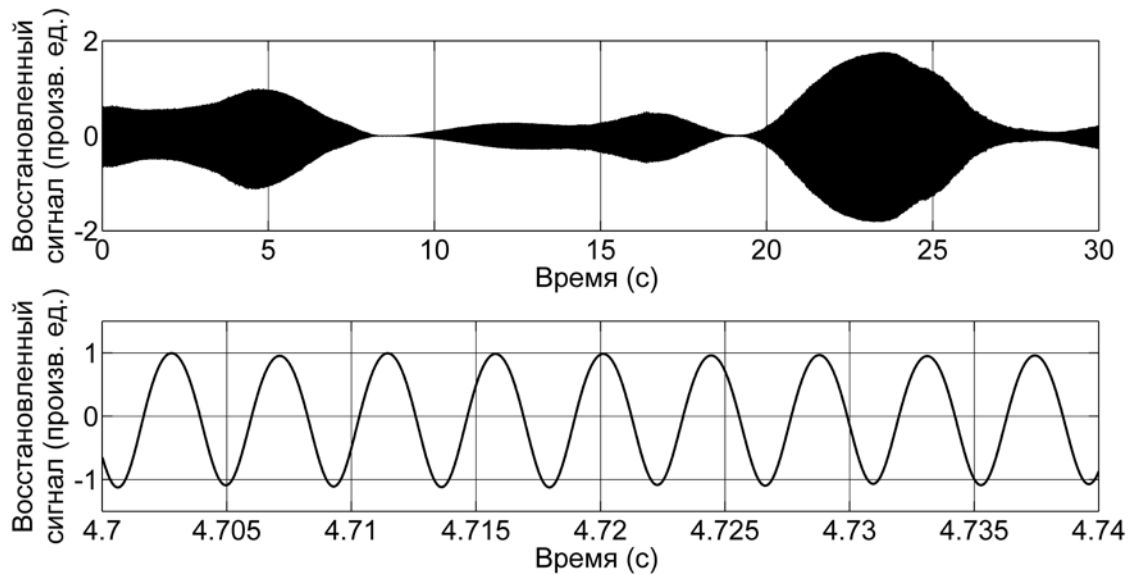
(а)



(б)



(В)



*Рисунок 4.2. Временные зависимости сигналов, регистрируемых фотоприемниками с пятого (а) и шестого (б) портов оптического гибрида, а также восстановленного сигнала (в), при внешнем воздействии на волокно тонового сигнала с частотой 230 Гц через пьезокерамический цилиндр. Индекс фазовой модуляции равен 3. Снизу показаны картины в увеличенном временном масштабе.*

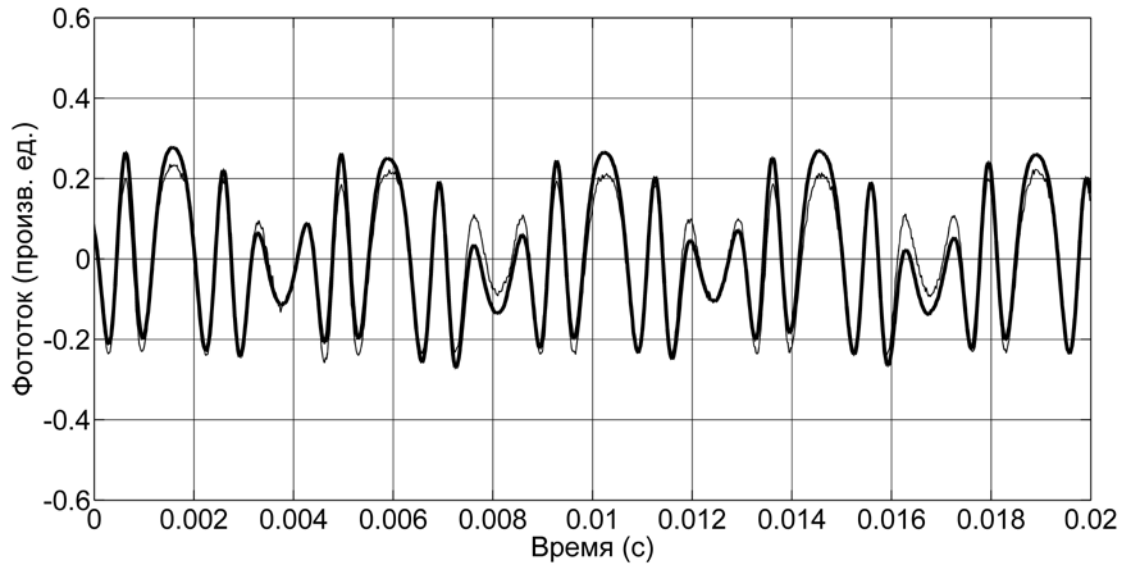
Звуковой сигнал от акустических колонок давал аналогичную картину, но с меньшими искажениями. Постоянная составляющая зарегистрированных сигналов отфильтровывалась. Восстановленный сигнал изображен на рисунке 4.2 (в). Видно, что форма сигнала восстановлена с точностью до масштабного коэффициента, что подтверждает применимость рассматриваемой схемы приема и демодуляции.

Восстановление музыкального отрывка, воздействующего на волокно, дает хорошие результаты, однако, в случае слабого звука качество воспроизводимого сигнала ограничено шумами различных видов, прежде всего вызванного фазовыми флуктуациями поля лазерного источника.

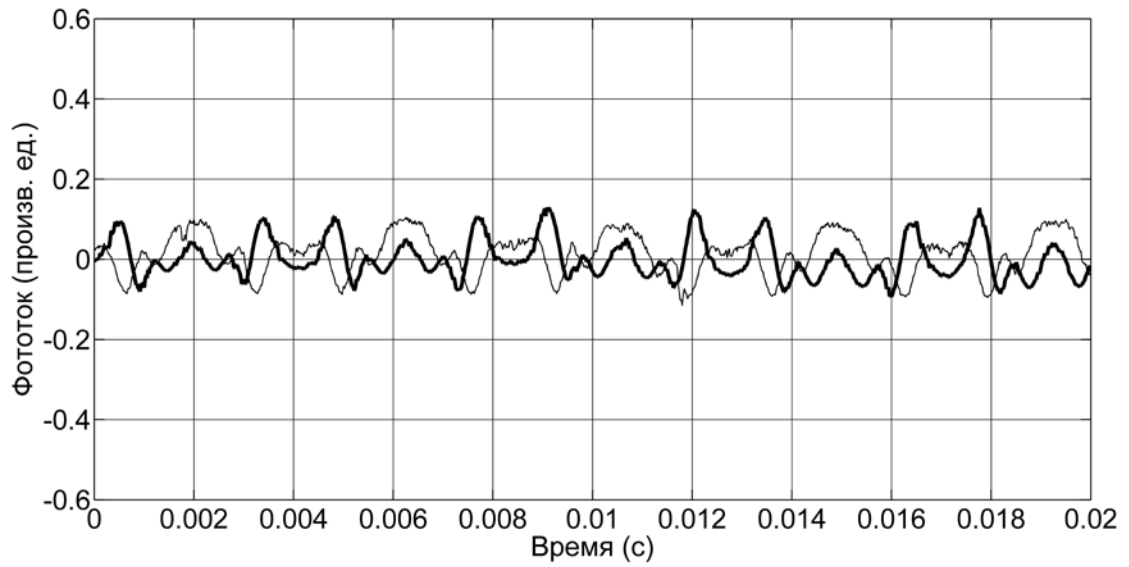
Как можно видеть, на графике восстановленного тонового сигнала, рисунок 4.2.(в), присутствуют области, в которых восстановленный сигнал мал, это и есть области замираний или фединга, причины возникновения которого рассмотрены в

предыдущем пункте. Все рассмотренные случаи фединга наблюдаются в восстановленном сигнале экспериментально [А7, А8], см. рисунок 4.3.

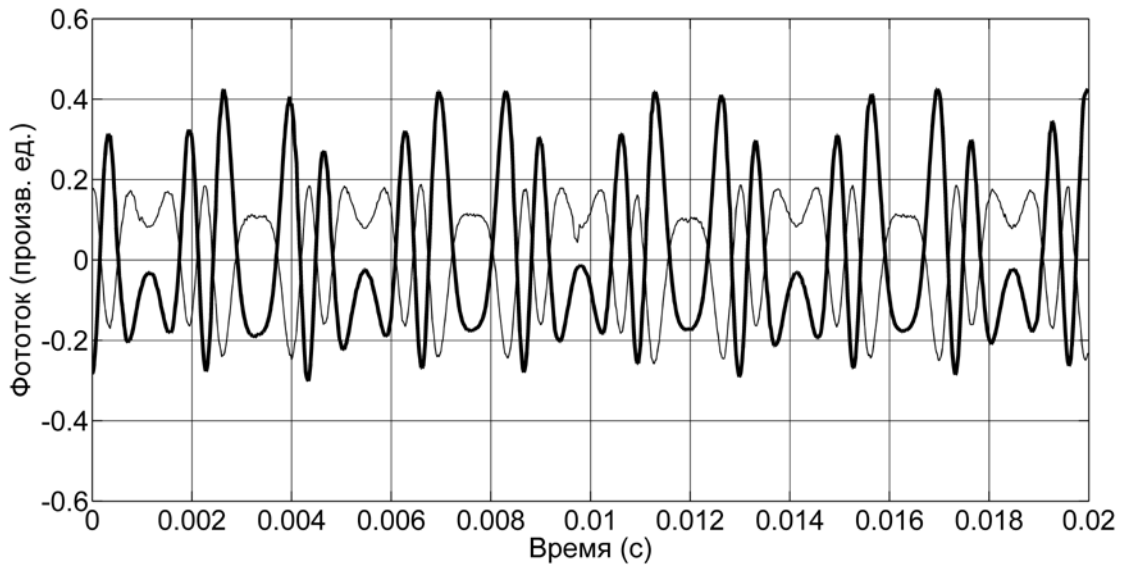
а)



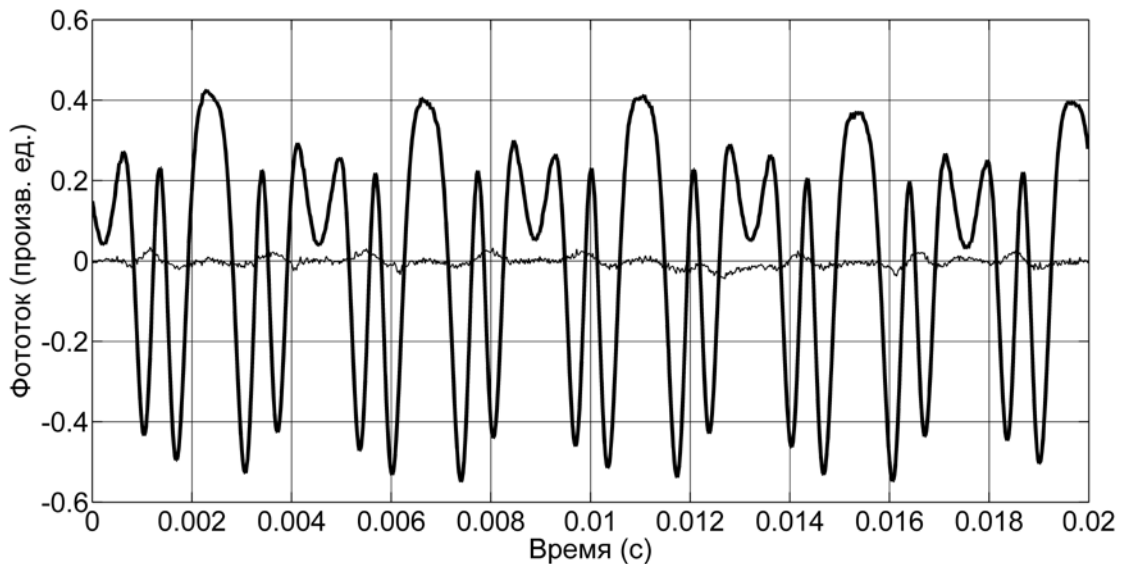
б)



в)



г)



*Рисунок 4.3 . Временные зависимости сигналов, регистрируемых фотоприемниками, с пятого (толстая кривая) и шестого (тонкая кривая) портов оптического гибрида, приводящие к федингу восстановленного сигнала; (а) – два регистрируемых сигнала находятся в фазе друг с другом, (б) – оба регистрируемых сигнала малы, (в) – два регистрируемых сигнала находятся в противофазе друг с другом, (г) – один из регистрируемых сигналов мал по сравнению с другим регистрируемым сигналом.*

Случай малого опорного сигнала  $A_r$ , соответствующий случаю фединга 1, изображен на рисунок 4.3(а), регистрируемые сигналы находятся в фазе друг с

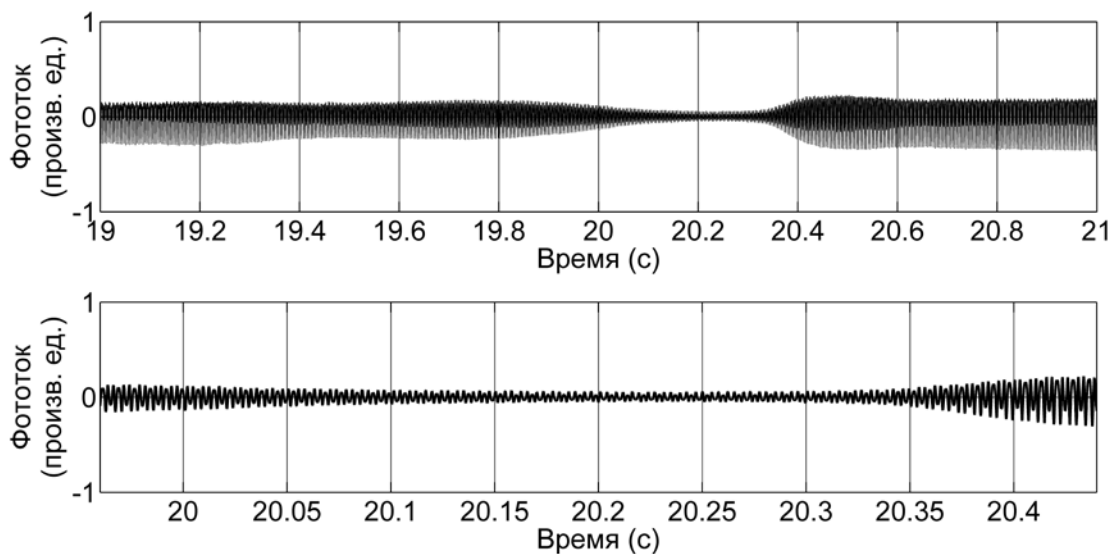


другом. Случай малого сигнального поля  $A_{III}$ , соответствующий случаю фединга 2, изображен на рисунок 4.3(б), на котором видно, что регистрируемые сигналы малы и становится заметна случайная шумовая составляющая в регистрируемой интенсивности. Случай обращения в нуль выражения (4.20), соответствующий случаю фединга 3, изображен на рисунок 4.3(в), видно, что регистрируемые сигналы находятся в противофазе друг с другом. Частный случай (4.20), условием выполнения которого является (4.23), изображен на рисунок 4.3(г), на котором видно, что преобладающим становится один из регистрируемых сигналов. Отметим еще раз, что в силу того, что амплитуды и фазы полей рассеянных излучений меняются независимо друг от друга, описанные выше случаи фединга могут происходить одновременно в различных сочетаниях. Рассмотренные теоретически и наблюдаемые экспериментально случаи фединга исчерпывают возможности его возникновения, при использовании двухканального ВИРИ и метода фазового разнесения с применением оптического гибрида.

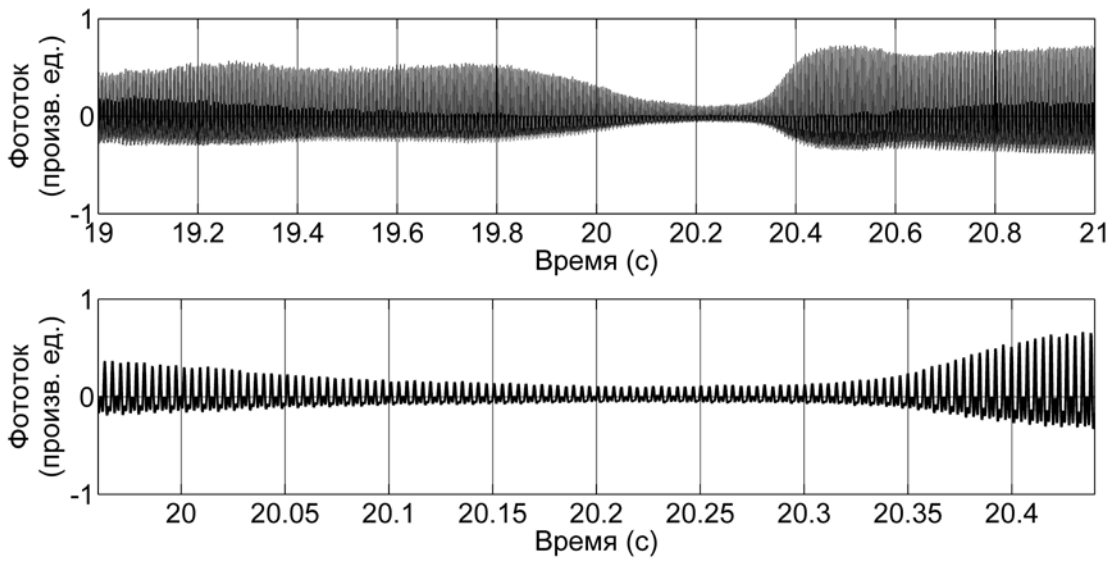
Для устранения фединга восстановленного сигнала были применены методы усиления амплитуды опорного поля  $A_r$ , а также изменение состояния поляризации излучения полупроводникового лазера, вводимого в ВИРИ. Усиление амплитуды опорного поля производилось с использованием дополнительного эрбиевого волоконного усилителя, с последующей фильтрацией усиленного сигнала узкополосным оптическим фильтром. Коэффициент усиления был подобран исходя из значения оптической мощности, приводящей к перегрузке фотоприемников. Усиления опорного сигнала  $A_r$ , приводило к тому, что случаи фединга, соответствующие условиям слабого опорного сигнала и малости выражения (4.20), возникали значительно реже. Стоит отметить, однако, что случаи очень малой амплитуды опорного поля  $A_r$  все же имели место, при этом преобладающим становился спонтанный шум усилителя в полосе определяемой используемым фильтром, и фазовое воздействие не могло быть восстановлено описанным способом.

Случаи фединга 1 и 2, соответствующие малости амплитуд опорного  $A_I$  и сигнального  $A_{III}$  полей, как было сказано ранее, могут быть устранены путем изменения состояния поляризации или длины волны излучения лазерного источника, заводимого в волокна интерферометра. Поскольку используемый лазерный источник не позволял осуществлять изменение длины волны его излучения, в работе был применен способ изменения состояния поляризации этого излучения. Данный способ мог приводить к увеличению амплитуды рассеянного излучения, в силу того, что при изменении состояния поляризации заводимого излучения, *изменяется статистическая реализация амплитуды рассеянного излучения*. При возникновении фединга сигнала, соответствующего случаю 2 (одновременному уменьшению обеих интенсивностей, регистрируемых с пятого и шестого портов оптического гибрида), производилось *изменение входного состояния поляризации на ортогональное первоначальному*, в результате чего обе регистрируемые интенсивности увеличивались и фединг устранялся [A8], см. рисунок 4.4. Данный способ пока не был применен для устранения фединга вида 1 в силу трудности визуального определения того, что две регистрируемые интенсивности рассеянного излучения изменяются синфазно.

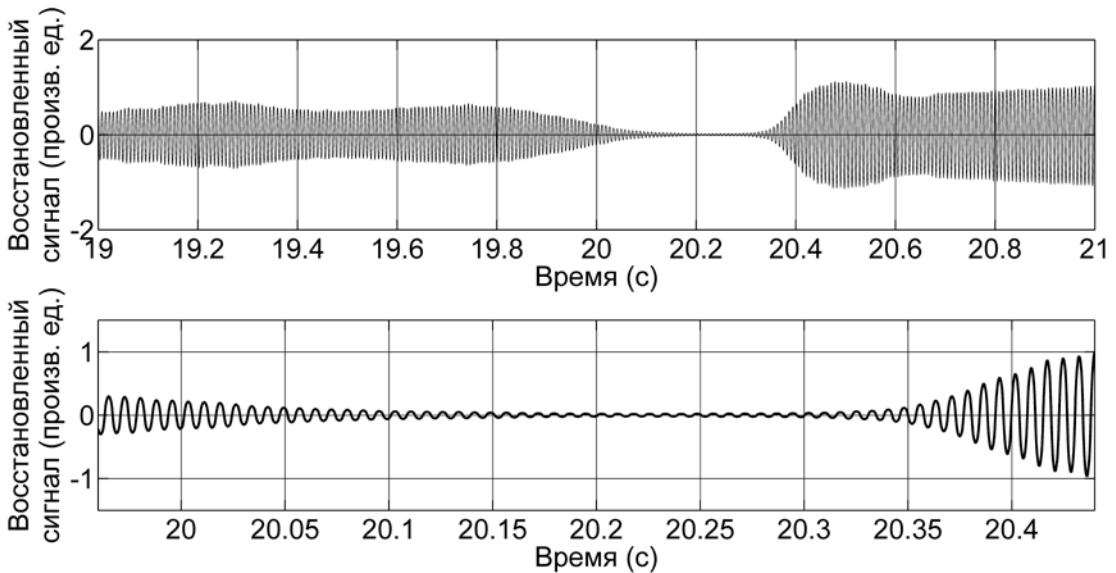
(a)



(б)



(в)



*Рисунок 4.4. Временные зависимости сигналов, регистрируемых фотоприемниками с пятого (а) и шестого (б) портов оптического гибрида, а также восстановленного сигнала (в), при воздействии на волокно тонового сигнала с частотой 130 Гц. Снизу показаны картины в увеличенном временном масштабе. Виден фединг восстановленного сигнала, возникающий в момент уменьшения интенсивностей, регистрируемых с портов гибрида, и его устранение, при изменении состояния поляризации заводимого излучения на ортогональное.*

Отметим, однако, что изменение начального состояния поляризации не всегда приводило к устранению фединга сигнала, так как случайные значения

амплитуд полей рассеянных излучений, получаемые для двух состояний поляризации заводимого излучения, могут оставаться близкими по величине.

#### **4.5. Выводы**

Таким образом, впервые применен интерференционный метод регистрации и демодуляции излучения, рассеянного двухканальным ВИРИ, с использованием техники фазового разнесения для определения формы сигнала внешнего воздействия на оптическое волокно интерферометра, с точностью до масштабного коэффициента. Применимость метода подтверждена экспериментально на примере восстановления тонового сигнала воздействия и воздействия музыкой.

Показано, что восстановленный сигнал воздействия содержит области фединга, причины которого лежат в случайной природе когерентно рассеянного излучения. Установлено, что в двухканальном ВИРИ возможны три различных вида фединга, возникающие при малых значениях амплитуд полей, рассеянных излучений, а также при определенных амплитудных и фазовых соотношениях между комплексными амплитудами полей рассеянных излучений. Все описанные виды фединга сигнала экспериментально подтверждены.

Продемонстрированы методы устранения фединга восстановленного сигнала путем усиления амплитуды опорного рассеянного излучения, а также путем изменения состояния поляризации излучения, заводимого в интерферометр или его центральной длины волны.

## Заключение

Основные результаты диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

- 1) Исследован новый тип интерферометра: Волоконный интерферометр рассеянного излучения (ВИРИ) с полупроводниковым лазерным источником. Предложен статистический метод описания работы ВИРИ, развитый на основе теории образования спекл-картин. Аналитически получен ряд статистических характеристик случайной интенсивности рассеянного излучения на выходе ВИРИ, справедливых для ансамбля статистически независимых рассеивающих участков или статистически независимых распределений коэффициентов рассеяния центров среды волокна: среднее значение, дисперсия, плотность распределения интенсивности рассеянного излучения, контраст интерферограммы. Эти величины получены в зависимости от степени когерентности источника излучения, длины рассеивающего участка и степени поляризации рассеянного излучения. Для подтверждения теоретических выводов было проведено математическое моделирование процесса рассеяния в волокне, результаты которого подтвердили результаты, предсказываемые теорией. Произведено экспериментальное измерение статистических характеристик с использованием одноканального ВИРИ, с разными длинами участков и источниками с различной степенью когерентности. Показано, что в соответствии с теоретическими выводами, статистическая плотность распределения интенсивности рассеянного излучения изменяется, переходя от функции близкой к экспоненциальной для высококогерентного источника, до функции близкой к гауссовской, для низкокогерентного источника, соответственно, контраст интерферограммы ВИРИ изменяется между двумя предельными значениями 1 и 0.
- 2) Впервые исследованы спектральные характеристики ВИРИ: получено общее выражение для спектральной плотности мощности шума (СПМШ) интенсивности на выходах одноканального и двухканального ВИРИ, усредненной по ансамблю независимых распределений коэффициентов рассеяния центров среды.

Выражение для средней СПМШ интенсивности получено в зависимости от степени когерентности источника и протяженности рассеивающего участка. Показано, что для низких частот (менее 200 кГц) средняя СПМШ интенсивности на выходе ВИРИ может быть аппроксимирована белым шумом. Предельный вид выражения для средней СПМШ интенсивности при малой когерентности источника или большой протяженности рассеивающего участка имеет лоренцевской форму, что соответствует выводам, сделанным в более ранних работах. Впервые произведено экспериментальное измерение спектральных характеристик симметричного двухканального ВИРИ при различной длине его плеч. Экспериментальные спектры мощности шума ВИРИ совпадают с теоретическими с хорошей точностью.

3) Разработан вопрос об отклике ВИРИ при внешнем фазовом воздействии на его оптическое волокно. Впервые получены выражения для средних мощностей полезного сигнала на выходах одноканальной и двухканальной схем ВИРИ, при воздействии на волокно внешнего гармонического возмущения. Средняя мощность полезного сигнала на выходе ВИРИ зависит от амплитуды внешнего гармонического воздействия, степени когерентности источника излучения, протяженности рассеивающего участка ВИРИ и места, куда прикладывается внешнее воздействие. Максимальное значение мощности полезного сигнала на выходах одноканального и двухканального ВИРИ определяется дисперсией интенсивности рассеянного излучения. Произведено сравнение средних мощностей полезных сигналов для ВИРИ и интерферометра Маха-Цендера, с эквивалентной величиной фазовой задержки интерферирующих лучей.

4) На основе полученных выражений для средней СПМШ интенсивности на выходе ВИРИ и средней мощности полезного сигнала на выходе ВИРИ, при внешнем гармоническом фазовом воздействии на его волокно, установлена зависимость среднего отношения сигнал/шум (ОСШ) на выходе интерферометра от амплитуды фазового воздействия на его волокно. Выполнено экспериментальное измерение зависимостей средних ОСШ от амплитуд внешних фазовых воздействий для одноканального и двухканального ВИРИ, а также для

интерферометра Маха-Цендера . При учете дополнительных фликкер-шумов, возникающих в интерферометрах, экспериментальные кривые с хорошей точностью совпадают с теоретическими.

5) Теоретически и экспериментально определены пороговые чувствительности одноканального и двухканального ВИРИ. Экспериментально показано, что для двухканального ВИРИ, для лазера с высокой степенью когерентности, минимально детектируемая амплитуда абсолютного удлинения волокна, при внешнем гармоническом воздействии составляет: 2.6 нм. (теоретическое значение составляет: 1.52 нм) Для этого же интерферометра, но для лазера с низкой степенью когерентности минимально детектируемая амплитуда абсолютного удлинения волокна, при внешнем гармоническом воздействии составляет : 36 нм (теоретическое значение составляет: 24 нм). Таким образом, влияние фликкер-шума системы, снижает пороговую чувствительность ВИРИ и увеличивает минимально детектируемый им сигнал внешнего воздействия.

6) Впервые исследована возможность использования ВИРИ для регистрации и демодуляции рассеянного излучения и определения формы сигнала внешнего фазового воздействия на оптическое волокно, с точностью до масштабного коэффициента. В основе предлагаемой схемы лежит метод фазового разнесения с использованием оптического гибрида. Применимость данного метода подтверждена экспериментально при восстановлении тонового сигнала, воздействующего на оптическое волокно, и при восстановлении музыки.

7) Детально исследованы причины фединга восстановленного сигнала, возникающего при демодуляции рассеянного излучения двухканального ВИРИ с использованием метода фазового разнесения. Теоретически и экспериментально показано, что существует три возможности возникновения фединга в такой схеме ВИРИ. Предложены и продемонстрированы способы устранения фединга путем усиления амплитуды опорного рассеянного излучения в ВИРИ или путем изменения поляризации заводимого в ВИРИ излучения или его центральной длины волны.

В завершении работы, я хочу выразить глубокую и искреннюю благодарность моему научному руководителю Владимиру Тимофеевичу Потапову за постоянное и пристальное внимание к работе на всех ее этапах, его вдохновляющий интерес и множество ценных идеи, появившихся в процессе регулярных обсуждений. Я благодарю Владимира Тимофеевича за его доброту, человечность, мудрость, понимание, терпение и искреннюю поддержку, которые сопутствовали меня на протяжении этого нелегкого пути. Я счастлив работать с таким человеком!

Я искренне благодарен своей семье и маме, чья любовь, участие, понимание и поддержка, всегда являлись надежной опорой для меня и придавали сил.

Я благодарю своего отца, ушедшего, не дождавшись написания данной диссертации, и выражаю надежду, что работа получилась достойной его имени. Я никогда не забуду всего того, что сделал для меня мой отец и посвящаю данную работу его памяти!

Я также выражаю искреннюю благодарность моим коллегам, а также всем тем, кто помогал мне и способствовал созданию данной работы. Прежде всего, я от души благодарю Валентина Павловича Гапонцева за предоставление исключительной возможности выполнить эту работу.

Я искренне благодарен:

Самарцеву Игорю Эдуардовичу, Черникову Максиму Александровичу, Тезадову Ярославу Арсейновичу, Моршневу Сергею Константиновичу, Давыдову Борису Леонидовичу, Мякишеву Александру Петровичу, Брылову Валерию Михайловичу, Ефимову Николаю Михайловичу, Левитину Владимиру Иосифовичу, Голышеву Владимиру Юрьевичу, Звержховскому Владиславу Дмитриевичу, Логинову Николаю Сергеевичу, Романову Александру Михайловичу.

Я глубоко признателен профессору Джозефу Гудмену (Joseph W. Goodman) за подаренную мне книгу [34].

Отдельно хочу поблагодарить моего учителя Александра Михайловича Шарова, к сожалению, рано ушедшего, за все, чему мне удалось научиться у него.



## Список литературы

1. Dandridge, A. Fiber Optic Sensors Based on the Mach–Zehnder and Michelson Interferometers / A. Dandridge // *Fiber Optic Sensors: An Introduction for Engineers and Scientists* / E. Udd, W. B. Spillman. – Hoboken, 2011. – Ch. 10. – P. 231-275.
2. Kersey, A. D. Distributed and Multiplexed Fiber Optic Sensors / A. D. Kersey // *Fiber Optic Sensors: An Introduction for Engineers and Scientists* / E. Udd, W. B. Spillman. – Hoboken, 2011. – Ch. 11. – P. 277-314.
3. Giallorenzi, T. G. Optical Fiber Sensor Technology / T. G. Giallorenzi, J. A. Bucaro, A. Dandridge, G. H. Sigel, J. H. Cole, S. C. Rashleigh, R. G. Priest // *Transactions on Microwave Theory and Techniques, IEEE*. – 1982. – vol. 30, № 4. – P. 472-511.
4. Листвин, А. В. Рефлектометрия оптических волокон / А. В. Листвин, В. Н. Листвин. – М. : ЛЕСАРпт, 2005. – 150 с.
5. Исимару, А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах, том 1 / А. Исимару. – М. : Мир, 1981. – 281 с.
6. Brinkmeyer, E. Analysis of the backscattering method for single-mode optical fibers / E. Brinkmeyer // *Journal of the Optical Society of America*. – 1980. – vol. 70, № 8. – P. 1010-1012.
7. Hartog, A. On the theory of backscattering in single-mode optical fibers / A. Hartog, M. Gold // *Journal of Lightwave Technology*. – 1984. – vol. 2, № 2. – P. 76- 82.
8. Nakazawa, M. Rayleigh backscattering theory for single-mode optical fibers / M. Nakazawa // *Journal of the Optical Society of America*. – 1983. – vol. 73, № 9. – P. 1175-1180.
9. Nakazawa, M. Photon probe fault locator for single-mode optical fiber using an acoustooptical light deflector / M. Nakazawa, T. Tanifuji, M. Tokuda, N. Uchida

// Journal of Quantum Electronics, IEEE. – 1981. – vol. 17, № 7. – P. 1264- 1269.

10. Barnoski, M. K. Fiber waveguides: a novel technique for investigating attenuation characteristics / M. K. Barnoski, S. M. Jensen // Applied Optics. – 1976. – vol. 15, № 9. – P. 2112-2115.
11. Barnoski, M. K. Optical time domain reflectometer / M. K. Barnoski, M. D. Rourke, S. M. Jensen, R. T. Melville // Applied Optics. – 1977. – vol. 16, № 9. – P. 2375-2379.
12. Healey, P. OTDR in single-mode fibre at 1.5 $\mu$ m using heterodyne detection / P. Healey, D. J. Malyon // Electronics Letters. – 1982. – vol. 18, № 20. – P. 862-863 .
13. Healey, P. Fading in heterodyne OTDR / P. Healey // Electronics Letters. – 1984. – vol. 20, № 1. – P. 30-32.
14. Healey, P. Fading rates in coherent OTDR / P. Healey // Electronics Letters. – 1984. – vol. 20, № 11. – P. 443-444.
15. Healey, P. Review of long wavelength single-mode optical fiber reflectometry techniques / P. Healey // Journal of Lightwave Technology. – 1985. – vol. 3, № 4. – P. 876- 886.
16. King, J. Development of a coherent OTDR instrument / J. King, D. Smith, K. Richards, P. Timson, R. Epworth, S. Wright. // Journal of Lightwave Technology . – 1987. – vol. 5, № 4. – P. 616- 624.
17. Izumita, H. Fading noise reduction in coherent OTDR / H. Izumita, S. Furukawa, Y. Koyamada, I. Sankawa // Photonics Technology Letters, IEEE . – 1992. – vol. 4, № 2. – P. 201-203.
18. Shimizu, K. Characteristics and reduction of coherent fading noise in Rayleigh backscattering measurement for optical fibers and components / K. Shimizu, T. Horiguchi, Y. Koyamada // Journal of Lightwave Technology . – 1992. – vol. 10, № 7. – P. 982-987.

19. Juškaitis, R. Distributed interferometric fiber sensor system / R. Juškaitis, A. M. Mamedov, V. T. Potapov, S. V. Shatalin // *Optics Letters*. – 1992. – vol. 17, № 22 . – P. 1623-1625.
20. Juškaitis, R. Interferometry with Rayleigh backscattering in a single-mode optical fiber / R. Juškaitis, A. M. Mamedov, V. T. Potapov, S. V. Shatalin // *Optics Letters*. – 1994. – vol. 19, № 3. – P. 225-227.
21. Shatalin, S. V. Interferometric Optical Time-Domain Reflectometry for Distributed Optical-Fiber Sensing / S. V. Shatalin, V. N. Treschikov, A. J. Rogers // *Applied Optics*. – 1998. – vol. 37, № 24. – P. 5600-5604.
22. Taylor, H. F. Apparatus and method for fiber optic intrusion sensing / H. F. Taylor, C. E. Lee // U.S. Patent 5 194 847, Mar. 16. – 1993.
23. Juarez, J. C. Polarization discrimination in a phase-sensitive optical time-domain reflectometer intrusion-sensor system / J. C. Juarez, H. F. Taylor // *Optics Letters*. – 2005. – vol. 30, № 24. – P. 3284-3286.
24. Juarez, J. C. Distributed fiber-optic intrusion sensor system / J. C. Juarez, E. W. Maier, Nam Choi Kyoo, H. F. Taylor // *Journal of Lightwave Technology*. – 2005. – vol. 23, № 6. – P. 2081-2087.
25. Juarez, J. C. Field test of a distributed fiber-optic intrusion sensor system for long perimeters / J. C. Juarez, H. F. Taylor // *Applied Optics*. – 2007. – vol. 46, № 11. – P. 1968-1971.
26. Lu, Y. Distributed Vibration Sensor Based on Coherent Detection of Phase-OTDR / Y. Lu, T. Zhu, L. Chen, X. Bao // *Journal of Lightwave Technology*. – 2010. – vol. 28, № 22. – P. 3243-3249.
27. Горшков, Б. Г. Распределенный датчик внешнего воздействия на основе фазочувствительного волоконного рефлектометра / Б. Г. Горшков, В. М. Парамонов, А. С. Курков, А. Т. Кулаков, М. В. Заирный // *Квантовая электроника*. – 2006. – т. 36, № 10. – С. 963–965.

28. Вдовенко, В. С. Когерентный рефлектометр с двухволоконным интерферометром рассеянного излучения / В. С. Вдовенко, Б. Г. Горшков, М. В. Зазирный, А. Т. Кулаков, А. С. Курков, В. М. Парамонов // Квантовая электроника. – 2011. – т. 36, № 2. – С. 176–178.
29. Нестеров, Е. Т. Метод увеличения дальности работы когерентного оптического рефлектометра / Е. т.Нестеров, В. Н. Трещиков, А. Ж. Озеров, М. А. Слепцов, В. А. Камынин, О. Е. Наний, А. А. Сусьян // Письма в Журнал Технической Физики. – 2011. – т. 37, № 9. – С. 55-64.
30. Healey, P. Statistics of Rayleigh backscatter from a single-mode optical fibre / P. Healey // Electronics Letters. – 1985. – vol. 21, № 6. – P. 226-228.
31. Healey, P. Statistics of Rayleigh Backscatter From a Single-Mode Fiber / P. Healey // Transactions on Communications, IEEE. – 1987. – vol. 35, № 2. – P. 210- 214.
32. Goodman, J. W. Statistical properties of laser speckle patterns / J. W. Goodman // Laser Speckle and Related Phenomena / edited by J. C. Dainty. – Berlin, 1975. – Ch. 2. – P. 9–75.
33. Гудмен, Дж. Статистическая оптика / Дж. Гудмен. – М. : Мир, 1988. – 527 с.
34. Goodman, J. W. Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications / J. W. Goodman. – Englewood, Colo. : Roberts & Co, 2007. – 387 p.
35. Gysel, P. Statistical properties of Rayleigh backscattering in single-mode fibers / P. Gysel, R. K. Staubli // Journal of Lightwave Technology. – 1990. – vol. 8, № 4 . – P. 561-567.
36. Gysel, P. A new method for high-resolution measurement of semiconductor laser linewidth in coherent optical systems / P. Gysel, R. K. Staubli // Photonics Technology Letters, IEEE. – 1989. – vol. 1, № 10. – P. 327-328.
37. Staubli, R. K. Crosstalk penalties due to coherent Rayleigh noise in bidirectional optical communication systems / R. K. Staubli, P. Gysel // Journal of Lightwave Technology. – 1991. – vol. 9, № 3. – P. 375-380.

38. Staubli, R. K. Power penalties due to multiple Rayleigh backscattering in coherent transmission systems using in-line optical amplifiers / R. K. Staubli, P. Gysel, R. U. Hofstetter // *Photonics Technology Letters, IEEE*. – 1990. – vol. 2, № 12. – P. 872-874.
39. Gysel, P. Spectral properties of Rayleigh backscattered light from single-mode fibers caused by a modulated probe signal / P. Gysel, R. K. Staubli // *Journal of Lightwave Technology*. – 1990. – vol. 8, № 12. – P. 1792-1798.
40. Staubli, R. K. Statistical properties of single-mode fiber Rayleigh backscattered intensity and resulting detector current / R. K. Staubli, P. Gysel // *Transactions on Communications, IEEE*. – 1992. – vol. 40, № 6. – P. 1091-1097.
41. Priest, R.G. Analysis of Fiber Interferometer Utilizing 3 x 3 Fiber Coupler / R. G. Priest // *Journal of Quantum Electronics, IEEE*. – 1982. – QE-18. – P. 1601-1603.
42. Stowe, D. W. Demodulation of interferometric sensors using a fiber-optic passive quadrature demodulator / D. W. Stowe, H. Tsung-Yuan // *Journal of Lightwave Technology*. – 1983. – vol. 1, № 3. – P. 519-523.
43. Koo, K. P. Passive stabilization scheme for fiber interferometers using (3x3) fiber directional couplers / K. P. Koo, A. B. Tveten, A. Dandridge // *Applied Physics Letters*. – 1982. – vol. 41, № 7. – P. 616-618.
44. Dandridge, A. Homodyne demodulation scheme for fiber optic sensors using phase generated carrier / A. Dandridge, A. B. Tveten, T. G. Giallorenzi // *Journal of Quantum Electronics, IEEE*. – 1982. – vol. 18, № 10. – P. 1647-1653.
45. Davis, A. Phase diversity techniques for coherent optical receivers / A. Davis, M. J. Pettitt, J. P. King, S. Wright // *Journal of Lightwave Technology*. – 1987. – vol. 5, № 4. – P. 561-572.
46. Zhiqiang, Zhao. Improved demodulation scheme for fiber optic interferometers using an asymmetric 3x3 coupler / Zhao Zhiqiang, M. S. Demokan, M.

- Macalpine // *Journal of Lightwave Technology*. – 1997. – vol. 15, № 11. – P. 2059-2068.
47. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко. – СПб. : Питер, 2003. – 608 с.
  48. Posey, R. Strain sensing based on coherent Rayleigh scattering in an optical fibre / R. Posey, G. A. Johnson, S. T. Vohra // *Electronics Letters*. – 2000. – vol. 36, № 20. – P. 1688-1689.
  49. Eickhoff, W Multiple-scattering noise in single-mode fibers / W. Eickhoff // *Optics Letters*. – 1982. – vol. 7, № 1. – P. 46-48.
  50. Henry, C. H. Theory of the linewidth of semiconductor lasers / C. H. Henry // *Journal of Quantum Electronics, IEEE*. – 1982. – vol. 18, № 2. – P. 259-264.
  51. Henry, C. H. Phase noise in semiconductor lasers / C. H. Henry // *Journal of Lightwave Technology*. – 1986. – vol. 4, № 3. – P. 298-311.
  52. Moslehi, B. Analysis of optical phase noise in fiber-optic systems employing a laser source with arbitrary coherence time / B. Moslehi // *Journal of Lightwave Technology*. – 1986. – vol. 4, № 9. – P. 1334-1351.
  53. Moslehi, B. Noise power spectra of optical two-beam interferometers induced by the laser phase noise / B. Moslehi // *Journal of Lightwave Technology*. – 1986. – vol. 4, № 11. – P. 1704-1710.
  54. Papoulis, A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes / A. Papoulis. – New York : McGraw-Hill, 1965. – 665 p.
  55. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1973. – 720 с.
  56. Corsi, F. Polarization mode dispersion characterization of single-mode optical fiber using backscattering technique / F. Corsi, A. Galtarossa, L. Palmieri // *Journal of Lightwave Technology*. – 1998. – vol. 16, № 10. – P. 1832-1843.
  57. Corsi, F. Analytical treatment of polarization-mode dispersion in single-mode fibers by means of the backscattered signal / F. Corsi, A. Galtarossa, L. Palmieri

// Journal of the Optical Society of America. – 1999. – vol. 16, № 3. – P. 574-583.

58. Huttner, B. Distributed PMD measurement with a polarization-OTDR in optical fibers / B. Huttner, B. Gisin, N. Gisin // Journal of Lightwave Technology. – 1999 . – vol. 17, № 10. – P. 1843-1848.
59. van Deventer, M. O. Polarization properties of Rayleigh backscattering in single-mode fibers / M. O. van Deventer // Journal of Lightwave Technology. – 1993. – vol. 11, № 12,. – P. 1895-1899.
60. Аззам, Р. Эллипсометрия и поляризованный свет / Р. Аззам, Н. Башара. – М. : Мир, 1981. – 584 с.
61. Мандель, Л. Оптическая когерентность и квантовая оптика / Л. Мандель, Э. Вольф. – М. : Наука. Физматлит, 2000. – 896 с.
62. Barakat, R. First-order Probability Densities of Laser Speckle Patterns Observed through Finite-size Scanning Apertures / R. Barakat // Optica Acta: International Journal of Optics. – 1973. – vol. 20, № 9. – P. 729-740.
63. Parry, G. The scattering of polychromatic light from rough surfaces: first order statistics / G. Parry // Optical and Quantum Electronics. – 1975. – vol. 7, № 4. – P . 311-318.
64. Mehta, C. L. Theory of photoelectron counting / C. L. Mehta // Progress in Optics / E. Wolf, ed. – Amsterdam, 1970. – Vol. 8. – P. 371–440.
65. Давенпорт, В. Б. Введение в теорию случайных сигналов и шумов / В. Б. Давенпорт, В. Л. Рут. – М. : Издательство иностранной литературы, 1960. – 469 с.
66. Ван Трис, Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том 1 / Г. Ван Трис . – М. : Советское радио, 1972. – 774 с.
67. Половинкин, Е. С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного: Учеб. Пособие / Е. С. Половинкин. – М. : МФТИ, 1999. – 256 с.

68. Полянин, А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. – М. : Факториал, 1998. – 432 с.
69. Mardia, K. Directional Statistics / K. Mardia, P. E. Jupp. – Chichester : Wiley, 2000. – 460 p.
70. Butter, C. D. Fiber optics strain gauge / C. D. Butter, G. B. Hocker // Applied Optics. – 1978. – vol. 17, № 18. – P. 2867-2869.
71. Hocker, G. B. Fiber-optic sensing of pressure and temperature / G. B. Hocker // Applied Optics. – 1979. – vol. 18, № 9. – P. 1445-1448.
72. Гуляев, Ю. В. Модуляционные эффекты в волоконных световодах и их применение / Ю. В. Гуляев, М. Я. Меш, В. В. Проклов. – М. : Радио и связь, 1991. – 151 с.
73. Slack, M. The probability distributions of sinusoidal oscillations combined in random phase / M. Slack // Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III. – 1946. – vol. 93, № 22. – P. 76-86.
74. Barakat, R. First-order Statistics of Combined Random Sinusoidal Waves with Applications to Laser Speckle Patterns / R. Barakat // Optica Acta: International Journal of Optics. – 1974. – vol. 21, № 11. – P. 903-921.
75. Dandridge, A. Phase noise of singlemode diode lasers in interferometer systems / A. Dandridge, A. B. Tveten // Applied Physics Letters. – 1981. – vol. 39, № 7. – P. 530-532.
76. Petermann, K. Semiconductor laser noise in an interferometer system / K. Petermann, E. Weidel // Journal of Quantum Electronics, IEEE. – 1981. – vol. 17, № 7. – P. 1251-1256.
77. Armstrong, J. A. Theory of Interferometric Analysis of Laser Phase Noise / J. A. Armstrong // Journal of the Optical Society of America. – 1966. – vol. 56, № 8. – P. 1024-1028.



78. Tkach, R. W. Phase noise and linewidth in an InGaAsP DFB laser / R.W. Tkach, A. R. Chraplyvy // *Journal of Lightwave Technology*. – 1986. – vol. 4, № 11. – P. 1711-1716.
79. Salehi, M. R. Theoretical and experimental analysis of influence of phase-to-intensity noise conversion in interferometric systems / M. R. Salehi, B. Cabon // *Journal of Lightwave Technology*. – 2004. – vol. 22, № 6. – P. 1510-1518.
80. Desurvire, E. Erbium-doped fiber amplifiers, Principle and Applications / E. Desurvire. – New York : Wiley, 1994. – 770 p.
81. Бутусов, М. М. Волоконная оптика и приборостроение / М. М. Бутусов, С. Л. Галкин, С. С. Орбинский, Б. П. Пал. – Л. : Машиностроение, 1987. – 328 с.
82. Spillman, W. B. Optical Detectors / W. B. Spillman // *Fiber Optic Sensors: An Introduction for Engineers and Scientists* / E. Udd, W. B. Spillman. – Hoboken, 2011. – Ch. 4. – P. 63-86.
83. Филачев, А. М. Твердотельная фотоэлектроника. Физические основы / А. М. Филачев, И. И. Таубкин, М. А. Трищенко. – М. : Физматкнига, 2007. – 384 с.
84. Dandridge, A. Phase compensation in interferometric fiber-optic sensors / A. Dandridge, A. B. Tveten // *Optics Letters*. – 1982. – vol. 7, № 6. – P. 279-281.
85. Dobosz, M. Methods for the calibration of vibration pick-ups by laser interferometry: I. Theoretical analysis / M. Dobosz, T. Usuda, T. Kurosawa // *Measurement Science and Technology*. – 1998. – vol. 9, № 2. – P. 232-239.
86. Андрущак, Е. А. Методы лазерной интерферометрии / Е. А. Андрущак. – М. : МИРЭА, 1989. – 80 с.
87. Dandridge, A. Laser noise in fiber-optic interferometer systems / A. Dandridge, A. B. Tveten, R. O. Miles, T. G. Giallorenzi // *Applied Physics Letters*. – 1980. – vol. 37, № 6. – P. 526-528.

88. Petermann, K. Noise Characteristics of Solitary Laser Diodes / K. Petermann // Laser diode modulation and noise / K. Petermann. – Dordrecht , 1988. – Ch. 7. – P. 152-213.
89. Sheem, Sang K. Fiber-optic gyroscope with [3×3] directional coupler / Sang K. Sheem // Applied Physics Letters. – 1980. – vol. 37, № 10. – P. 869-871.
90. Meijerink, A. Balanced Optical Phase Diversity Receivers for Coherence Multiplexing / A. Meijerink, G. H. L. M. Heideman, W. van Etten // Journal of the Optical Society of America. – 2004. – vol. 22, № 11. – P. 2393-2408.
91. Abramowitz, M. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I. A. Stegun. – New York : Dover Publications, 1972. – 1046 p.

### **Список работ автора по теме диссертации**

- A1. Алексеев, А. Э. Влияние степени когерентности полупроводникового лазера на статистику интенсивности обратно-рассеянного излучения в одномодовом оптическом волокне / А. Э. Алексеев, Я. А. Тезадов, В. Т. Потапов // Радиотехника и Электроника. – 2011. – т. 56, № 12. – P. 1522-1530.
- A2. Алексеев, А. Э. Статистические свойства обратнорассеянного излучения полупроводниковых лазеров с различной степенью когерентности / А. Э. Алексеев, Я. А. Тезадов, В. Т. Потапов // Квантовая Электроника. – 2012. – т. 42, № 1. – P. 76-81.
- A3. Алексеев, А. Э. Статистика интенсивности обратно-рассеянного излучения полупроводникового лазера в одномодовом оптическом волокне / А. Э. Алексеев, Я. А. Тезадов, В. Т. Потапов // Письма в Журнал Технической Физики. – 2012. – т. 38, № 2. – P. 74-81.
- A4. Алексеев, А. Э. Статистика интенсивности обратно-рассеянного излучения полупроводникового лазера в одномодовом оптическом волокне / А. Э.

- Алексеев, Я. А. Тезадов, В. Т. Потапов // Всероссийская конференция по волоконной оптике (3 ; 2011 ; Пермь), Фотон-Экспресс. – 2011. – № 6 (94). – Р. 70-71.
- А5. Алексеев, А. Э. Статистика интенсивности обратно-рассеянного излучения полупроводникового лазера в одномодовом оптическом волокне / А. Э. Алексеев, Я. А. Тезадов, В. Т. Потапов // Нелинейный мир. – 2012. – № 2. – Р. 116-118.
- А6. Алексеев, А. Э. Спектральная плотность мощности шума волоконного интерферометра рассеянного излучения с полупроводниковым лазерным источником / А. Э. Алексеев, В. Т. Потапов // Квантовая Электроника. – 2013. – т. 43, № 10. – Р. 968–973.
- А7. Алексеев, А. Э. Регистрация внешнего акустического воздействия на оптическое волокно с помощью интерферометра рассеянного излучения / А. Э. Алексеев, Я. А. Тезадов, В. т.Потапов // Письма в Журнал Технической Физики. – 2012. – т. 38, № 24. – Р. 67-74.
- А8. Алексеев, А. Э. Регистрация внешнего акустического воздействия на оптическое волокно с помощью интерферометра рассеянного излучения методом фазового разнесения / А. Э. Алексеев, Я. А. Тезадов, В. т.Потапов // Радиотехника и электроника. – 2013. – т. 58, № 3. – Р. 292-299 .
- А9. Алексеев, А. Э. Регистрация внешнего акустического воздействия на оптическое волокно с помощью интерферометра рассеянного излучения / А. Э. Алексеев, Я. А. Тезадов, В. Т. Потапов // Нелинейный мир. – 2013. – № 2. – Р. 112-113.

## Приложения

### 1. Приложение 1

Вычислим среднее значение :

$$J = E_{\varphi} \left\langle \exp(i\Delta\varphi(\tau)) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\Delta\varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\Delta\varphi}} \cdot \exp\left(-\frac{\Delta\varphi^2}{2 \cdot \sigma_{\Delta\varphi}^2}\right) \cdot d(\Delta\varphi), \quad (\text{П.1})$$

дополним показатель экспоненты до полного квадрата:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\Delta\varphi}} \cdot \exp\left(-\frac{\Delta\varphi^2}{2 \cdot \sigma_{\Delta\varphi}^2} + \frac{2 \cdot \sigma_{\Delta\varphi}^2 \cdot i\Delta\varphi}{2 \cdot \sigma_{\Delta\varphi}^2} - \frac{\sigma_{\Delta\varphi}^4 \cdot (i)^2}{2 \cdot \sigma_{\Delta\varphi}^2} + \frac{\sigma_{\Delta\varphi}^4 \cdot (i)^2}{2 \cdot \sigma_{\Delta\varphi}^2}\right) \cdot d(\Delta\varphi)$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\Delta\varphi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\Delta\varphi - \sigma_{\Delta\varphi}^2 \cdot i)^2}{2 \cdot \sigma_{\Delta\varphi}^2} + \frac{\sigma_{\Delta\varphi}^4 \cdot (i)^2}{2 \cdot \sigma_{\Delta\varphi}^2}\right) \cdot d(\Delta\varphi)$$

Выносим константу из под знака интеграла и делаем замену переменной интегрирования:  $t = \Delta\varphi - \sigma_{\Delta\varphi}^2 i$ ,  $dt = d(\Delta\varphi)$ ,

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\Delta\varphi}} \exp\left(\frac{-\sigma_{\Delta\varphi}^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2 \cdot \sigma_{\Delta\varphi}^2}\right) \cdot dt,$$

Таким образом, исходный интеграл сведен к табличному, окончательно получаем:

$$E_{\varphi} \left\langle \exp(i\Delta\varphi(\tau)) \right\rangle = \exp\left(\frac{-\sigma_{\Delta\varphi}^2}{2}\right)$$

или

$$E_{\varphi} \left\langle \exp(i(\varphi(t_1) - \varphi(t_2))) \right\rangle = \exp\left(\frac{-E_{\varphi} \left\langle [\varphi(t_1) - \varphi(t_2)]^2 \right\rangle}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\alpha|\tau|}{2}\right) \quad (\text{П.2})$$

## 2. Приложение 2

Рассмотрим интеграл:

$$J = \int_0^T \int_0^T \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (\text{П.3}).$$

В силу симметричности этого интеграла относительно  $\tau_1, \tau_2$  достаточно рассмотреть случай  $\tau_2 \geq \tau_1$ , результирующее выражение получится умножением найденного интеграла при  $\tau_2 \geq \tau_1$  на 2 получаем:  $\tau_1 \in [0, T], \tau_2 \in [\tau_1, T]$ :

$$J = 2 \int_0^T \int_{\tau_1}^T \exp\left(-\frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) d\tau_2 d\tau_1,$$

делая замену переменной:  $t = \tau_2 - \tau_1, dt = d\tau_2, t \in [0, T - \tau_1]$ , получим:

$$\begin{aligned} J &= 2 \int_0^T \int_0^{T-\tau_1} \exp\left(-\frac{2t}{\tau_{coh}}\right) dt d\tau_1 = -2 \int_0^T \left( \frac{\tau_{coh}}{2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau_{coh}}\right) \Big|_0^{T-\tau_1} \right) d\tau_1 = \\ &= -\tau_{coh} \int_0^T \left( \exp\left(-\frac{2(T-\tau_1)}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) d\tau_1 \end{aligned}$$

Делая вновь замену переменной:  $q = T - \tau_1, dq = -d\tau_1, q \in [T, 0]$ , получаем:

$$\begin{aligned} J &= -\tau_{coh} \int_0^T \left( \exp\left(-\frac{2q}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) dq = -\tau_{coh} \left( -\frac{\tau_{coh}}{2} \exp\left(-\frac{2q}{\tau_{coh}}\right) - q \right) \Big|_0^T = \\ &= -\tau_{coh} \left( -\frac{\tau_{coh}}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) + \frac{\tau_{coh}}{2} - T \right) \end{aligned}$$

## 3. Приложение 3

Рассмотрим интеграл:

$$J(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x) \prod_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - i\omega a_n} \right) d\omega \quad (\text{П.4})$$

Вспользуемся теорией вычетов [67]. Прейдём в комплексную плоскость и рассмотрим интеграл по замкнутому контуру, состоящему из отрезка и

полуокружности в нижней комплексной полуплоскости:  $\gamma_R = [R, -R] \cup C_R$ , рисунок П.1.:

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_R} \exp(-izx) \prod_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1-iza_n} \right) dz = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_R} Q(z) dz \quad (\text{П.5}).$$

Предел этого интеграла при  $R \rightarrow \infty$  равен интегралу (П.4) с обратным знаком, так как в силу Леммы Жордана, интеграл по полуокружности равен нулю в указанном пределе. Интеграл по замкнутому контуру равен сумме вычетов подынтегральной функции в особых точках внутри контура интегрирования  $\gamma_R$ . Особыми точками являются полюсы первого порядка:  $z_n = 1/ia_n = -i/a_n$ , которые находятся в нижней комплексной полуплоскости, так как все числа  $a_n$  являются действительными и положительными, в силу положительности собственных значений  $\lambda_n$ . Определим вычеты подынтегральной функции  $Q(z)$  в особых точках:

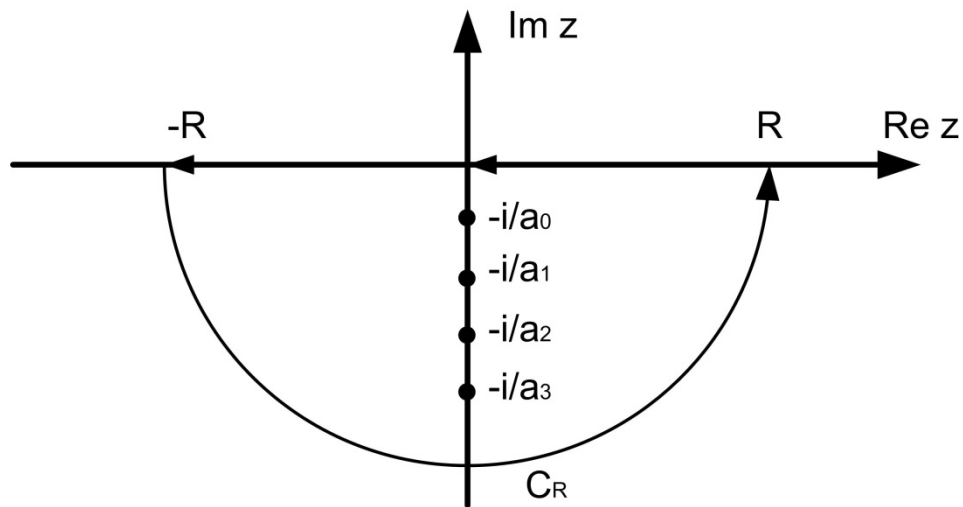


Рисунок П.1. Контур интегрирования, включающий отрезок действительной оси и полуокружность в нижней комплексной полуплоскости.

$$\text{res}(Q)|_{z_n} = \frac{\exp(-izx)}{\left[ \prod_{m=0}^{\infty} (1-iza_m) \right]' \Big|_{z=z_n}} = - \frac{\exp\left(\frac{-x}{a_n}\right)}{ia_n \prod_{\substack{m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} \left(1 - \frac{a_m}{a_n}\right)} \quad (\text{П.6})$$

Интеграл (П.5) равен:  $K(x) = -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \text{res}(Q)|_{z_n}$ , окончательно:

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x}{a_n}\right)}{a_n \prod_{\substack{m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} \left(1 - \frac{a_m}{a_n}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a_n} \exp\left(-\frac{x}{a_n}\right) \quad (\text{П.7}),$$

$$\text{где } d_n = \prod_{\substack{m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} \left(1 - \frac{a_m}{a_n}\right)^{-1}$$

#### 4. Приложение 4

Перепишем уравнение:

$$I_s \int_0^T \exp\left(-\frac{|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) \cdot \theta_m(\tau_2) d\tau_2 = \lambda_m \theta_m(\tau_1)$$

в более удобном для анализа виде, положив  $1/\tau_{coh} = \alpha$ ,  $P = I_s$ :

$$P \int_0^T \exp(-\alpha |u - v|) \cdot \theta(u) du = \lambda \cdot \theta(v), \quad 0 \leq u, v \leq T \quad (\text{П.8}).$$

Перепишем уравнение, раскрыв знак модуля:

$$P \int_0^v \exp(\alpha(u - v)) \cdot \theta(u) du + P \int_v^T \exp(\alpha(v - u)) \cdot \theta(u) du = \lambda \cdot \theta(v)$$

Продифференцируем по  $v$ :

$$\lambda \cdot \theta'(v) = -P\alpha \exp(-\alpha v) \cdot \int_0^v \exp(\alpha u) \cdot \theta(u) du + P \exp(-\alpha v) \cdot \exp(\alpha v) \cdot \theta(v)$$

$$+ P\alpha \exp(\alpha v) \cdot \int_v^T \exp(-\alpha u) \cdot \theta(u) du - P \exp(\alpha v) \cdot \exp(-\alpha v) \cdot \theta(v)$$

$$\lambda \cdot \theta'(v) = -P\alpha \exp(-\alpha v) \cdot \int_0^v \exp(\alpha u) \cdot \theta(u) du + P\alpha \exp(\alpha v) \cdot \int_v^T \exp(-\alpha u) \cdot \theta(u) du$$

Дифференцируем второй раз получим:

$$\lambda \cdot \theta''(v) = P\alpha^2 \cdot \int_0^T \exp(\alpha |u - v|) \cdot \theta(u) du - 2P\alpha \cdot \theta(v)$$

Подставляем вместо первого члена в правой части исходное уравнение, получим:

$$\lambda \cdot \theta''(v) = \alpha^2 \lambda \theta(v) - 2P\alpha \cdot \theta(v) \quad (\text{П.9}).$$

При  $\lambda \neq 0$ , запишем:

$$\theta''(v) = \frac{\alpha^2 \lambda - 2P\alpha}{\lambda} \cdot \theta(v)$$

Решение последнего уравнения распадается на 4 случая:

$$1) \lambda = 0, 2) 0 < \lambda < \frac{2P}{\alpha}, 3) \lambda = \frac{2P}{\alpha}, 4) \lambda > \frac{2P}{\alpha}.$$

Подстановкой случая 1 и 3 в (П.9) убеждаемся, что эти значения соответствуют тривиальному решению  $\theta(u) = 0$ , случай 4 также дает только решение  $\theta(u) = 0$  [66]. Рассмотрим теперь случай 2, тогда обозначая:

$$\frac{2P\alpha - \alpha^2 \lambda}{\lambda} = \gamma^2, \quad 0 < \gamma^2 < \infty \quad (\text{П.10}),$$

получим, что дифференциальное уравнение примет вид:

$\theta''(v) + \gamma^2 \cdot \theta(v) = 0$ . Общим решением этого однородного дифференциального уравнения является:

$$\phi(v) = C_1 \exp(i\gamma v) + C_2 \exp(-i\gamma v),$$

где  $C_1, C_2$  произвольные постоянные. Подставляя это общее решение в исходное интегральное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} & \exp(i\gamma v) \left[ \frac{C_1 P}{\alpha + i\gamma} - \frac{C_1 P}{i\gamma - \alpha} \right] + \exp(-i\gamma v) \left[ \frac{C_2 P}{\alpha + i\gamma} - \frac{C_2 P}{i\gamma - \alpha} \right] + \\ & + \exp(\alpha v) \left[ \frac{C_1 P}{i\gamma - \alpha} \exp(T(i\gamma - \alpha)) - \frac{C_2 P}{i\gamma + \alpha} \exp(-T(i\gamma + \alpha)) \right] + \\ & + \exp(-\alpha v) \left[ \frac{C_2 P}{i\gamma - \alpha} - \frac{C_1 P}{i\gamma + \alpha} \right] = C_1 \exp(i\gamma v) + C_2 \exp(-i\gamma v) \end{aligned}$$

Для того, чтобы это равенство могло выполняться необходимо, чтобы:

$$\frac{C_1 P}{i\gamma - \alpha} \exp(T(i\gamma - \alpha)) = \frac{C_2 P}{i\gamma + \alpha} \exp(-T(i\gamma + \alpha)) \quad (\text{П.11}),$$

$$\frac{C_2 P}{i\gamma - \alpha} = \frac{C_1 P}{i\gamma + \alpha} \quad (\text{П.12}).$$

Первым решением этой системы будут:  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ , которые дают



вырожденное решение интегрального уравнения, поэтому имеем два случая :

$$1) C_2 = C_1 \exp(i\gamma T), 2) C_2 = -C_1 \exp(i\gamma T)$$

Подстановкой каждого из случаев в (П.11) или (П.12) можно получить следующие условия: для выполнения случая 1 необходимо, чтобы:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma T}{2}\right) = \frac{\alpha}{\gamma} \quad (\text{П.13}),$$

для выполнения случая 2 необходимо, чтобы:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma T}{2}\right) = -\frac{\gamma}{\alpha} \quad (\text{П.14}).$$

Соответственно собственные значения равны:

$$\lambda_n = \frac{2P\alpha}{\alpha^2 + \gamma_n^2} = \frac{2I_s\alpha}{\alpha^2 + \gamma_n^2} \text{ и } \lambda_n \neq 0 \quad (\text{П.15}),$$

где  $\gamma_n$  – решения трансцендентных уравнений (П.13) и (П.14). Эти уравнения можно решить графически, рисунок П.2.

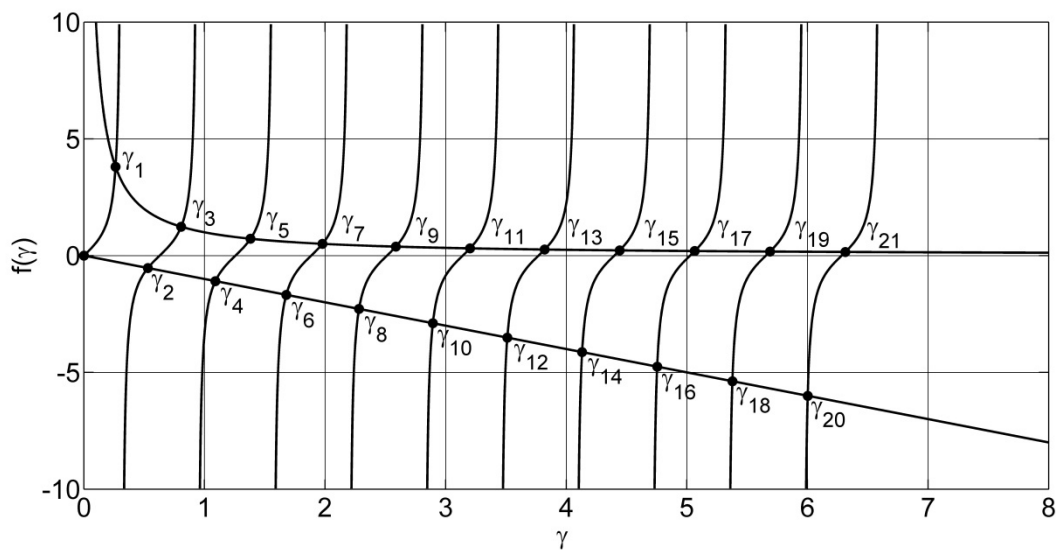


Рисунок П.2. Графическое решение уравнений (П.13) и (П.14), выполненное с помощью системы MatLab.

В результате графического решения можно получить собственные значения уравнения (П.8).

## 5. Приложение 5

Рассмотрим интеграл, в предположении различных значение  $a_n$  и  $a_m$ :

$$J(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-i\omega a_{1_n}} \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1-i\omega a_{2_m}} d\omega \quad (\text{П.16}),$$

где  $a_{1_n} \neq a_{1_m} \neq a_{2_p} \neq a_{2_q}$ , для всех  $m$ ,  $n$ ,  $p$  и  $q$ . Данное предположение может не выполняться, так как равенство:  $(1+P)a_n = (1-P)a_m$  может достигаться для некоторых  $m$  и  $n$ , при некотором значении  $P$ . . Воспользуемся теорией вычетов [67]. Прейдём в комплексную плоскость и рассмотрим интеграл по замкнутому контуру, состоящему из отрезка и полуокружности в нижней комплексной полуплоскости  $\gamma_R = [R, -R] \cup C_R$ , рисунок П1.:

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_R} \exp(-izx) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-iza_{1_n}} \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1-iza_{2_m}} dz = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_R} Q(z) dz$$

Предел этого интеграла при  $R \rightarrow \infty$  равен интегралу (П.16) с обратным знаком, так как в силу Леммы Жордана, интеграл по полуокружности равен нулю в указанном пределе. Интеграл по замкнутому контуру равен сумме вычетов подынтегральной функции в особых точках внутри контура интегрирования  $\gamma_R$ . Особыми точками являются, по предположению, полюсы первого порядка:  $z_n = 1/ia_{1_n} = -i/a_{1_n}$  и  $z_m = 1/ia_{2_m} = -i/a_{2_m}$ , которые находятся в нижней комплексной полуплоскости, так как все числа  $a_{1_n}$  и  $a_{2_m}$  являются действительными и положительными, в силу положительности собственных значений  $\lambda_n$  и. Определим вычеты подынтегральной функции  $Q(z)$  в особых точках  $z_n$  и  $z_m$ :

$$\text{res}(Q)|_{z_n} = \frac{\exp(-izx)}{\left[ \prod_{p=0}^{\infty} (1-iza_{1_p}) \prod_{q=0}^{\infty} (1-iza_{2_q}) \right]'} \Big|_{z=z_n} = - \frac{\exp\left(-\frac{x}{a_{1_n}}\right)}{ia_{1_n} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{1_p}}{a_{1_n}}\right) \prod_{q=0}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{2_q}}{a_{1_n}}\right)},$$

$$\operatorname{res}(Q)\Big|_{z_m} = \frac{\exp(-izx)}{\left[ \prod_{p=0}^{\infty} (1-iza1_p) \prod_{q=0}^{\infty} (1-iza2_q) \right]'} \Big|_{z=z_m} = - \frac{\exp\left(-\frac{x}{a2_m}\right)}{ia2_m \prod_{p=0}^{\infty} \left(1-\frac{a1_p}{a2_m}\right) \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m}}^{\infty} \left(1-\frac{a2_q}{a2_m}\right)}.$$

Интеграл (П.16) равен :  $K(x) = -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \left( \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{res}(Q)\Big|_{z_n} + \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{res}(Q)\Big|_{z_m} \right)$ :

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x}{a1_n}\right)}{ia1_n \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{\infty} \left(1-\frac{a1_p}{a1_n}\right) \prod_{q=0}^{\infty} \left(1-\frac{a2_q}{a1_n}\right)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x}{a2_m}\right)}{ia2_m \prod_{p=0}^{\infty} \left(1-\frac{a1_p}{a2_m}\right) \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m}}^{\infty} \left(1-\frac{a2_q}{a2_m}\right)}.$$

Учтем теперь, что:  $\frac{1+P}{2}a_n = a1_n$  и  $\frac{1-P}{2}a_n = a2_n$ , поэтому:

$$\frac{a1_p}{a1_n} = \frac{a_p}{a_n}, \quad \frac{a2_q}{a2_m} = \frac{a_q}{a_m}$$

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\exp\left(-\frac{x}{a1_n}\right)}{(1+P)a_n \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq n}}^{\infty} \left(1-\frac{a_p}{a_n}\right) \prod_{q=0}^{\infty} \left(1-\frac{a2_q}{a1_n}\right)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\exp\left(-\frac{x}{a2_n}\right)}{(1-P)a_n \prod_{p=0}^{\infty} \left(1-\frac{a1_p}{a2_n}\right) \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq n}}^{\infty} \left(1-\frac{a_q}{a_n}\right)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a_n} \left( \frac{2\exp\left(-\frac{x}{a1_n}\right)}{(1+P) \prod_{q=0}^{\infty} \left(1-\frac{a2_q}{a1_n}\right)} + \frac{2\exp\left(-\frac{x}{a2_n}\right)}{(1-P) \prod_{p=0}^{\infty} \left(1-\frac{a1_p}{a2_n}\right)} \right) \end{aligned}$$

Где  $d_n = \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq n}}^{\infty} \left(1-\frac{a_q}{a_n}\right)^{-1}$ , как и ранее (П.7). Полагая:  $d1_n = \prod_{q=0}^{\infty} \left(1-\frac{a2_q}{a1_n}\right)^{-1}$ ,

$d2_n = \prod_{p=0}^{\infty} \left(1-\frac{a1_p}{a2_n}\right)^{-1}$ , получаем окончательно:

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{a_n} \left( \frac{2d1_n}{(1+P)} \exp\left(-\frac{x}{a1_n}\right) + \frac{2d2_n}{(1-P)} \exp\left(-\frac{x}{a2_n}\right) \right) \quad (\text{П.17}).$$

## 6. Приложение 6

Рассмотрим произведение фаз:

$$\begin{aligned}
 (\varphi(t_1) - \varphi(t_2))(\varphi(t_3) - \varphi(t_4)) &= \varphi(t_1)\varphi(t_3) - \varphi(t_2)\varphi(t_3) - \varphi(t_1)\varphi(t_4) + \varphi(t_2)\varphi(t_4) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ -[\varphi(t_1) - \varphi(t_3)]^2 + (\varphi(t_1))^2 + (\varphi(t_3))^2 + [\varphi(t_2) - \varphi(t_3)]^2 - (\varphi(t_2))^2 - (\varphi(t_3))^2 + \right. \\
 &\quad \left. + [\varphi(t_1) - \varphi(t_4)]^2 - (\varphi(t_1))^2 - (\varphi(t_4))^2 - [\varphi(t_2) - \varphi(t_4)]^2 + (\varphi(t_2))^2 + (\varphi(t_4))^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ -[\varphi(t_1) - \varphi(t_3)]^2 + [\varphi(t_2) - \varphi(t_3)]^2 + [\varphi(t_1) - \varphi(t_4)]^2 - [\varphi(t_2) - \varphi(t_4)]^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{П.18}$$

## 7. Приложение 7

Следуя [52, 53, 76, 77], получим выражение для автокорреляционной функции мгновенной интенсивности для интерферометра Маха–Цендера в зависимости от фазовой задержки, приобретаемой распространяющимися в нем оптическими полями. Пусть в два плеча интерферометра заводится полностью поляризованное излучение полупроводникового лазера в виде (1.3) и (1.4):

$$U_s(t) = A_s(t) \cdot \exp(i\omega_0 t), \quad A_s(t) = \sqrt{I_s} \cdot \exp(i\varphi_s(t)) \tag{П.19}.$$

Будем считать интерферометр симметричным, таким образом, вводимое излучение разделяется поровну между его плечами. Пусть длины плеч интерферометра составляют  $z_1$  и  $z_2$ , а поля приобретают соответствующие временные задержки:  $\tau_1 = z_1/v_{gr}$  и  $\tau_2 = z_2/v_{gr}$ . Комплексная амплитуда поля на выходе интерферометра будет иметь вид:

$$A_{MZ}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_s(t - \tau_1) \cdot \exp(-ikz_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} A_s(t - \tau_2) \cdot \exp(-ikz_2) \tag{П.20},$$

где  $k$  – волновой вектор. Мгновенная интенсивность суммарного поля (П.20) равна:

$$\begin{aligned}
 (I_{MZ}(t))_{inst} &= \frac{1}{2} \left[ |A_s(t - \tau_1)|^2 + |A_s(t - \tau_2)|^2 + 2 \operatorname{Re} \left( A_s(t - \tau_1) A_s^*(t - \tau_2) \exp(ikz_2 - ikz_1) \right) \right] \\
 (I_{MZ}(t))_{inst} &= I_s + \operatorname{Re} \left( A_s(t - \tau_1) A_s^*(t - \tau_2) \exp(ikz_2 - ikz_1) \right)
 \end{aligned}
 \tag{П.21}$$

Интенсивность, регистрируемая фотоприемником, с учетом (1.16) равна:

$$E_T \left\langle \left( I_{MZ}(t) \right)_{inst} \right\rangle = I_s \left[ 1 + \cos(\alpha) \exp\left( -\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}} \right) \right] \quad (\text{П.22}),$$

В котором введено обозначение :  $\alpha = kz_2 - kz_1$  оптическая разность путей интерферирующих в интерферометре лучей.

Автокорреляционная функция мгновенной интенсивности на выходе интерферометра равна:

$$R_{MZ}(t, t + \tau) = E_T \left\langle \left( I_{MZ}(t) \right)_{inst} \left( I_{MZ}(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle \quad (\text{П.23}).$$

Подставляя (П.21) в (П.23), получаем:

$$R_{MZ}(t, t + \tau) = E_T \left\langle \left( I_s + \text{Re}\left( A_s(t - \tau_1) A_s^*(t - \tau_2) \exp(i\alpha) \right) \right) \left( I_s + \text{Re}\left( A_s(t - \tau_1 + \tau) A_s^*(t - \tau_2 + \tau) \exp(i\alpha) \right) \right) \right\rangle \quad (\text{П.24}).$$

Раскрывая скобки, с учетом (П.22) получаем:

$$R_{MZ}(t, t + \tau) = I_s^2 + 2I_s \cos(\alpha) \exp\left( -\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}} \right) + E_T \left\langle \text{Re}\left( A_s(t - \tau_1) A_s^*(t - \tau_2) \exp(i\alpha) \right) \times \text{Re}\left( A_s(t - \tau_1 + \tau) A_s^*(t - \tau_2 + \tau) \exp(i\alpha) \right) \right\rangle \quad (\text{П.25}).$$

Рассмотрим отдельно выражение:

$$g(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = E_T \left\langle \text{Re}\left( A_s(t - \tau_1) A_s^*(t - \tau_2) \exp(i\alpha) \right) \times \text{Re}\left( A_s(t - \tau_1 + \tau) A_s^*(t - \tau_2 + \tau) \exp(i\alpha) \right) \right\rangle \quad (\text{П.26}),$$

которое, с учетом (П.19) приобретает вид:

$$g(t, \tau, \tau_1, \tau_2) = I_s^2 E_T \left\langle \cos(\varphi_s(t - \tau_1) - \varphi_s(t - \tau_2) + \alpha) \times \cos(\varphi_s(t - \tau_1 + \tau) - \varphi_s(t - \tau_2 + \tau) + \alpha) \right\rangle \quad (\text{П.27}).$$

Обозначая

$$\beta_1 = \varphi_s(t - \tau_1) - \varphi_s(t - \tau_2) \text{ и } \beta_2 = \varphi_s(t + \tau - \tau_1) - \varphi_s(t + \tau - \tau_2) \quad (\text{П.28}),$$

получим:

$$\begin{aligned}
g(t, \tau, \tau_1, \tau_3) &= I_s^2 E_T \langle \cos(\beta_1 + \alpha) \times \cos(\beta_2 + \alpha) \rangle = \\
&= \frac{1}{2} I_s^2 E_T \langle \cos(\beta_1 - \beta_2) + \cos(\beta_1 + \beta_2 + 2\alpha) \rangle = \\
&= \frac{1}{2} I_s^2 E_T \langle \cos(\beta_1 - \beta_2) + \cos(\beta_1 + \beta_2) \cos(2\alpha) - \sin(\beta_1 + \beta_2) \sin(2\alpha) \rangle
\end{aligned} \tag{П.29}.$$

Для средних значений в силу (П.2) имеем:

$$\begin{aligned}
E_T \langle \cos(\beta_1 \pm \beta_2) \rangle &= \frac{1}{2} \left( E_T \langle \exp(i(\beta_1 \pm \beta_2)) \rangle + E_T \langle \exp(-i(\beta_1 \pm \beta_2)) \rangle \right) = \\
&= \exp \left( -\frac{E_T \langle (\beta_1 \pm \beta_2)^2 \rangle}{2} \right)
\end{aligned} \tag{П.30},$$

$$E_T \langle \sin(\beta_1 \pm \beta_2) \rangle = \frac{1}{2i} \left( E_T \langle \exp(i(\beta_1 \pm \beta_2)) \rangle - E_T \langle \exp(-i(\beta_1 \pm \beta_2)) \rangle \right) = 0 \tag{П.31}.$$

Возвращаясь к сделанной замене переменных (П.28), запишем (П.30) в виде:

$$\begin{aligned}
E_T \langle \cos(\beta_1 \pm \beta_2) \rangle &= \\
&= \exp \left( -\frac{E_T \langle (\varphi_s(t - \tau_1) - \varphi_s(t - \tau_2) \pm [\varphi_s(t + \tau - \tau_1) - \varphi_s(t + \tau - \tau_2)])^2 \rangle}{2} \right)
\end{aligned} \tag{П.32}.$$

Используем замену переменных:

$$t_1 = t - \tau_1, \quad t_2 = t - \tau_2, \quad t_3 = t + \tau - \tau_1, \quad t_4 = t + \tau - \tau_2 \tag{П.33},$$

преобразуем (П.32) с учетом (П.18):

$$\begin{aligned}
E_T \langle \cos(\beta_1 \pm \beta_2) \rangle &= \\
&= \exp \left( -\frac{1}{2} E_T \left\langle \left[ \begin{aligned} &[\varphi_s(t_1) - \varphi_s(t_2)]^2 + [\varphi_s(t_3) - \varphi_s(t_4)]^2 \mp [\varphi_s(t_1) - \varphi_s(t_3)]^2 \pm \\ &\pm [\varphi_s(t_2) - \varphi_s(t_3)]^2 \pm [\varphi_s(t_1) - \varphi_s(t_4)]^2 \mp [\varphi_s(t_2) - \varphi_s(t_4)]^2 \end{aligned} \right] \right\rangle \right)
\end{aligned} \tag{П.34}.$$

Используя далее (П.2) получим:

$$\begin{aligned}
E_T \langle \cos(\beta_1 \pm \beta_2) \rangle &= \\
&= \exp \left( -\frac{1}{\tau_{coh}} (|t_1 - t_2| + |t_3 - t_4| \mp |t_1 - t_3| \pm |t_2 - t_3| \pm |t_1 - t_4| \mp |t_2 - t_4|) \right)
\end{aligned} \tag{П.35}.$$

Возвращаясь к сделанной замене (П.33) получим:

$$\begin{aligned}
& E_T \langle \cos(\beta_1 \pm \beta_2) \rangle = \\
& = \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (|\tau_2 - \tau_1| + |\tau_2 - \tau_1| \mp |\tau| \pm |\tau + \tau_2 - \tau_1| \pm |\tau - \tau_2 + \tau_1| \mp |\tau|)\right) = \quad (\text{П.36}). \\
& = \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau_2 - \tau_1| \mp 2|\tau| \pm |\tau + \tau_2 - \tau_1| \pm |\tau - \tau_2 + \tau_1|)\right)
\end{aligned}$$

Раскрывая модули получим:

$$E_T \langle \cos(\beta_1 + \beta_2) \rangle = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (4|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|)\right) & |\tau| \leq |\tau_2 - \tau_1| \\ \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau_2 - \tau_1|)\right) & |\tau| > |\tau_2 - \tau_1| \end{cases} \quad (\text{П.37}),$$

$$E_T \langle \cos(\beta_1 - \beta_2) \rangle = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau|)\right) & |\tau| \leq |\tau_2 - \tau_1| \\ \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}} (2|\tau_2 - \tau_1|)\right) & |\tau| > |\tau_2 - \tau_1| \end{cases} \quad (\text{П.38}).$$

Подставляя (П.37) и (П.38) в (П.29) и (П.25) получаем искомую автокорреляционную функцию мгновенной интенсивности интерферометра Маха–Цендера :

$$\begin{aligned}
& R_{MZ}(t, t + \tau) = \\
& = I_s^2 + 2I_s \cos(\alpha) \exp\left(-\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) + \frac{I_s^2}{2} (E_T \langle \cos(\beta_1 - \beta_2) \rangle + E_T \langle \cos(\beta_1 + \beta_2) \rangle \cos(2\alpha))
\end{aligned} \quad (\text{П.39}).$$

Автоковариационная функция мгновенной интенсивности с учетом (П.22), следовательно, равна:

$$C_{MZ}(t, t + \tau) = E_T \left\langle \left( I_{MZ}(t) \right)_{inst} \left( I_{MZ}(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle - E_T \left\langle \left( I_{MZ}(t) \right)_{inst} \right\rangle E_T \left\langle \left( I_{MZ}(t + \tau) \right)_{inst} \right\rangle \quad (\text{П.40}),$$

$$\begin{aligned}
C_{MZ}(t, t + \tau) &= \\
&= \frac{I_s^2}{2} \left[ \left( E_T \langle \cos(\beta_1 - \beta_2) \rangle - \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( E_T \langle \cos(\beta_1 + \beta_2) \rangle - \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) \right) \cos(2\alpha) \right) \right] \quad (\text{П.41}).
\end{aligned}$$

Итоговое выражение для автоковариационной функции мгновенной интенсивности интерферометра Маха–Цендера имеет вид:

$$\begin{aligned}
C_{MZ}(t, t + \tau) &= \\
&= \begin{cases} \frac{I_s^2}{2} \left[ \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_1 - \tau_2|)\right) + \right. \\ \left. + \left( \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(4|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|)\right) - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_1 - \tau_2|)\right) \right) \cos(2\alpha) \right] & |\tau| \leq |\tau_2 - \tau_1| \\ 0 & |\tau| > |\tau_2 - \tau_1| \end{cases} \quad (\text{П.42}),
\end{aligned}$$

Или с учетом введенной ранее функции  $\Pi$  (2.17):

$$\begin{aligned}
C_{MZ}(t, t + \tau) &= \\
&= \frac{I_s^2}{2} \left[ \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_1 - \tau_2|)\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(4|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|)\right) - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_1 - \tau_2|)\right) \right) \cos(2\alpha) \right] \Pi\left(\frac{\tau}{2|\tau_2 - \tau_1|}\right) \quad (\text{П.43}).
\end{aligned}$$

## 8. Приложение 8

Следуя [53] упростим подынтегральные выражения (2.34) и (2.35):



$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_1 - \tau_2|)\right) - \\
& - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(4|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|)\right) + \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_1 - \tau_2|)\right) = \\
& = \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) \left[ \exp\left(-\frac{2|\tau| - 2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) \right] = \\
& = 2 \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) \sinh\left(\frac{2|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right)
\end{aligned} \tag{П.44},$$

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau|)\right) - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_1 - \tau_2|)\right) + \\
& + \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(4|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|)\right) - \exp\left(-\frac{1}{\tau_{coh}}(2|\tau_1 - \tau_2|)\right) = \\
& = \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) \left[ \exp\left(-\frac{2|\tau| - 2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) - 2 + \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) \right] = \\
& = 2 \exp\left(-\frac{2|\tau_1 - \tau_2|}{\tau_{coh}}\right) \left[ \cosh\left(\frac{2|\tau_2 - \tau_1| - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{П.45}.$$

## 9. Приложение 9

Рассмотрим преобразования Фурье:

$$S_T^{quad}(f) = \int_{-T}^T \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \sinh\left(\frac{2T - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \tag{П.46}.$$

$$S_T^{out-of-quad}(f) = \int_{-T}^T \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left[ \cosh\left(\frac{2T - 2|\tau|}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right] \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \tag{П.47}.$$

Для интеграла (П.46) при  $\tau > 0$  получим:

$$S_T^{quad}(f) = \int_0^T \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \sinh\left(\frac{2T - 2\tau}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau,$$

обозначим:

$$\begin{aligned}
I_1(f) &= \int_0^T \sinh\left(\frac{2T-2\tau}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \exp\left(\frac{2T-2\tau}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2T-2\tau}{\tau_{coh}}\right) \right] \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \\
I_1(f) &= \frac{1}{2} \int_0^T \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(-\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi i f \tau\right) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^T \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi i f \tau\right) d\tau \\
I_1(f) &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{-1}{\tau_{coh} + 2\pi i f} \exp\left(-\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi i f \tau\right) \Big|_0^T - \\
&\quad - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{1}{\tau_{coh} - 2\pi i f} \exp\left(\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi i f \tau\right) \Big|_0^T \\
I_1(f) &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{-\tau_{coh}}{2(1 + \pi i f \tau_{coh})} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi i f T) - 1 \right] - \\
&\quad - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{\tau_{coh}}{2(1 - \pi i f \tau_{coh})} \left[ \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi i f T) - 1 \right] , \\
I_1(f) &= \frac{1}{4} \frac{-\tau_{coh}}{(1 + \pi i f \tau_{coh})} \left[ \exp(-2\pi i f T) - \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{\tau_{coh}}{(1 - \pi i f \tau_{coh})} \left[ \exp(-2\pi i f T) - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \right] .
\end{aligned}$$

При  $\tau \leq 0$  получим:

$$S_T^{quad}(f) = \int_{-T}^0 \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \sinh\left(\frac{2T+2\tau}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau ,$$

обозначим:

$$\begin{aligned}
I_2(f) &= \int_{-T}^0 \sinh\left(\frac{2T+2\tau}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \left[ \exp\left(\frac{2T+2\tau}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2T+2\tau}{\tau_{coh}}\right) \right] \exp(-2\pi i f \tau) d\tau \\
I_2(f) &= \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi i f \tau\right) d\tau - \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(-\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi i f \tau\right) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(f) &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{1}{\frac{2}{\tau_{coh}} - 2\pi if} \exp\left(\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi if \tau\right) \Big|_{-T}^0 - \\
&- \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{-1}{\frac{2}{\tau_{coh}} + 2\pi if} \exp\left(-\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi if \tau\right) \Big|_{-T}^0 \\
I_2(f) &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{\tau_{coh}}{2(1 - \pi if \tau_{coh})} \left[1 - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp(2\pi if T)\right] + \\
&+ \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{\tau_{coh}}{2(1 + \pi if \tau_{coh})} \left[1 - \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp(2\pi if T)\right] \\
I_2(f) &= \frac{1}{4} \frac{\tau_{coh}}{(1 - \pi if \tau_{coh})} \left[\exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp(2\pi if T)\right] + \\
&+ \frac{1}{4} \frac{\tau_{coh}}{(1 + \pi if \tau_{coh})} \left[\exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp(2\pi if T)\right].
\end{aligned}$$

Складываем  $I_1(f)$  и  $I_2(f)$ , получаем:

$$\begin{aligned}
I_1(f) + I_2(f) &= \frac{1}{4} \frac{\tau_{coh}}{(1 + \pi if \tau_{coh})} \left[\exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp(2\pi if T) - \exp(-2\pi if T) + \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right)\right] + \\
&+ \frac{1}{4} \frac{\tau_{coh}}{(1 - \pi if \tau_{coh})} \left[\exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp(2\pi if T) - \exp(-2\pi if T) + \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right)\right] \\
I_1(f) + I_2(f) &= \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \left[\cosh\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \cos(2\pi f T)\right],
\end{aligned}$$

Таким образом, в итоге имеем:

$$S_T^{quad}(f) = \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \left[\cosh\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \cos(2\pi f T)\right] \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \quad (\text{П.48}).$$

Для интеграла (П.47) при  $\tau > 0$  получим:

$$S_T^{out-of-quad}(f) = \int_0^T \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left[\cosh\left(\frac{2T - 2\tau}{\tau_{coh}}\right) - 1\right] \exp(-2\pi if \tau) d\tau,$$

обозначим:

$$\begin{aligned}
J_1(f) &= \int_0^T \cosh\left(\frac{2T-2\tau}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi if\tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \exp\left(\frac{2T-2\tau}{\tau_{coh}}\right) + \exp\left(-\frac{2T-2\tau}{\tau_{coh}}\right) \right] \exp(-2\pi if\tau) d\tau \\
J_1(f) &= \frac{1}{2} \int_0^T \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(-\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi if\tau\right) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^T \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi if\tau\right) d\tau \\
J_1(f) &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{-1}{\tau_{coh} + 2\pi if} \exp\left(-\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi if\tau\right) \Big|_0^T + \\
&+ \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{1}{\tau_{coh} - 2\pi if} \exp\left(\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi if\tau\right) \Big|_0^T \\
J_1(f) &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{-\tau_{coh}}{2(1 + \pi if \tau_{coh})} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi ifT) - 1 \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{\tau_{coh}}{2(1 - \pi if \tau_{coh})} \left[ \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi ifT) - 1 \right] \\
J_1(f) &= \frac{1}{4} \frac{-\tau_{coh}}{(1 + \pi if \tau_{coh})} \left[ \exp(-2\pi ifT) - \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \right] + \\
&+ \frac{1}{4} \frac{\tau_{coh}}{(1 - \pi if \tau_{coh})} \left[ \exp(-2\pi ifT) - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \right]
\end{aligned}$$

При  $\tau \leq 0$  получим:

$$S_T^{out-of-quad}(f) = \int_{-T}^0 \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left[ \cosh\left(\frac{2T+2\tau}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right] \exp(-2\pi if\tau) d\tau,$$

обозначим:

$$\begin{aligned}
J_2(f) &= \int_{-T}^0 \cosh\left(\frac{2T+2\tau}{\tau_{coh}}\right) \exp(-2\pi if\tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \left[ \exp\left(\frac{2T+2\tau}{\tau_{coh}}\right) + \exp\left(-\frac{2T+2\tau}{\tau_{coh}}\right) \right] \exp(-2\pi if\tau) d\tau \\
J_2(f) &= \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi if\tau\right) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(-\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi if\tau\right) d\tau
\end{aligned}$$

$$J_2(f) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{1}{\frac{2}{\tau_{coh}} - 2\pi if} \exp\left(\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi if \tau\right) \Big|_{-T}^0 +$$

$$+ \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{-1}{\frac{2}{\tau_{coh}} + 2\pi if} \exp\left(-\frac{2\tau}{\tau_{coh}} - 2\pi if \tau\right) \Big|_{-T}^0$$

$$J_2(f) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{\tau_{coh}}{2(1 - \pi if \tau_{coh})} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp(2\pi if T) \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \frac{\tau_{coh}}{2(1 + \pi if \tau_{coh})} \left[ 1 - \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \exp(2\pi if T) \right]$$

$$J_2(f) = \frac{1}{4} \frac{\tau_{coh}}{(1 - \pi if \tau_{coh})} \left[ \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp(2\pi if T) \right] -$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\tau_{coh}}{(1 + \pi if \tau_{coh})} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp(2\pi if T) \right]$$

Складываем  $J_1(f)$  и  $J_2(f)$ , получаем:

$$J_1(f) + J_2(f) = \frac{1}{4} \frac{\tau_{coh}}{(1 - \pi if \tau_{coh})} \left[ \exp(-2\pi if T) - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) + \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp(2\pi if T) \right] -$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\tau_{coh}}{(1 + \pi if \tau_{coh})} \left[ \exp(-2\pi if T) - \exp\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) + \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp(2\pi if T) \right]$$

$$J_1(f) + J_2(f) = \frac{1}{2} \frac{\tau_{coh}}{(1 - \pi if \tau_{coh})} \left[ \sinh\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - i \sin(2\pi f T) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\tau_{coh}}{(1 + \pi if \tau_{coh})} \left[ \sinh\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) + i \sin(2\pi f T) \right]$$

$$J_1(f) + J_2(f) = \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \sinh\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) + \frac{\pi f \tau_{coh}^2}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \sin(2\pi f T).$$

Рассмотрим интеграл:

$$J_3(f) = \int_{-T}^T \exp(-2\pi if \tau) d\tau = -\frac{1}{2\pi if} (\exp(-2\pi if T) - \exp(2\pi if T)) = \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi f}.$$

Таким образом:

$$J_1(f) + J_2(f) - J_3(f) = \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \sinh\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) + \frac{\pi f \tau_{coh}^2}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \sin(2\pi f T) - \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi f}$$

$$J_1(f) + J_2(f) - J_3(f) = \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \left[ \sinh\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi f \tau_{coh}} \right].$$

Таким образом, в итоге имеем:

$$S_T^{out-of-quad}(f) = \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \left[ \sinh\left(\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\sin(2\pi f T)}{\pi f \tau_{coh}} \right] \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \quad (\text{П.49}).$$

## 10. Приложение 10

Вычислим двойные интегралы (2.48) и (2.49). Для интеграла (2.48) рассмотрим отдельно интегралы:

$$S_1^q(f) = \int_0^T \int_0^T \cosh\left(\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2,$$

$$S_2^q(f) = \int_0^T \int_0^T \cos(2\pi f |\tau_2 - \tau_1|) \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2.$$

В силу симметричности этих интегралов относительно  $\tau_1$  и  $\tau_2$  достаточно рассмотреть случай:  $\tau_2 \geq \tau_1$ , результирующее выражение получится умножением найденного интеграла при  $\tau_2 \geq \tau_1$  на 2 получаем:  $\tau_1 \in [0 \quad T]$ ,  $\tau_2 \in [\tau_1 \quad T]$ :

$$\begin{aligned} S_1^q(f) &= 2 \int_0^T \left( \int_{\tau_1}^T \cosh\left(\frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(-\frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) d\tau_2 \right) d\tau_1 = \\ &= \int_0^T \left( \int_{\tau_1}^T \left[ 1 + \exp\left(-\frac{4(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) \right] d\tau_2 \right) d\tau_1, \end{aligned}$$

используем замену переменной:  $\theta = \tau_2 - \tau_1$ ,  $\theta \in [0 \quad T - \tau_1]$ ,  $d\theta = d\tau_2$ :

$$S_1^q(f) = \int_0^T \left( \int_0^{T-\tau_1} \left[ 1 + \exp\left(-\frac{4\theta}{\tau_{coh}}\right) \right] d\theta \right) d\tau_1 = \int_0^T \left( \left[ \theta - \frac{\tau_{coh}}{4} \exp\left(-\frac{4\theta}{\tau_{coh}}\right) \right]_0^{T-\tau_1} \right) d\tau_1 =$$

$$= \int_0^T \left( T - \tau_1 - \frac{\tau_{coh}}{4} \exp\left(-\frac{4(T-\tau_1)}{\tau_{coh}}\right) + \frac{\tau_{coh}}{4} \right) d\tau_1,$$

Вновь делая замену переменной:  $\mathcal{G} = T - \tau_1$ ,  $\mathcal{G} \in [T - 0]$ ,  $d\mathcal{G} = -d\tau_1$ :

$$S_1^q(f) = \int_0^T \left( \mathcal{G} - \frac{\tau_{coh}}{4} \exp\left(-\frac{4\mathcal{G}}{\tau_{coh}}\right) + \frac{\tau_{coh}}{4} \right) d\mathcal{G} = \left( \frac{\mathcal{G}^2}{2} + \frac{\tau_{coh}^2}{16} \exp\left(-\frac{4\mathcal{G}}{\tau_{coh}}\right) + \frac{\tau_{coh}}{4} \mathcal{G} \right)_0^T =$$

$$= \frac{T^2}{2} + \frac{\tau_{coh}^2}{16} \exp\left(-\frac{4T}{\tau_{coh}}\right) + \frac{\tau_{coh}}{4} T - \frac{\tau_{coh}^2}{16} = \frac{1}{2} \left( T^2 + \frac{\tau_{coh}^2}{8} \left( \exp\left(-\frac{4T}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) + \frac{\tau_{coh}}{2} T \right).$$

Для второго интеграла получаем при  $\tau_2 \geq \tau_1$ ,  $\tau_1 \in [0 - T]$ ,  $\tau_2 \in [\tau_1 - T]$ :

$$S_2^q(f) = 2 \int_0^T \left( \int_{\tau_1}^T \cos(2\pi f(\tau_2 - \tau_1)) \exp\left(-\frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) d\tau_2 \right) d\tau_1.$$

После замены переменной:  $\theta = \tau_2 - \tau_1$ ,  $\theta \in [0 - T - \tau_1]$ ,  $d\theta = d\tau_2$ , интеграл преобразуется к виду:

$$S_2^q(f) = 2 \int_0^T \left( \int_0^{T-\tau_1} \cos(2\pi f\theta) \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) d\theta \right) d\tau_1 =$$

$$= 2 \int_0^T \left( \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f\theta) + 2\pi f \sin(2\pi f\theta) \right) \right)_{\theta=0}^{T-\tau_1} d\tau_1 =$$

$$= 2 \int_0^T \left( \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \times \left[ \exp\left(-\frac{2(T-\tau_1)}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f(T-\tau_1)) + 2\pi f \sin(2\pi f(T-\tau_1)) \right) + \frac{2}{\tau_{coh}} \right] \right) d\tau_1$$

Вновь делая замену переменной:  $\mathcal{G} = T - \tau_1$ ,  $\mathcal{G} \in [T - 0]$ ,  $d\mathcal{G} = -d\tau_1$ :

$$\begin{aligned}
S_2^q(f) &= \\
& 2 \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \int_0^T \left[ \exp\left(-\frac{2\vartheta}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f \vartheta) + 2\pi f \sin(2\pi f \vartheta) \right) + \frac{2}{\tau_{coh}} \right] d\vartheta = \\
& = 2 \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \times \\
& \times \left[ \begin{aligned} & -\frac{2}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \exp\left(-\frac{2\vartheta}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f \vartheta) + 2\pi f \sin(2\pi f \vartheta) \right) + \\ & + 2\pi f \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \exp\left(-\frac{2\vartheta}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f \vartheta) - 2\pi f \cos(2\pi f \vartheta) \right) + \\ & + \frac{2}{\tau_{coh}} \vartheta \end{aligned} \right]_0^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2^q(f) &= 2 \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \times \\
& \times \left[ \begin{aligned} & \frac{2}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( \frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f T) - 2\pi f \sin(2\pi f T) \right) - \frac{2}{\tau_{coh}} \right] - \\ & - 2\pi f \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( \frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f T) + 2\pi f \cos(2\pi f T) \right) - 2\pi f \right] + \\ & + \frac{2}{\tau_{coh}} T \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Итоговый результат для средней СПМШ для ВИРИ в квадратурном режиме (2.48)

имеет вид:

$$S_I^{quad}(f) = \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 I_s^2 \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \{S_1^q(f) - S_2^q(f)\}$$



$$S_i^{quad}(f) = \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 I_s^2 \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( T^2 + \frac{\tau_{coh}^2}{8} \left( \exp\left(-\frac{4T}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) + \frac{\tau_{coh}}{2} T \right) - \\ & - \frac{4}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^4}{\left(4 + (2\pi f \tau_{coh})^2\right)^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( \frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f T) - 2\pi f \sin(2\pi f T) \right) - \frac{2}{\tau_{coh}} \right] + \\ & + 4\pi f \frac{\tau_{coh}^4}{\left(4 + (2\pi f \tau_{coh})^2\right)^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( \frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f T) + 2\pi f \cos(2\pi f T) \right) - 2\pi f \right] - \\ & - \frac{4T}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \end{aligned} \right\}$$

(П.50).

Для интеграла (2.49) рассмотрим теперь интегралы:

$$S_1^{ooq}(f) = \int_0^T \int_0^T \sinh\left(\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2$$

$$S_2^{ooq}(f) = \int_0^T \int_0^T \sin(2\pi f |\tau_2 - \tau_1|) \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2.$$

В силу симметричности этих интегралов относительно  $\tau_1$  и  $\tau_2$  достаточно рассмотреть случай:  $\tau_2 \geq \tau_1$ , результирующее выражение получится умножением найденного интеграла при  $\tau_2 \geq \tau_1$  на 2 получаем:  $\tau_1 \in [0 \quad T]$ ,  $\tau_2 \in [\tau_1 \quad T]$ :

$$S_1^{ooq}(f) = 2 \int_0^T \left( \int_{\tau_1}^T \sinh\left(\frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) \exp\left(-\frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) d\tau_2 \right) d\tau_1 =$$

$$= \int_0^T \left( \int_{\tau_1}^T \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) \right] d\tau_2 \right) d\tau_1$$

используем замену переменной:  $\theta = \tau_2 - \tau_1$ ,  $\theta \in [0 \quad T - \tau_1]$ ,  $d\theta = d\tau_2$ :

$$\begin{aligned}
S_1^{ooq}(f) &= \int_0^T \left( \int_0^{T-\tau_1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4\theta}{\tau_{coh}}\right) \right] d\theta \right) d\tau_1 = \int_0^T \left( \left[ \theta + \frac{\tau_{coh}}{4} \exp\left(-\frac{4\theta}{\tau_{coh}}\right) \right]_0^{T-\tau_1} \right) d\tau_1 = \\
&= \int_0^T \left( T - \tau_1 + \frac{\tau_{coh}}{4} \exp\left(-\frac{4(T-\tau_1)}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}}{4} \right) d\tau_1
\end{aligned}$$

Вновь делая замену переменной:  $\mathcal{G} = T - \tau_1$ ,  $\mathcal{G} \in [T - 0]$ ,  $d\mathcal{G} = -d\tau_1$ :

$$\begin{aligned}
S_1^{ooq}(f) &= \int_0^T \left( \mathcal{G} + \frac{\tau_{coh}}{4} \exp\left(-\frac{4\mathcal{G}}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}}{4} \right) d\mathcal{G} = \left( \frac{\mathcal{G}^2}{2} - \frac{\tau_{coh}^2}{16} \exp\left(-\frac{4\mathcal{G}}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}}{4} \mathcal{G} \right)_0^T = \\
&= \frac{T^2}{2} - \frac{\tau_{coh}^2}{16} \exp\left(-\frac{4T}{\tau_{coh}}\right) - \frac{\tau_{coh}}{4} T + \frac{\tau_{coh}^2}{16} = \frac{1}{2} \left( T^2 - \frac{\tau_{coh}^2}{8} \left( \exp\left(-\frac{4T}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) - \frac{\tau_{coh}}{2} T \right)
\end{aligned}$$

Для второго интеграла получаем при  $\tau_2 \geq \tau_1$ ,  $\tau_1 \in [0 - T]$ ,  $\tau_2 \in [\tau_1 - T]$ :

$$S_2^{ooq}(f) = 2 \int_0^T \left( \int_{\tau_1}^T \sin(2\pi f(\tau_2 - \tau_1)) \exp\left(-\frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) d\tau_2 \right) d\tau_1$$

После замены переменной:  $\theta = \tau_2 - \tau_1$ ,  $\theta \in [0 - T - \tau_1]$ ,  $d\theta = d\tau_2$ , интеграл преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
S_2^{ooq}(f) &= 2 \int_0^T \left( \int_0^{T-\tau_1} \sin(2\pi f\theta) \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) d\theta \right) d\tau_1 = \\
&= 2 \int_0^T \left( \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f\tau_{coh})^2} \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f\theta) - 2\pi f \cos(2\pi f\theta) \right) \right)_0^{T-\tau_1} d\tau_1 = \\
&= 2 \int_0^T \left( \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f\tau_{coh})^2} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[ \exp\left(-\frac{2(T-\tau_1)}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f(T-\tau_1)) - 2\pi f \cos(2\pi f(T-\tau_1)) \right) + 2\pi f \right] \right) d\tau_1
\end{aligned}$$

Вновь делая замену переменной:  $\mathcal{G} = T - \tau_1$ ,  $\mathcal{G} \in [T - 0]$ ,  $d\mathcal{G} = -d\tau_1$ :

$$\begin{aligned}
S_2^{ooq}(f) &= 2 \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \times \\
&\times \int_0^T \left( \left[ \exp\left(-\frac{2\vartheta}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f \vartheta) - 2\pi f \cos(2\pi f \vartheta) \right) + 2\pi f \right] d\vartheta = \right. \\
&= 2 \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \times \\
&\times \left. \left[ \begin{aligned} &-\frac{2}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \exp\left(-\frac{2\vartheta}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f \vartheta) - 2\pi f \cos(2\pi f \vartheta) \right) - \\ &-2\pi f \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \exp\left(-\frac{2\vartheta}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f \vartheta) + 2\pi f \sin(2\pi f \vartheta) \right) + \\ &+ 2\pi f \vartheta \end{aligned} \right]_0^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2^{ooq}(f) &= 2 \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \times \\
&\times \left[ \begin{aligned} &-\frac{2}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f T) - 2\pi f \cos(2\pi f T) \right) + 2\pi f \right] - \\ &-2\pi f \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f T) + 2\pi f \sin(2\pi f T) \right) + \frac{2}{\tau_{coh}} \right] + \\ &+ 2\pi f T \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Итоговый результат для средней СПМШ для ВИРИ во вне – квадратурном режиме (2.49) имеет вид:

$$S_I^{out-of-quad}(f) = \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 I_s^2 \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \left\{ S_1^{ooq}(f) - \frac{1}{\pi f \tau_{coh}} S_2^{ooq}(f) \right\},$$

$$S_I^{out-of-quad}(f) = \frac{v_{gr}^2}{2} \rho_0^2 I_s^2 \frac{\tau_{coh}}{1 + (\pi f \tau_{coh})^2} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2} \left( T^2 - \frac{\tau_{coh}^2}{8} \left( \exp\left(-\frac{4T}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) - \frac{\tau_{coh}}{2} T \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi f \tau_{coh}} \frac{4}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^4}{(4 + (2\pi f \tau_{coh})^2)^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \sin(2\pi f T) - 2\pi f \cos(2\pi f T) \right) + 2\pi f \right] + \right. \\ & \left. + \frac{4}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^4}{(4 + (2\pi f \tau_{coh})^2)^2} \left[ \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \left( -\frac{2}{\tau_{coh}} \cos(2\pi f T) + 2\pi f \sin(2\pi f T) \right) + \frac{2}{\tau_{coh}} \right] - \right. \\ & \left. \frac{4T}{\tau_{coh}} \frac{\tau_{coh}^2}{4 + (2\pi f \tau_{coh})^2} \right\} \end{aligned} \right. \quad (П.51).$$

## 11. Приложение 11

Рассмотрим выражение (3.15) с учетом (3.14):

$$\begin{aligned} (\sigma_t^\rho)^2 &= I_0^2 + 4I_0 E_t \left\langle \left[ \operatorname{Re}(B) \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \operatorname{Im}(B) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right] \right\rangle + \\ &+ 4E_t \left\langle \left[ \operatorname{Re}(B) \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \operatorname{Im}(B) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right]^2 \right\rangle - \\ &- \left\{ I_0 + 2E_t \left\langle \left[ \operatorname{Re}(B) \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \operatorname{Im}(B) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right] \right\rangle \right\}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_t^\rho)^2 &= \\ &= 4E_t \left\langle \left[ \operatorname{Re}(B) \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \operatorname{Im}(B) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right]^2 \right\rangle - \\ &- 4 \left( E_t \left\langle \left[ \operatorname{Re}(B) \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \operatorname{Im}(B) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right] \right\rangle \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_t^\rho)^2 &= \\
&= 4 \left[ \begin{aligned} &(\operatorname{Re}(B))^2 E_t \langle \cos^2(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle + \\ &+ 2\operatorname{Re}(B)\operatorname{Im}(B) E_t \langle \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle + \\ &(\operatorname{Im}(B))^2 E_t \langle \sin^2(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle \end{aligned} \right] \\
&- 4 \left[ \begin{aligned} &(\operatorname{Re}(B))^2 (E_t \langle \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle)^2 + \\ &+ 2\operatorname{Re}(B)\operatorname{Im}(B) E_t \langle \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle E_t \langle \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle + \\ &(\operatorname{Im}(B))^2 (E_t \langle \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle)^2 \end{aligned} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_t^\rho)^2 &= \\
&= 4(\operatorname{Re}(B))^2 \left[ E_t \langle \cos^2(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle - (E_t \langle \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle)^2 \right] + \\
&+ 4(\operatorname{Im}(B))^2 \left[ E_t \langle \sin^2(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle - (E_t \langle \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \rangle)^2 \right].
\end{aligned}$$

Пользуясь разложением синуса и косинуса в ряд по функциям Бесселя [91]:

$$\cos(z \sin(\theta)) = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos(2k\theta) \tag{П.52},$$

$$\sin(z \sin(\theta)) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z) \sin((2k+1)\theta)$$

получим в итоге:

$$\begin{aligned}
(\sigma_t^\rho)^2 &= 4(\operatorname{Re}(B))^2 \left[ 4 \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Lambda))^2 E_t \langle \cos^2(2k\omega t) \rangle \right] + \\
&+ 4(\operatorname{Im}(B))^2 \left[ 4 \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Lambda))^2 E_t \langle \sin^2((2k+1)\omega t) \rangle \right] \tag{П.53}.
\end{aligned}$$

Можно считать, что мощности четных компонент с частотами  $2\omega, 4\omega, \dots, 2k\omega$ , равны соответственно:  $8(\operatorname{Re}(B))^2 (J_{2k}(\Lambda))^2$ , а нечетных компонент с частотами:  $\omega, 3\omega, \dots, (2k+1)\omega$ , равны:  $8(\operatorname{Im}(B))^2 (J_{2k+1}(\Lambda))^2$

Отметим, что при малых значениях  $\Lambda$  выражение (П.53) упрощается:

$$(\sigma_t^\rho)^2 = 2(\operatorname{Im}(B))^2 \Lambda^2 \quad \text{при малых } \Lambda \tag{П.54}.$$

## 12. Приложение 12

Рассмотрим средние по ансамблю  $\{\rho\}$  значения :

$E_\rho \langle BB^* \rangle$ ,  $E_\rho \langle BB \rangle$  и  $E_\rho \langle B^* B^* \rangle$ , где:

$$B = E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle,$$

$$B^* = E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_2 - 2ikz_1) \rho(z_1) \rho^*(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle.$$

Для средних по ансамблю значений имеем:

$$\begin{aligned} E_\rho \langle BB \rangle &= \\ &= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\ &= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_3/v_{gr}) A_s(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_3 - 2ikz_4) \rho^*(z_3) \rho(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{П.55}$$

$$\begin{aligned} E_\rho \langle B^* B^* \rangle &= \\ &= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_2 - 2ikz_1) \rho(z_1) \rho^*(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\ &= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho(z_3) \rho^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{П.56}.$$

Два верхних равенства справедливы, в силу того, что комплексные амплитуды рассеяния для центров, расположенных на разных отрезках: до и после точки воздействия  $O$  являются некоррелированными между собой.

$$\begin{aligned}
E_\rho \langle BB^* \rangle &= \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho^*(z_1) \rho(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right. \\
&\quad \left. \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho(z_3) \rho^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= \rho_0^2 \int_0^l \int_l^L E_T \langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \rangle E_T \langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \rangle dz_1 dz_2 \\
&\hspace{20em} (\text{П.57}).
\end{aligned}$$

Рассмотрим также:  $E_\rho \langle \text{Re}(B) \rangle$ ,  $E_\rho \langle \text{Im}(B) \rangle$ ,  $E_\rho \langle \text{Re}(B) \text{Im}(B) \rangle$ .

Так как:

$$\text{Re}(B) = \frac{1}{2}(B + B^*), \quad \text{Im}(B) = \frac{1}{2i}(B - B^*), \quad \text{Re}(B) \text{Im}(B) = \frac{1}{4i}(BB - B^*B^*), \quad \text{имеем:}$$

$$E_\rho \langle \text{Re}(B) \rangle = \frac{1}{2}(E_\rho \langle B \rangle + E_\rho \langle B^* \rangle) = 0, \quad E_\rho \langle \text{Im}(B) \rangle = \frac{1}{2i}(E_\rho \langle B \rangle - E_\rho \langle B^* \rangle) = 0, \quad ,$$

$$E_\rho \langle \text{Re}(B) \text{Im}(B) \rangle = \frac{1}{4i}(E_\rho \langle BB \rangle - E_\rho \langle B^*B^* \rangle) = 0, \quad \text{в силу того, что участки}$$

интегрирования в интегралах для  $B$  не перекрываются друг с другом.

### 13. Приложение 13

Рассмотрим интеграл:

$$D = \int_0^\theta \int_\theta^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2.$$

Заметим, что в подынтегральном выражении всегда  $\tau_2 \geq \tau_1$ , поэтому:

$$\begin{aligned}
D &= \int_0^\theta \int_\theta^T \exp\left(-\frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^\theta \exp\left(\frac{2\tau_1}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 \int_\theta^T \exp\left(-\frac{2\tau_2}{\tau_{coh}}\right) d\tau_2 = \\
&= -\frac{\tau_{coh}^2}{4} \left( \exp\left(\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) \left( \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) \right) = \\
&= \frac{\tau_{coh}^2}{4} \left( \exp\left(\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) \left( \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \right)
\end{aligned} \tag{П.58}$$

## 14. Приложение 14

Рассмотрим мощность полезного сигнала на выходе интерферометра Маха–Цендера или Майкельсона, при воздействии на одно из его плеч гармонического воздействия вида :  $\varphi(t) = \Theta \sin(\omega \cdot t)$ . Интенсивность на выходе интерферометра, его передаточная функция, определяется выражением (П.22):

$$E_T \langle (I_{MZ}(t))_{inst} \rangle = I_s [1 + \cos(\alpha + \Theta \sin(\omega \cdot t)) R(T)] \quad (\text{П.59}),$$

где  $\alpha$  – положение рабочей точки интерферометра,  $R(T) = \exp\left(-\frac{|T|}{\tau_{coh}}\right)$ ,  $T = \tau_1 - \tau_2$

–временная задержка интерферирующих лучей. Мощность полезного сигнала: временных колебаний интенсивности на выходе интерферометра соответствует дисперсии выражения (П.59), рассчитанной с помощью усреднения по времени

воздействия внешнего сигнала  $E_t \langle f(\tau) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |f(\tau)|^2 dt$ , иными словами она

равна разнице полной мощности сигнала на выходе интерферометра и мощности постоянной составляющей сигнала на выходе интерферометра, и равна:

$$\sigma_{MZ}^2 = E_t \langle E_T \langle (I_{MZ}(t))_{inst} \rangle E_T \langle (I_{MZ}(t))_{inst} \rangle \rangle - \left( E_t \langle E_T \langle (I_{MZ}(t))_{inst} \rangle \rangle \right)^2 \quad (\text{П.60})$$

$$\sigma_{MZ}^2 = I_s^2 (R(T))^2 \left( E_t \langle \cos^2(\alpha + \Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle - \left( E_t \langle \cos(\alpha + \Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle \right)^2 \right),$$

$$\sigma_{MZ}^2 =$$

$$= I_s^2 (R(T))^2 \left( \left( E_t \langle \cos^2(\alpha) \cos^2(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle - \right. \right. \\ \left. \left. - E_t \langle 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \cos(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \sin(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. + E_t \langle \sin^2(\alpha) \sin^2(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle \right) - \right. \\ \left. \left( \left( E_t \langle \cos(\alpha) \cos(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - E_t \langle 2 \cos(\alpha) \cos(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle E_t \langle \sin(\alpha) \sin(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( E_t \langle \sin(\alpha) \sin(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle \right)^2 \right) \right),$$



$$\sigma_{MZ}^2 = I_s^2 (R(T))^2 \left( \begin{aligned} & \cos^2(\alpha) \left( E_t \langle \cos^2(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle - \left( E_t \langle \cos(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle \right)^2 \right) + \\ & + \sin^2(\alpha) \left( E_t \langle \sin^2(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle - \left( E_t \langle \sin(\Theta \sin(\omega \cdot t)) \rangle \right)^2 \right) \end{aligned} \right),$$

далее с учетом (П.52) получим:

$$\sigma_{MZ}^2 = I_s^2 (R(T))^2 \left( \begin{aligned} & \cos^2(\alpha) \left( 4 \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Theta))^2 E_t \langle \cos^2(2k\omega t) \rangle \right) + \\ & + \sin^2(\alpha) \left( 4 \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Theta))^2 E_t \langle \sin^2((2k+1)\omega t) \rangle \right) \end{aligned} \right) \quad (\text{П.61})$$

Можно считать, что мощности четных компонент с частотами :  $2\omega, 4\omega, \dots, 2k\omega$ , равны соответственно:  $2I_s^2 (R(T))^2 \cos^2(\alpha) (J_{2k}(\Theta))^2$ , а нечетных компонент с частотами:  $\omega, 3\omega, \dots, (2k+1)\omega$ , равны:  $2I_s^2 (R(T))^2 \sin^2(\alpha) (J_{2k+1}(\Theta))^2$ . Отметим, что при малых значениях  $\Theta$  выражение (П.61) упрощается:

$$\sigma_{MZ}^2 = \frac{1}{2} I_s^2 (R(T))^2 \sin^2(\alpha) \Theta^2 \quad \text{при малых } \Theta \quad (\text{П.62}).$$

## 15. Приложение 15

Рассмотрим выражение (3.56) с учетом (3.55), запишем (3.56) в виде:

$$E_T \left\langle \left( I_{scat2}^p(t) \right)_{inst} \right\rangle = I_0 + 2 \left\{ \begin{aligned} & \left[ \text{Re}(F) + \text{Re}(G) + \text{Re}(H) \right] \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \\ & + \left[ \text{Im}(F) + \text{Im}(G) + \text{Im}(H) \right] \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.63}),$$

введем обозначение:

$$X = F + G + H \quad (\text{П.64}),$$

тогда (П.63) можно записать в виде аналогичном (3.14):

$$E_T \left\langle \left( I_{scat2}^p(t) \right)_{inst} \right\rangle = I_0 + 2 \left[ \text{Re}(X) \cos(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) + \text{Im}(X) \sin(\Lambda \sin(\omega \cdot t)) \right] \quad (\text{П.65}).$$

Вычисление (3.56), теперь сводится к уже проделанному ранее, см приложение 11, в итоге можно сразу записать:

$$\begin{aligned}
(\sigma_H^\rho)^2 &= 4(\operatorname{Re}(X))^2 \left[ 4 \sum_{k=1}^{\infty} (J_{2k}(\Lambda))^2 E_t \langle \cos^2(2k\omega t) \rangle \right] + \\
&+ 4(\operatorname{Im}(X))^2 \left[ 4 \sum_{k=0}^{\infty} (J_{2k+1}(\Lambda))^2 E_t \langle \sin^2((2k+1)\omega t) \rangle \right]
\end{aligned} \tag{П.66},$$

или

$$(\sigma_H^\rho)^2 = 2(\operatorname{Im}(X))^2 \Lambda^2 \quad \text{при малых } \Lambda \tag{П.67}.$$

## 16. Приложение 16

Рассмотрим средние значения :  $E_\rho \langle XX^* \rangle$ ,  $E_\rho \langle XX \rangle$ ,  $E_\rho \langle X^* X^* \rangle$ , где

$$X = F + G + H ,$$

$$F = E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{sig}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle ,$$

$$G = E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle ,$$

$$H = E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle .$$

Раскроем произведения:

$$E_\rho \langle XX \rangle = E_\rho \langle F^2 + G^2 + H^2 + 2FG + 2GH + 2FH \rangle ,$$

$$E_\rho \langle X^* X^* \rangle = E_\rho \langle (F^*)^2 + (G^*)^2 + (H^*)^2 + 2(F^*)(G^*) + 2(G^*)(H^*) + 2(F^*)(H^*) \rangle ,$$

$$E_\rho \langle XX^* \rangle = E_\rho \langle FF^* + GF^* + HF^* + FG^* + GG^* + HG^* + FH^* + GH^* + HH^* \rangle .$$

Для средних по ансамблю  $\{\rho\}$  значений  $E_\rho \langle XX \rangle$  и  $E_\rho \langle X^* X^* \rangle$  имеем в силу:

$$\begin{aligned}
&E_\rho \langle \rho^*(z_1) \rho(z_2) \rho^*(z_3) \rho(z_4) \rangle = \\
&= E_\rho \langle \rho(z_1) \rho(z_2) \rangle E_\rho \langle \rho(z_3) \rho(z_4) \rangle + E_\rho \langle \rho(z_2) \rho(z_3) \rangle E_\rho \langle \rho(z_1) \rho(z_4) \rangle = , \\
&= \rho_0^2 \delta(z_1 - z_2) \delta(z_3 - z_4) + \rho_0^2 \delta(z_2 - z_3) \delta(z_1 - z_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_\rho \langle FF \rangle &= E_\rho \langle F^* F^* \rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{sig}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_3/v_{gr}) A_s(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_3 - 2ikz_4) \rho_{sig}^*(z_3) \rho_{sig}(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= 0 \\
E_\rho \langle GG \rangle &= E_\rho \langle G^* G^* \rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_3/v_{gr}) A_s(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_3 - 2ikz_4) \rho_{ref}^*(z_3) \rho_{sig}(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= 0 \\
E_\rho \langle HH \rangle &= E_\rho \langle H^* H^* \rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_3/v_{gr}) A_s(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_3 - 2ikz_4) \rho_{ref}^*(z_3) \rho_{sig}(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= 0 \\
E_\rho \langle FG \rangle &= E_\rho \langle F^* G^* \rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{sig}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_3/v_{gr}) A_s(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_3 - 2ikz_4) \rho_{ref}^*(z_3) \rho_{sig}(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= 0 \\
E_\rho \langle GH \rangle &= E_\rho \langle G^* H^* \rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_3/v_{gr}) A_s(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_3 - 2ikz_4) \rho_{ref}^*(z_3) \rho_{sig}(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_\rho \langle FH \rangle &= E_\rho \langle F^* H^* \rangle = \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{sig}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right. \\
&\quad \left. \left\langle E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_3/v_{gr}) A_s(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_3 - 2ikz_4) \rho_{ref}^*(z_3) \rho_{sig}(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= 0
\end{aligned}$$

шесть верхних выражения справедливы в силу того, что комплексные амплитуды рассеяния для центров, расположенных на разных отрезках: до и после точки воздействия  $O$  или  $O'$  являются некоррелированными между собой. Поэтому имеем:

$$E_\rho \langle XX \rangle = E_\rho \langle X^* X^* \rangle = 0. \quad (\text{П.68}).$$

Для среднего значения  $E_\rho \langle XX^* \rangle$  имеем:

$$\begin{aligned}
E_\rho \langle FF^* \rangle &= \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{sig}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right. \\
&\quad \left. \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho_{sig}(z_3) \rho_{sig}^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= \rho_0^2 \int_0^l \int_l^L E_T \langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \rangle E_T \langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \rangle dz_1 dz_2 \\
&\quad (\text{П.69})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_\rho \langle GF^* \rangle &= \\
&= E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right. \\
&\quad \left. \left\langle E_T \left\langle \int_0^l \int_l^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho_{sig}(z_3) \rho_{sig}^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_\rho \langle HF^* \rangle = \\
& = E_\rho \left\langle \left\langle \begin{aligned} & E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \\ & E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho_{sig}(z_3) \rho_{sig}^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \end{aligned} \right\rangle \right\rangle = \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_\rho \langle FG^* \rangle = \\
& = E_\rho \left\langle \left\langle \begin{aligned} & E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{sig}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \\ & E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho_{ref}(z_3) \rho_{sig}^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \end{aligned} \right\rangle \right\rangle = \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_\rho \langle GG^* \rangle = \\
& = E_\rho \left\langle \left\langle \begin{aligned} & E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \\ & E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho_{ref}(z_3) \rho_{sig}^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \end{aligned} \right\rangle \right\rangle = \\
& = \rho_0^2 \int_0^L \int_0^L E_T \langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \rangle E_T \langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \rangle dz_1 dz_2 \\
& \hspace{25em} (\text{II.70})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_\rho \langle HG^* \rangle = \\
& = E_\rho \left\langle \left\langle \begin{aligned} & E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \\ & E_T \left\langle \int_0^L \int_0^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho_{ref}(z_3) \rho_{sig}^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \end{aligned} \right\rangle \right\rangle = \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_\rho \langle FH^* \rangle = \\
& = E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{sig}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
& \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho_{ref}(z_3) \rho_{sig}^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
& = 0 \\
& E_\rho \langle GH^* \rangle = \\
& = E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_0^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
& \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho_{ref}(z_3) \rho_{sig}^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
& = 0 \\
& E_\rho \langle HH^* \rangle = \\
& = E_\rho \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \exp(2ikz_1 - 2ikz_2) \rho_{ref}^*(z_1) \rho_{sig}(z_2) dz_1 dz_2 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
& \left\langle \left\langle E_T \left\langle \int_l^L \int_l^L A_s(t - 2z_3/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_4/v_{gr}) \exp(2ikz_4 - 2ikz_3) \rho_{ref}(z_3) \rho_{sig}^*(z_4) dz_3 dz_4 \right\rangle \right\rangle \right\rangle = \\
& = \rho_0^2 \int_l^L \int_l^L E_T \langle A_s^*(t - 2z_1/v_{gr}) A_s(t - 2z_2/v_{gr}) \rangle E_T \langle A_s(t - 2z_1/v_{gr}) A_s^*(t - 2z_2/v_{gr}) \rangle dz_1 dz_2 \\
& \hspace{20em} (\text{П.71}).
\end{aligned}$$

Соответственно:

$$E_\rho \langle XX^* \rangle = E_\rho \langle FF^* \rangle + E_\rho \langle GG^* \rangle + E_\rho \langle HH^* \rangle \quad (\text{П.72}).$$

## 17. Приложение 17

Рассмотрим интеграл:

$$D = \int_{\theta}^T \int_{\theta}^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2.$$

В силу симметричности этого интеграла относительно  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  достаточно рассмотреть случай  $\tau_2 \geq \tau_1$ , результирующее выражение получится умножением

найденного интеграла при  $\tau_2 \geq \tau_1$  на 2 получаем:  $\tau_1 \in [\theta \quad T], \tau_2 \in [\tau_1 \quad T]$ :

$$D = 2 \int_{\theta}^T \int_{\tau_1}^T \exp\left(-\frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2.$$

Делая замену переменной:  $t = \tau_2 - \tau_1$ ,  $dt = d\tau_2$ ,  $t \in [0 \quad T - \tau_1]$ , получаем:

$$\begin{aligned} D &= 2 \int_{\theta}^T \int_0^{T-\tau_1} \exp\left(-\frac{2t}{\tau_{coh}}\right) dt d\tau_1 = -2 \int_{\theta}^T \left( \frac{\tau_{coh}}{2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau_{coh}}\right) \Big|_0^{T-\tau_1} \right) d\tau_1 = \\ &= -\tau_{coh} \int_{\theta}^T \left( \exp\left(-\frac{2(T-\tau_1)}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) d\tau_1 \end{aligned}$$

Делая вновь замену переменной:  $q = T - \tau_1$ ,  $dq = -d\tau_1$ ,  $\tau_1 \in [T - \theta \quad 0]$ , получаем:

$$\begin{aligned} D &= -\tau_{coh} \int_0^{T-\theta} \left( \exp\left(-\frac{2q}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) dq = -\tau_{coh} \left( -\frac{\tau_{coh}}{2} \exp\left(-\frac{2q}{\tau_{coh}}\right) - q \right) \Big|_0^{T-\theta} = \\ &= -\tau_{coh} \left( -\frac{\tau_{coh}}{2} \exp\left(-\frac{2(T-\theta)}{\tau_{coh}}\right) + \frac{\tau_{coh}}{2} - (T - \theta) \right) \end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$D = \tau_{coh} \left( \frac{\tau_{coh}}{2} \exp\left(-\frac{2(T-\theta)}{\tau_{coh}}\right) + (T - \theta) - \frac{\tau_{coh}}{2} \right) \quad (\text{П.73}).$$

Рассмотрим сумму интегралов:

$$K = \int_0^{\theta} \int_{\theta}^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^{\theta} \int_{\theta}^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{\theta}^T \int_{\theta}^T \exp\left(-\frac{2|\tau_2 - \tau_1|}{\tau_{coh}}\right) d\tau_1 d\tau_2$$

Подставляя, вычисленные ранее интегралы (П.58) и (П.73), получим:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\tau_{coh}^2}{2} \left( \exp\left(\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - 1 \right) \left( \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \right) + \\
&+ \tau_{coh} \left( \frac{\tau_{coh}}{2} \exp\left(-\frac{2(T-\theta)}{\tau_{coh}}\right) + (T-\theta) - \frac{\tau_{coh}}{2} \right) = \\
&= \frac{\tau_{coh}^2}{2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(\frac{2\theta-2T}{\tau_{coh}}\right) + \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) \right) + \\
&+ \frac{\tau_{coh}^2}{2} \left( \exp\left(-\frac{2(T-\theta)}{\tau_{coh}}\right) + \frac{2(T-\theta)}{\tau_{coh}} - 1 \right) = \left( \frac{\tau_{coh}^2}{2} \left( \exp\left(-\frac{2T}{\tau_{coh}}\right) - \exp\left(-\frac{2\theta}{\tau_{coh}}\right) \right) + \tau_{coh}(T-\theta) \right)
\end{aligned}$$

## 18. Приложение 18

Преобразуем выражение:

$$S = I^+ \frac{dI^-}{dt} - I^- \frac{dI^+}{dt} \quad (\text{П.74}),$$

где  $I^+$ ,  $I^-$ ,  $dI^+/dt$ ,  $dI^-/dt$  — определяются выражениями, соответственно (4.11) – (4.14), имеем:

$$\begin{aligned}
I^+ \frac{dI^-}{dt} &= \left[ 4A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \cos(2\delta) + 4A_{II} A_{III} \cos(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \right] \times \\
&\times \left[ 4A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) \right] \frac{d(k\varphi(t))}{dt} = \\
&= \left\{ \begin{aligned} &16(A_I A_{III})^2 \cos^2(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) \cos(2\delta) + \\ &+ 16A_I A_{II} (A_{III})^2 \cos(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) \end{aligned} \right\} \frac{d(k\varphi(t))}{dt} \\
I^- \frac{dI^+}{dt} &= \left[ -4A_I A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) \right] \times \\
&\times \left[ \begin{aligned} &4A_I A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \cos(2\delta) - \\ &- 4A_{II} A_{III} \sin(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \end{aligned} \right] \frac{d(k\varphi(t))}{dt} = \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-16(A_I A_{III})^2 \sin^2(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) \cos(2\delta) + \\ &+ 16A_I A_{II} (A_{III})^2 \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \sin(2\delta) \end{aligned} \right\} \frac{d(k\varphi(t))}{dt}
\end{aligned}$$

В итоге имеем:



$$\begin{aligned}
S(t) &= \\
&= \left\{ \begin{aligned} &16(A_I A_{III})^2 \cos^2(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) \cos(2\delta) + \\ &+ 16A_I A_{II} (A_{III})^2 \cos(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) \end{aligned} \right\} \frac{d(k\varphi(t))}{dt} - \\
&- \left\{ \begin{aligned} &-16(A_I A_{III})^2 \sin^2(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) \cos(2\delta) + \\ &+ 16A_I A_{II} (A_{III})^2 \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(\varphi_{III} + k\varphi(t) - \varphi_{II}) \sin(2\delta) \end{aligned} \right\} \frac{d(k\varphi(t))}{dt} = \\
&= \left[ \begin{aligned} &16(A_I A_{III})^2 \sin(2\delta) \cos(2\delta) + \\ &+ 16A_I A_{II} (A_{III})^2 \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) \sin(2\delta) \end{aligned} \right] \frac{d(k\varphi(t))}{dt} = \\
&= 16A_I (A_{III})^2 \sin(2\delta) [A_I \cos(2\delta) + A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II})] \frac{d(k\varphi(t))}{dt}
\end{aligned}
\tag{П.75}.$$

## 19. Приложение 19

Запишем выражения (4.9) и (4.10) с исключенными составляющими, плавно изменяющимися во времени, в виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_5(t) &= 2A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t) + 2\delta) + 2A_{II} A_{III} \cos(-\varphi_{III} + \varphi_I - \varphi_I - k\varphi(t) + \varphi_{II}) = \\
&= 2A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \cos(2\delta) - 2A_I A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) + \\
&+ 2A_{II} A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \cos(\varphi_{II} - \varphi_I) - 2A_{II} A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(\varphi_{II} - \varphi_I)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_6(t) &= 2A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t) - 2\delta) + 2A_{II} A_{III} \cos(-\varphi_{III} + \varphi_I - \varphi_I - k\varphi(t) + \varphi_{II}) = \\
&= 2A_I A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \cos(2\delta) + 2A_I A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(2\delta) + \\
&+ 2A_{II} A_{III} \cos(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \cos(\varphi_{II} - \varphi_I) - 2A_{II} A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) \sin(\varphi_{II} - \varphi_I)
\end{aligned}$$

Подставим в эти выражения условие:  $A_I \cos(2\delta) + A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) = 0$ , имеем:

$$\tilde{I}_5(t) = -2A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) [A_I \sin(2\delta) + A_{II} \sin(\varphi_{II} - \varphi_I)] \tag{П.76},$$

$$\tilde{I}_6(t) = +2A_{III} \sin(\varphi_I - \varphi_{III} - k\varphi(t)) [A_I \sin(2\delta) - A_{II} \sin(\varphi_{II} - \varphi_I)] \tag{П.77}.$$

## 20. Приложение 20

Рассмотрим совместное выполнение равенств:

$$A_I \cos(2\delta) + A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) = 0 \quad (\text{П.78})$$

$$A_I \sin(2\delta) \pm A_{II} \sin(\varphi_{II} - \varphi_I) = 0 \quad (\text{П.79}).$$

Возведение этих уравнений в квадрат не приведет к появлению новых решений, таким образом, имеем эквивалентную систему уравнений:

$$(A_I)^2 \cos^2(2\delta) + (A_{II})^2 \cos^2(\varphi_I - \varphi_{II}) + 2A_I A_{II} \cos(2\delta) \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) = 0,$$

$$(A_I)^2 \sin^2(2\delta) + (A_{II})^2 \sin^2(\varphi_I - \varphi_{II}) \pm 2A_I A_{II} \sin(2\delta) \sin(\varphi_I - \varphi_{II}) = 0.$$

Сложим два полученных уравнения:

$$(A_I)^2 + (A_{II})^2 + 2A_I A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II} \mp 2\delta) = 0$$

$$(A_I - A_{II})^2 + 2A_I A_{II} + 2A_I A_{II} \cos(\varphi_I - \varphi_{II} \mp 2\delta) = 0$$

$$(A_I - A_{II})^2 = -2A_I A_{II} (1 + \cos(\varphi_I - \varphi_{II} \mp 2\delta)),$$

левая часть полученного равенства всегда больше либо равна нулю, правая часть этого равенства всегда меньше либо равна нулю, поэтому единственной возможностью его выполнения являются условия:

$$A_I = A_{II}, \quad \varphi_I - \varphi_{II} = \pi + 2\pi n \pm 2\delta, \quad n - \text{целое} \quad (\text{П.80}).$$