

На правах рукописи



Будунова Кристина Андреевна

**АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ
И ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ**

Специальность 1.3.4 – Радиофизика

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2025 г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук

Научный руководитель: **Кравченко Виктор Филиппович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

Официальные оппоненты: **Палкин Евгений Алексеевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, проректор по научной работе и заместитель председателя Учёного совета автономной некоммерческой организации высшего образования «Российский новый университет»
Самохин Александр Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Института информационных технологий ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита диссертации состоится «20» июня 2025 г. в 11.00 на заседании диссертационного совета 24.1.111.02 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук по адресу: 125009, Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН и на сайте <http://www.cplire.ru/rus/dissertations/Budunova/dissertation.pdf>

Автореферат разослан “ ” _____ 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.1.111.02,
доктор физико-математических наук

Кузьмин Лев Викторович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ И СТЕПЕНЬ РАЗРАБОТАННОСТИ ТЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона о восстановлении сигнала с финитным спектром по отсчетам – одно из наиболее фундаментальных утверждений теоретической радиотехники. Возможность представления сигнала набором его дискретных значений сыграла ключевую роль в развитии методов передачи цифровой информации. В разное время были предложены всевозможные обобщения ряда отсчетов [1-3]. Область применения обобщенных теорем обширна, она включает в себя обработку сигналов и изображений различной физической природы, теорию связи, радиоастрономию, численный анализ, математическую физику, биомедицину [1-4].

Ряд отсчетов выступает теоретической базой методов фильтрации цифровых и непрерывных сигналов. Процесс цифро-аналогового преобразования (ЦАП) с применением аналоговых фильтров низких частот (ФНЧ) представляет собой практическую реализацию идеи теоремы отсчетов. Устройства ЦАП являются компонентами современных систем радиосвязи [5].

Частотно-избирательные фильтры в радиопередающих устройствах позволяют очистить передаваемый сигнал от спектральных составляющих, частоты которых выходят за заданную полосу излучения и создают помехи другим радиосредствам. В радиоприемниках с помощью фильтров осуществляется избирательный прием нужного сигнала и ослабление помех, идущих от сторонних радиостанций [6].

Цифровые ФНЧ являются элементами интерполяторов и дециматоров – фильтров, выполняющих преобразование частоты дискретизации в системах многоскоростной обработки сигналов (МОС). Принципы МОС снижают

требования к вычислительной производительности при проектировании радиотехнических и телекоммуникационных систем [7].

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) многих классических цифровых и аналоговых ФНЧ аппроксимируют прямоугольный импульс – модуль спектра базисных функций разложения Уиттекера-Котельникова-Шеннона. С разрывностью функции прямоугольного импульса связан известный недостаток ряда отсчетов – медленная сходимость.

Одним из обобщений ряда отсчетов является разложение Кравченко-Котельникова [8]. Базисные функции данного разложения – сдвиги спектров $F_a(t)$ бесконечно дифференцируемых финитных атомарных функций $h_a(x)$ [8]. Вследствие бесконечной гладкости $h_a(x)$ функции $F_a(t)$ быстро затухают. Благодаря этому свойству разложение Кравченко-Котельникова имеет преимущество перед рядом Уиттекера-Котельникова-Шеннона, заключающееся в лучшем качестве восстановления сигнала по усеченной выборке отсчетов. Теорема о реконструкции сигнала спектрами атомарных функций была выдвинута в [9]. Рассматривались приложения ряда Кравченко-Котельникова и его обобщений в задачах восстановления многомерных сигналов [10], синтеза диаграммы направленности антенны [9], реконструкции томографических изображений [11]. Эффективность ряда была показана экспериментально, однако не было проведено теоретических исследований его свойств, в частности, не было возможности оценивать важнейшую характеристику ряда – ошибку усечения.

Наиболее естественное приложение теоремы Кравченко-Котельникова – разработка цифровых и непрерывных фильтров на основе функций $h_a(x)$. Идея синтеза фильтра с АЧХ, приближенно равной функции $h_a(x)$, обсуждалась в [12], но фильтры построены не были. Построение алгоритмов фильтрации на основе ряда Кравченко-Котельникова

является актуальной проблемой, решение которой позволит повысить эффективность обработки сигналов в радиотехнических системах.

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью настоящей работы является разработка методов синтеза цифровых и непрерывных фильтров с АЧХ, приближенно равной атомарной функции $h_a(x)$, а также проверка эффективности их применения в ряде алгоритмов.

В процессе исследования решаются следующие задачи:

1. Построение аналитического выражения, позволяющего оценивать сверху модуль погрешности усечения ряда Кравченко-Котельникова.

2. Определение коэффициентов цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ) и с АЧХ, аппроксимирующей функцию $h_a(x)$ и сумму сдвигов $h_a(x)$.

3. Вывод оценок отклонений АЧХ КИХ-фильтров на основе функций $h_a(x)$.

4. Разработка численного метода, позволяющего строить неотрицательные дробно-рациональные приближения функций $h_a^2(x)$.

5. Построение аналоговых фильтров с АЧХ, приближающейся по форме к функции $h_a(x)$. Синтез цифровых фильтров с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ) на основе полученных аналоговых прототипов.

6. Моделирование процесса ЦАП с применением аналогового фильтра на основе функции $h_a(x)$.

7. Проверка эффективности применения КИХ- и БИХ-фильтров на основе атомарных функций в задаче повышения частоты дискретизации цифрового сигнала.

8. Анализ метода ортогонального частотного мультиплексирования (orthogonal frequency division multiplexing, OFDM) с фильтрацией и вывод формулы погрешности восстановления символов квадратурной амплитудной модуляции (quadrature amplitude modulation, QAM) для данного метода.

9. Разработка модифицированного алгоритма OFDM с фильтрацией, позволяющего повысить точность восстановления символов QAM-модуляции.

10. Моделирование процесса передачи данных при применении классического и модифицированного алгоритмов OFDM с фильтрацией.

11. Моделирование процесса передачи данных при применении модифицированного алгоритма OFDM с фильтрацией в сочетании с фильтрами на основе атомарных функций.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА

В процессе исследования получены следующие новые результаты:

1. Впервые получена оценка ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова. Из полученной формулы следует, что ошибка, которая возникает при замене бесконечной суммы конечной из $2N + 1$ слагаемых, затухает асимптотически быстрее, чем $O(N^{-\alpha})$, где α – любое положительное число.

2. Представлен оригинальный алгоритм расчета КИХ-фильтров с АЧХ на основе атомарных функций, который дает возможность в явном виде определять коэффициенты их характеристик. Метод синтеза отличается простотой, но при этом применение новых фильтров в некоторых случаях дает лучшие результаты по сравнению с оконными фильтрами.

3. Разработан новый метод аппроксимации, позволяющий находить неотрицательные дробно-рациональные приближения финитных функций с быстро сходящимся рядом Фурье. Метод дает возможность строить устойчивые аналоговые фильтры с АЧХ на основе финитных функций.

4. Впервые синтезированы непрерывные ФНЧ с АЧХ, приближающейся к атомарной функции $h_a(x)$. На основе разработанных аналоговых прототипов построены БИХ-фильтры. Полученные фильтры при небольших значениях параметра a обладают быстро затухающей импульсной характеристикой (ИХ). Данное свойство позволяет применять атомарные фильтры для восстановления сигналов по неполным выборкам отсчетов.

5. Получена новая формула погрешности, образующейся при применении метода OFDM с фильтрацией для передачи символов QAM-модуляции.

6. Предложен основанный на свойствах циклической свертки модифицированный алгоритм OFDM с фильтрацией, позволяющий восстанавливать QAM-символы с меньшей погрешностью по сравнению с классическим алгоритмом. При проведении численного эксперимента модифицированный метод OFDM с фильтрацией обеспечил качественное восстановление данных для схем высокого порядка QAM 1024 и QAM 4096.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ

Полученная оценка ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова будет полезна при практическом применении обобщенной теоремы отсчетов на основе атомарных функций в задачах обработки сигналов и изображений. Предложенный в работе алгоритм приближения финитных функций рациональными дробями дает возможность развить новые методы синтеза аналоговых фильтров с заданной формой АЧХ.

Фильтры на основе атомарных функций благодаря эффективности их использования в алгоритмах ЦАП и МОС могут найти применение в методах обработки сигналов в системах беспроводной связи и телевизионного вещания. Модифицированный метод OFDM с фильтрацией позволит улучшить качество передачи данных по сетям мобильной связи.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для построения оценки ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова, вывода неравенства для отклонений новых цифровых КИХ-фильтров, разработки численного метода дробно-рациональной аппроксимации квадратов функций $h_a(x)$ использовались методы математического анализа и теории оптимизации. Синтез БИХ-фильтров выполнялся алгоритмами инвариантной ИХ и билинейного преобразования. При анализе погрешности метода OFDM с фильтрацией, а также при проведении численных экспериментов, связанных с цифровой обработкой сигналов, применялись методы теории дискретных линейных систем.

ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Теоремы об оценке ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова. Оценка погрешности усечения в случае замены в разложении функции $F_a(t)$ произведением конечного числа сомножителей.
2. Алгоритм вычисления коэффициентов КИХ-фильтров с АЧХ на основе атомарных функций $h_a(x)$, имеющими заданные полосы пропускания и подавления. Оценка отклонения АЧХ построенных КИХ-фильтров.
3. Метод дробно-рациональной аппроксимации финитных функций с быстро сходящимся рядом Фурье, дающий возможность получать устойчивые аналоговые фильтры с АЧХ, приближающимися по форме к финитным функциям. Синтез аналоговых и цифровых БИХ-фильтров на основе атомарной функции $h_a(x)$.
4. Анализ погрешности, образующейся при применении метода OFDM с фильтрацией для передачи символов QAM-модуляции. Модифицированный алгоритм OFDM с фильтрацией, позволяющий снизить погрешность восстановления QAM-символов.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

По результатам исследования опубликованы 5 статей в журналах, индексируемых в системе Scopus, 6 статей в журналах, входящих в «белый список» научных журналов, 3 статьи в журналах из перечня ВАК. Автором представлено также 9 докладов на всероссийских и международных конференциях.

ЛИЧНЫЙ ВКЛАД

Автору принадлежат формулировки и доказательства теорем об оценках ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова, формулы вычисления коэффициентов КИХ-фильтров низких частот на основе атомарных функций, разработка численного метода дробно-рациональной аппроксимации финитных функций с быстро сходящимся рядом Фурье и теоретическое обоснование данного метода, модификация алгоритма OFDM с фильтрацией. Научному руководителю принадлежит постановка цели и задач исследования.

ОБЪЕМ И СТРУКТУРА РАБОТЫ

Основные разделы диссертации включают: введение, четыре главы, заключение, список литературы. Работа содержит 117 страниц, 21 рисунок, 13 таблиц и список литературы из 46 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, представлены цель и задачи диссертации, описаны практическая значимость и новизна работы. Сформулированы основные положения и результаты, выносимые на защиту.

Глава 1 посвящена ряду Кравченко-Котельникова, который выступает в исследовании в качестве теоретической основы разрабатываемых методов фильтрации цифровых и аналоговых сигналов.

Ряд Кравченко-Котельникова является обобщением разложения Уиттекера-Котельникова-Шеннона спектрами атомарных функций $h_a(x)$. Описание семейства функций $h_a(x)$, обладающих свойствами финитности и бесконечной дифференцируемости, дается в разделе 1.1. Графики некоторых функций $h_a(x)$ показаны на рисунке 1.

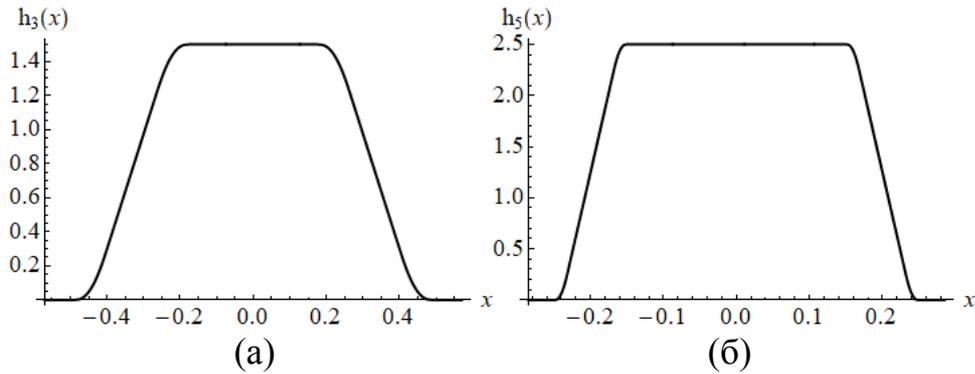


Рисунок 1 – Графики атомарных функций $h_a(x)$ для некоторых значений параметра a . Функции $h_3(x)$ (а) и $h_5(x)$ (б).

Разложение Кравченко-Котельникова позволяет восстановить сигнал $f(t)$ с финитным спектром $F(\omega)$, $F(\omega) = 0$ при $|\omega| > \Omega$, по набору отсчетов $\{f(k\Delta)\}_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta) F_a \left(\frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right), \quad (1)$$

где $F_a(t)$ – преобразование Фурье атомарной функции $h_a(x)$:

$$F_a(t) = \prod_{l=1}^{\infty} \text{sinc}(t / a^l).$$

Шаг Δ и параметр a в (1) должны удовлетворять требованиям

$$a > 2, \quad \Delta \leq \frac{\pi}{\Omega} \frac{a - 2}{a - 1}.$$

Главным преимуществом ряда Кравченко-Котельникова является быстрое затухание его погрешности усечения $\varepsilon_N(t)$

$$\varepsilon_N(t) = \sum_{|k| > N} f(k\Delta) F_a \left(\frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right). \quad (2)$$

В разделе 1.3 доказаны две теоремы об оценке модуля величины (2).

Теорема 1.1. Погрешность усечения $\varepsilon_N(t)$ (2) для всех $N \geq 1$, $|t| < \Delta$ удовлетворяет соотношению

$$|\varepsilon_N(t)| \leq M \left(\Psi(N - t / \Delta) + \Psi(N + t / \Delta) \right), \quad (3)$$

где $M = \max_{k \in \mathbb{Z}} |f(k\Delta)|$, а $\Psi(x)$ – кусочная функция вида

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{a}{\pi(x+1)} + 1 + \frac{1}{x+1} \right), \quad x \leq \frac{a}{\pi} - 1,$$

$$\Psi(x) = \frac{a^{(\eta(x)-3/2)^2/2}}{a^{1/8} \pi^{\eta(x)-1}} \frac{1}{(x+1)^{\eta(x)-2}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{\eta(x)-2} \right), \quad \frac{a}{\pi} - 1 < x. \quad (4)$$

Функция $\eta(x)$ в (4) задается формулой

$$\eta(x) = \begin{cases} [\log_a(a^2 \pi(x+1))], & \{\log_a(\pi(x+1))\} \neq 0, \\ \log_a(a\pi(x+1)), & \{\log_a(\pi(x+1))\} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В (5) $[\cdot]$ – целая часть числа, а $\{\cdot\}$ – дробная часть.

Теорема 1.2. Ошибка усечения $\varepsilon_N(t)$ ряда (1) при $|t| \leq \Delta$ и $N > a / \pi$ удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_N(t)| \leq 2M \pi^{-\log_a \sqrt{a\pi}} N^{-\log_a(\pi^2 a^{-1} N)/2} \left(\frac{1}{\eta(N-1)-2} + N^{-1} \right). \quad (6)$$

Теорема 1.2 дает оценку $\varepsilon_N(t)$ в упрощенном виде, удобном для практического применения. Из формулы (6) следует, что ошибка усечения ряда Кравченко-Котельникова стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ быстрее, чем $O(N^{-r})$, где r – любое положительное число.

Доказана также теорема об оценке погрешности усечения ряда на основе частичных произведений

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta) P_K \left(a, \frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right), \quad (7)$$

где

$$P_K(a, t) = \prod_{k=1}^K \text{sinc}(t / a^k).$$

Для шага Δ и параметра a в (7) должны быть выполнены условия

$$a(1 - a^{-K}) > 2, \quad \Delta \leq \frac{\pi}{\Omega} \frac{a(1 - a^{-K}) - 2}{a - 1}.$$

Теорема 1.3. При $K \geq 2$, $|t| < \Delta$ погрешность усечения $\varepsilon_N(t)$ разложения (7) удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_N(t)| \leq M \left(\Phi(N - t / \Delta) + \Phi(N + t / \Delta) \right),$$

где $\Phi(x)$ – кусочная функция, определяемая выражениями:

1. При $x \leq \frac{a}{\pi} - 1$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{a}{\pi(x+1)} + 1 + \frac{1}{x+1} \right);$$

2. При $\frac{a}{\pi} - 1 < x \leq \frac{a^{K-1}}{\pi} - 1$

$$\Phi(x) = \frac{a^{\frac{1}{2}(\eta(x)-3/2)^2}}{a^{\frac{1}{8}\pi\eta(x)-1}} \frac{1}{(x+1)^{\eta(x)-2}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{\eta(x)-2} \right);$$

3. При $\frac{a^{K-1}}{\pi} - 1 < x$

$$\Phi(x) = \frac{a^{\frac{1}{2}(K-1/2)^2}}{a^{\frac{1}{8}\pi K}} \frac{1}{(x+1)^{K-1}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{K-1} \right).$$

В случае, когда количество сомножителей K произведения $P_K(a, t)$ удовлетворяет неравенству $K \geq \log_a(\pi(N+2))$, для погрешности усечения ряда (7) справедливо соотношение (3). Если, кроме того, $N > a/\pi$, выполняется оценка (6).

В главе 2 предложен метод синтеза КИХ-фильтров низких частот с АЧХ, приближающимися по форме к атомарной функции $h_a(\omega)$. Коэффициенты ИХ фильтра длины $2N+1$ с заданными граничными

частотами ω_0 и ω_1 полос пропускания и подавления АЧХ определяются формулами

$$h(k) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2\pi} P_K(a, (a-1)\omega_1 k), \quad k = -N, \dots, N, \quad (8)$$

где $a = 2 / (\omega_1 - \omega_0)$. Построены также КИХ-фильтры с АЧХ на основе сумм сдвигов $h_{s,a}(\omega)$ атомарных функций $h_a(\omega)$. Функции $h_{s,a}(\omega)$ задаются выражениями

$$h_{s,a}(x) = \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S/2} \left(h_a \left(x + \frac{2k+1}{a} \right) + h_a \left(x - \frac{2k+1}{a} \right) \right), \quad S = 2n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$h_{s,a}(x) = \frac{1}{S} \sum_{k=-(S-1)/2}^{(S-1)/2} h_a \left(x + \frac{2k}{a} \right), \quad S = 2n-1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность коэффициентов КИХ-фильтра на основе функции $h_{s,a}(\omega)$ имеет вид

$$h(k) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2\pi} H_{s,a}^* \left(\frac{a(\omega_1 + \omega_0)}{2S} k \right), \quad k = -N, \dots, N, \quad (9)$$

где

$$H_{s,a}^*(t) = \frac{\sin(St/a)}{S \sin(t/a)} P_K(a, t), \quad a = \frac{(S-1)(1 - \omega_0/\omega_1) + 2}{S(1 - \omega_0/\omega_1)}.$$

Графики АЧХ некоторых фильтров вида (8) и (9) представлены на рисунке 2.

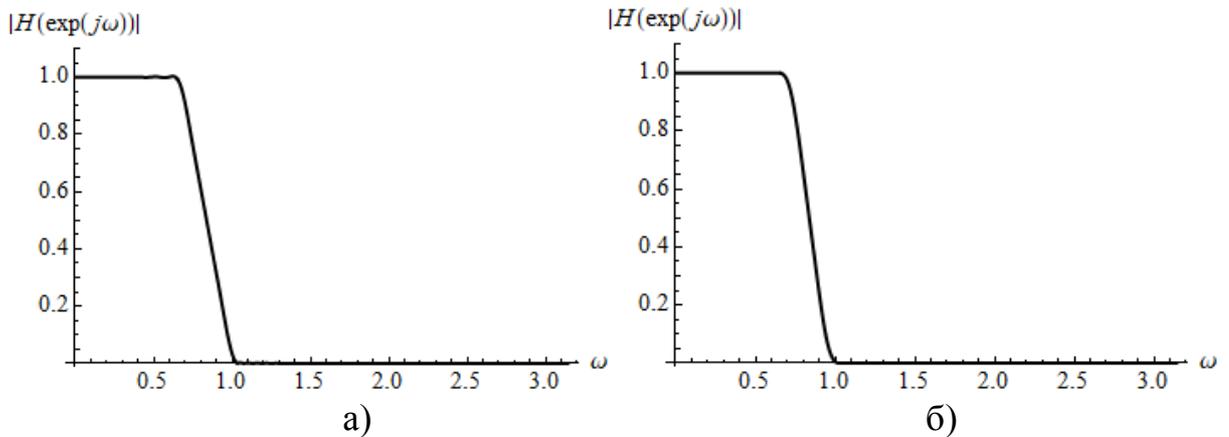


Рисунок 2 – АЧХ фильтров (8) (а) и (9) для $S = 3$ (б) при $\omega_0 = \pi / 5$, $\omega_1 = \pi / 3$, $N = 50$.

Получена оценка отклонения δ АЧХ фильтра (9) в полосах пропускания и подавления. Величина δ удовлетворяет неравенству

$$\delta \leq \frac{2}{\pi} a^{\nu(\nu-1)/2} \left((\omega_1 + \omega_0) / (2S) \right)^{1-\nu} (N+1)^{1-\nu} \left((\nu-1)^{-1} + (N+1)^{-1} \right). \quad (10)$$

В (10) число ν задается формулой

$$\nu = \begin{cases} \left\lceil \log_a \left(a(\omega_1 + \omega_0)(N+1) / (2S) \right) \right\rceil, & \log_a \left((\omega_1 + \omega_0)(N+1) / (2S) \right) \notin \mathbb{N}, \\ \log_a \left((\omega_1 + \omega_0)(N+1) / (2S) \right), & \log_a \left((\omega_1 + \omega_0)(N+1) / (2S) \right) \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Проведен численный эксперимент, заключающийся в повышении частоты дискретизации цифрового сигнала с применением фильтров (8), (9) и классических фильтров на основе окон Блэкмана и Кайзера, а также фильтра с характеристикой «приподнятый косинус». За счет быстрого затухания отклонения новых фильтров для них получена меньшая погрешность интерполяции по сравнению с классическими фильтрами.

В главе 3 решается задача построения аналогового фильтра с АЧХ, аппроксимирующей функцию $h_a(\omega)$. На основе полученных аналоговых фильтров синтезированы цифровые БИХ-фильтры.

При решении задачи синтеза аналоговых фильтров с АЧХ на основе $h_a(\omega)$ возникла необходимость в разработке метода аппроксимации функции $h_a^2(\omega)$ неотрицательными рациональными дробями. В основе предложенного метода приближения лежит равенство, вытекающее из интегральной формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\varphi(z)}{z - \omega} dz = \begin{cases} \varphi(\omega), & -1 < \omega < 1, \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь ω – вещественная переменная, C – контур, проходящий через точки $z = \pm 1$ и ограничивающий односвязную область D , содержащую интервал $(-1, 1)$, $\varphi(z)$ – некоторая аналитическая на D функция. Заменяя функцию $\varphi(\omega)$ в (11) на аппроксимацию $h_a^2(\omega)$ частичными суммами ее ряда Фурье, и

далее переходя от интеграла в правой части к его приближению формулой прямоугольников, можно получить формулу

$$\frac{1}{2\pi j} \sum_{l=0}^{2n-1} \frac{\varphi_a^{(M)}(z(t_l))z'(t_l)}{z(t_l) - \omega} \Delta t \approx \varphi_a(\omega). \quad (12)$$

В (12) $\varphi_a(\omega) = \left(2h_a(\omega / (a-1)) / a\right)^2$, а $\varphi_a^{(M)}(\omega)$ – частичные суммы ряда Фурье $\varphi_a(\omega)$:

$$\varphi_a^{(M)}(\omega) = a_0 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k \cos(\pi k \omega).$$

Выбирая в качестве контуров интегрирования параметрическое семейство эллипсов $C_b = \{(x, y) : x = \cos t, y = b \sin t\}$ и полагая узлы равными $t_l = \pi / (2n) + l\pi / n$, $l = 0, \dots, 2n-1$, из левой части (12) можно получить рациональную дробь $H_{b,M}(\omega)$, принимающую лишь действительные значения

$$H_{b,M}(\omega) = \frac{1}{2nj} \sum_{l=0}^{2n-1} \frac{\varphi_a^{(M)}(\cos t_l + jb \sin t_l)(-\sin t_l + jb \cos t_l)}{\cos t_l + jb \sin t_l - \omega}. \quad (13)$$

Равномерная погрешность $\varepsilon \equiv \varepsilon(b, M)$ приближения функции $\varphi_a(\omega)$ дробью $H_{b,M}(\omega)$ определяется формулой

$$\varepsilon = \max_{\omega \in (-\infty, \infty)} |\varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega)|. \quad (14)$$

Предполагая, что минимум погрешности (14) ищется для конечного количества чисел M , рассмотрим при фиксированном M задачу минимизации функционала

$$\Phi(b_{\text{опт}}, M) = \min_{b>0} \Phi(b, M), \quad (15)$$

где

$$\Phi(b, M) = \max_{\omega \in (-\infty, \infty)} \left(\varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega) \right)^2.$$

Для поиска дроби $H_{b,M}(\omega)$, разрешающей (15), был разработан специальный численный метод, основанный на замене непрерывной задачи дискретной.

Доказанные в разделе 3.3 теоремы 3.1 и 3.2 задают условия замены неограниченного множества $b > 0$ конечным отрезком $[b_0, b_1]$, на котором далее задается сетка значений параметра b . В теореме 3.3 описано условие перехода от непрерывного изменения параметра b к набору дискретных значений таким образом, чтобы решения дискретной и непрерывной задач мало отличались. При решении дискретной задачи можно учитывать требование неотрицательности дроби

$$H_{b,M}(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

выполнение которого впоследствии позволяет синтезировать на основе $H_{b,M}(\omega)$ устойчивый фильтр. Этапы численного алгоритма поиска решения (15) с дополнительным условием (16) описаны в разделе 3.4.

На основе найденной оптимальной дроби $H_{b,M}(\omega)$, используя формулу

$$H(j\omega)H(-j\omega) = H_{b,M}(\omega),$$

можно построить фильтр с АЧХ $|H(j\omega)|$, обладающей свойством

$$|H(j\omega)| = \sqrt{H_{b,M}(\omega)} \approx \frac{2}{a} h_a \left(\frac{\omega}{a-1} \right). \quad (17)$$

Рассмотрен пример применения аналогового фильтра на основе атомарной функции $h_a(\omega)$ в процессе восстановления сигнала с помощью ЦАП. Помимо атомарного фильтра $h_1(t)$ с АЧХ (17) при $a = 3$ использовался также фильтр Баттерворта $h_2(t)$. На рисунке 3 показана АЧХ $|H_1(j\omega)|$ фильтра $h_1(t)$.

Восстановление модельного сигнала осуществлялось по двум выборкам отсчетов различной длины. В первом случае для реконструкции использовались первые 25 значимых отсчетов сигнала, результаты восстановления сигнала классическим и атомарным фильтром имели сопоставимое качество.

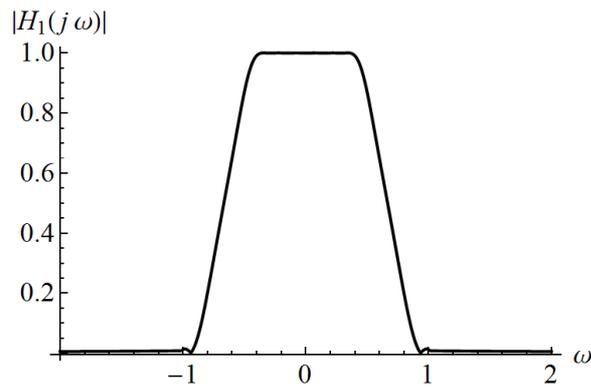


Рисунок 3 – АЧХ $|H_1(j\omega)|$ фильтра $h_1(t)$ на основе атомарной функции $h_3(\omega)$.

Во втором случае из выборки были отброшены первые 10 отсчетов.

Результат ЦАП показан на рисунке 4.

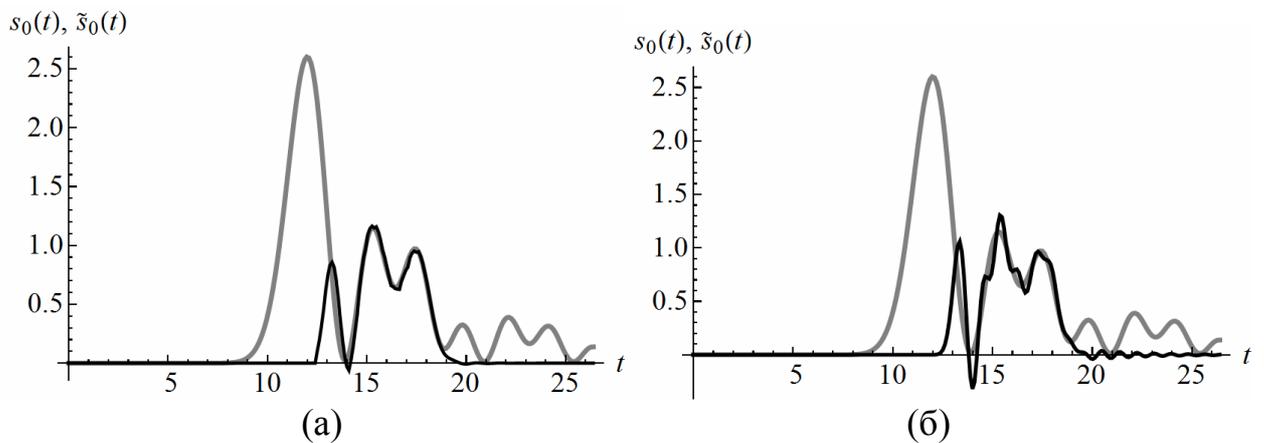


Рисунок 4 – Сигнал $s_0(t)$ (серая линия) и результат его восстановления $\tilde{s}_0(t)$ (черная линия) по 15-ти отсчетам с помощью фильтров $h_1(t)$ (а) и $h_2(t)$ (б).

Фильтр с АЧХ на основе бесконечно гладкой атомарной функции $h_3(\omega)$ позволил осуществить качественное восстановление сигнала по выборке с отброшенными отсчетами. При применении классического фильтра Баттерворта, АЧХ которого аппроксимирует разрывную функцию прямоугольного импульса, возникла существенная погрешность.

Алгоритм из раздела 3.4 может применяться для синтеза устойчивых аналоговых фильтров с АЧХ, приближающимися по форме к различным неотрицательным финитным функциям с быстро сходящимся рядом Фурье. На рисунке 5а показан нормированный относительно носителя В-сплайн

$B^{(2)}(\omega)$, а на рисунке 5б – АЧХ аналогового фильтра, аппроксимирующая функцию $B^{(2)}(\omega)$.

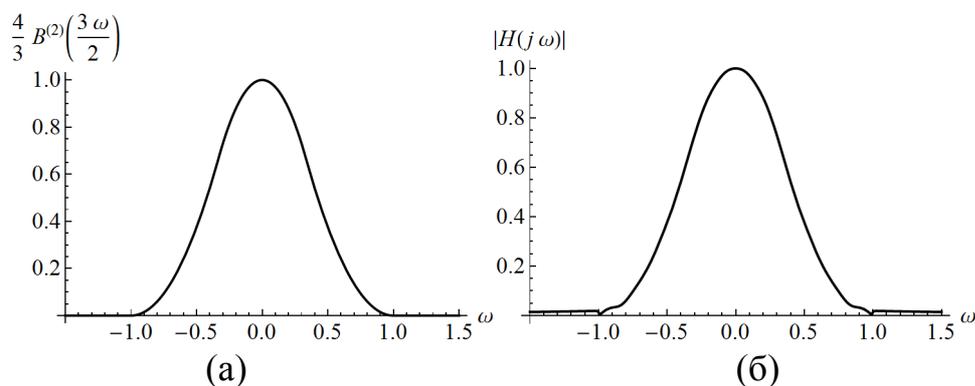


Рисунок 5 – Сплайн $\frac{4}{3} B^{(2)}\left(\frac{3}{2}\omega\right)$ (а) и АЧХ $|H(j\omega)|$ на его основе (б).

Аналоговые фильтры с АЧХ (17) были использованы в качестве прототипов для построения БИХ-фильтров. Синтез осуществлялся стандартными методами инвариантной ИХ и билинейного преобразования. Для алгоритма билинейного преобразования предложено строить аналоговый фильтр с предварительно искаженной АЧХ, что позволяет получить БИХ-фильтр с характеристикой

$$\left|H_d(\exp(j\theta))\right| \approx \sqrt{\varphi_a\left(\frac{\theta}{T}\right)}, \quad \theta \in [0, \pi],$$

где T – шаг дискретизации ИХ.

В численном эксперименте атомарные БИХ-фильтры применялись для интерполяции цифрового сигнала. Рассмотрено несколько различных ФНЧ 30-го порядка: фильтр $\{h_1(k)\}$ на основе функции $h_a(\omega)$ и фильтр Баттерворта $\{h_2(k)\}$, полученные методом инвариантной ИХ; фильтр $\{h_3(k)\}$ на основе функции $h_a(\omega)$ и фильтр Баттерворта $\{h_4(k)\}$, построенные с помощью алгоритма билинейного преобразования.

Результаты восстановления с помощью фильтров $\{h_1(k)\}, \dots, \{h_4(k)\}$ дискретного сигнала по выборке с первыми 15-ю отброшенными отсчетами показаны на рисунке 6. Фильтры на основе атомарных функций обеспечили

качественное восстановление дискретного сигнала по неполной выборке отсчетов.

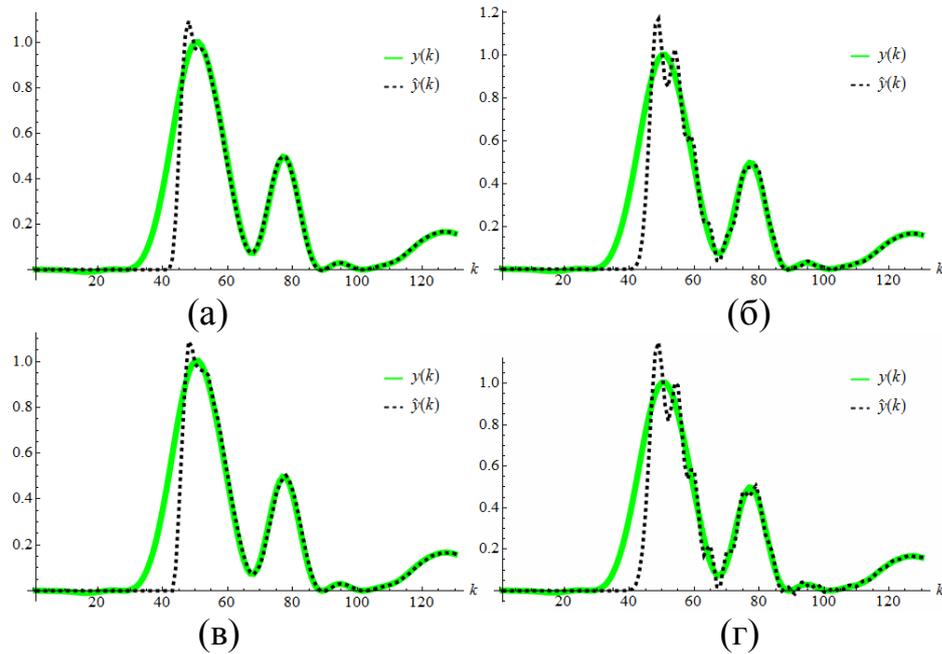


Рисунок 6 – Исходный сигнал $\{y(k)\}$ (зеленая линия) и результат его восстановления (пунктирная линия) по усеченной выборке с помощью фильтров $\{h_1(k)\}$ (а), $\{h_2(k)\}$ (б), $\{h_3(k)\}$ (в), $\{h_4(k)\}$ (г).

В главе 4 предложена модификация метода OFDM с фильтрацией, использование которого предлагается рядом авторов для повышения эффективности передачи данных по сетям мобильной связи [13,14]. При применении метода OFDM с фильтрацией в частотной области выделяется P субполос, каждой из которых соответствует свой OFDM-сигнал $x_l^{(p)}$, $p = 1, \dots, P$. Последовательность $x_l^{(p)}$ образована отсчетами K OFDM-символов $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ длиной N с циклическими префиксами (ЦП) $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=0}^{n-1}$ длиной n , $q = 1, \dots, K$. Последовательности $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ – обратные дискретные преобразования Фурье (ОДПФ) наборов символов QAM-модуляции. Блок-схема алгоритма OFDM с фильтрацией показана на рисунке 7. В передатчиках выполняется свертка каждого из сигналов $x_l^{(p)}$ с частотно-избирательным фильтром $h_l^{(p)}$: $y_l^{(p)} = h_l^{(p)} * x_l^{(p)}$, $p = 1, \dots, P$. На вход приемника поступает сигнал r_l , образованный суммой аддитивного

белого гауссовского шума (АБГШ) и прошедших через канал сигналов $y_l^{(p)}$. Полученный сигнал r_l подается на вход субполосных фильтров $f_l^{(p)}$: $r_l^{(p)} = f_l^{(p)} * r_l$, $p = 1, \dots, P$. После фильтрации для каждой из последовательностей $r_l^{(p)}$ проводится временная синхронизация с p -м передатчиком. Символы QAM-модуляции $\{d_k^{(p,q)}\}_{k=0}^{N-1}$ восстанавливаются с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

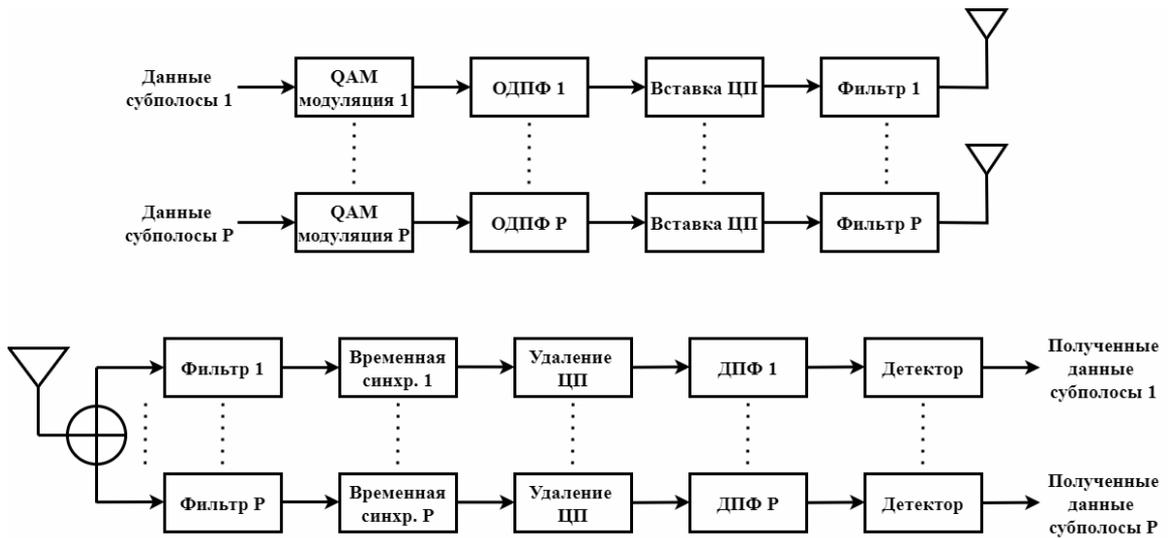


Рисунок 7 – Блок-схема метода OFDM с фильтрацией.

При использовании метода OFDM с фильтрацией даже при условии отсутствия помех при передаче сигналов по каналу QAM-символы в приемнике восстанавливаются с ошибкой. В разделе 4.4 показано, что результат восстановления $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ символа $d_k^{(p,q)}$, соответствующего поднесущей с номером k , определяется выражением

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)})d_k^{(p,q)} + \varepsilon_{1,k}^{(p,q)} + \varepsilon_{2,k}^{(p,q)} + \varepsilon_{3,k}^{(p,q)}. \quad (18)$$

В формуле (18) $\delta_k^{(p)}$ – неравномерность в полосе пропускания квадрата АЧХ $|H_p(\exp(j\omega))|^2$ фильтра $h_l^{(p)}$ в точке $\omega = 2\pi k / N$. В левой части равенства (18) присутствуют также погрешности трех различных видов:

- 1) погрешность $\varepsilon_{1,k}^{(p,q)}$, вызываемая фильтрацией OFDM-символа с ЦП и усечением полученной последовательности;

- 2) погрешность $\varepsilon_{2,k}^{(p,q)}$ из-за фильтрации соседних по времени символов;
- 3) погрешность $\varepsilon_{3,k}^{(p,q)}$, появляющаяся при применении субполосного фильтра к сигналам из других субполос.

В разделе 4.5 предложен модифицированный метод OFDM с фильтрацией, основанный на следующем утверждении: для фильтра длиной $2L + 1$ при дополнении каждого из символов $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ расширенным ЦП из $2L$ отсчетов слева и циклическим продолжением из $2L$ отсчетов справа формула для восстановленных символов $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ принимает вид

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)})d_k^{(p,q)} + \varepsilon_{3,k}^{(p,q)}. \quad (19)$$

Равенство (19) можно получить, учитывая свойства циклической свертки. При добавлении префикса и продолжения длиной $n < 2L$ погрешности $\varepsilon_{1,k}^{(p,q)}$, $\varepsilon_{2,k}^{(p,q)}$ подавляются частично.

В численном эксперименте выполнено сравнение результатов работы стандартного и модифицированного алгоритмов. В модифицированном методе каждый OFDM-символ дополнялся циклическим продолжением, имеющим размер ЦП. Использовалась схема передачи данных со следующими параметрами: ширина канала 5 МГц, расстояние между поднесущими 15 кГц, количество субполос $P = 3$, размер ОДПФ 512. Каждой субполосе соответствует 72 поднесущие частоты, между субполосами имеется $g = 8$ защитных частот. Для восстановления символов модуляции схем QAM 256, QAM 1024, QAM 4096 использован метод OFDM с применением цифровых КИХ-фильтров, полученных методом взвешивания идеальной ИХ. Рассматривалась передача данных при наличии в канале АБГШ, для различных значений отношения энергии бита к спектральной плотности шума E_b/N_0 вычислены значения коэффициента ошибок на бит (bit error rate, BER). Новый метод позволил получить меньшее количество ошибок на бит и оказался эффективным при применении схем высокого порядка QAM 1024, QAM 4096 (рисунок 8).

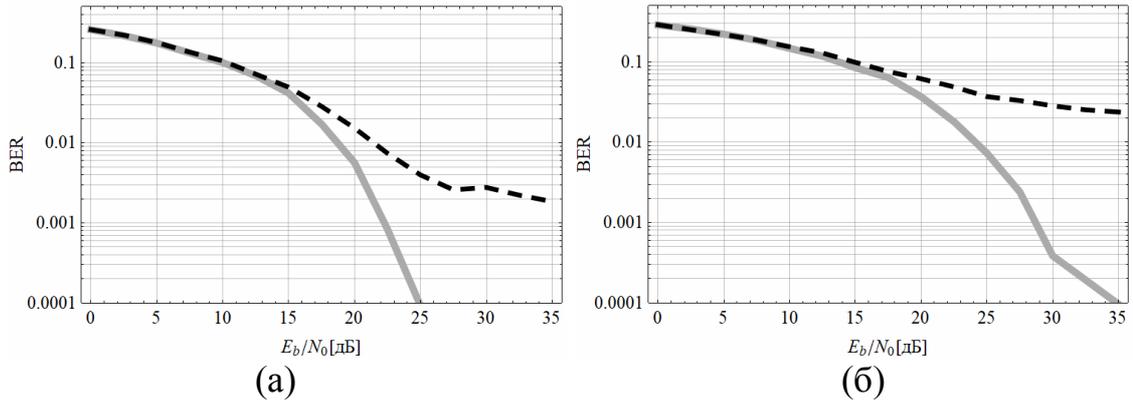


Рисунок 8 – Зависимости величины BER от отношения E_b/N_0 для схем модуляции QAM 1024 (а), QAM 4096 (б), полученные при использовании стандартного (пунктирная линия) и модифицированного (светлая линия) алгоритмов OFDM с фильтрацией.

Во втором численном эксперименте рассматривалась передача данных при небольшом количестве защитных частот $g = 2$. Использовалась схема модуляции QAM 64. Модифицированный алгоритм OFDM с фильтрацией применялся в сочетании с оконными фильтрами и фильтрами на основе атомарных функций (9) для различных значений параметра S . Некоторые из рассмотренных фильтров вида (9) при небольших размерах ИХ позволили получить меньшее количество ошибок при восстановлении данных по сравнению с оконными фильтрами. На рисунке 9 показаны графики зависимостей коэффициентов BER от отношения E_b/N_0 , полученные для КИХ-фильтров порядка порядка $2L + 1$ при $L = 125, 150$.

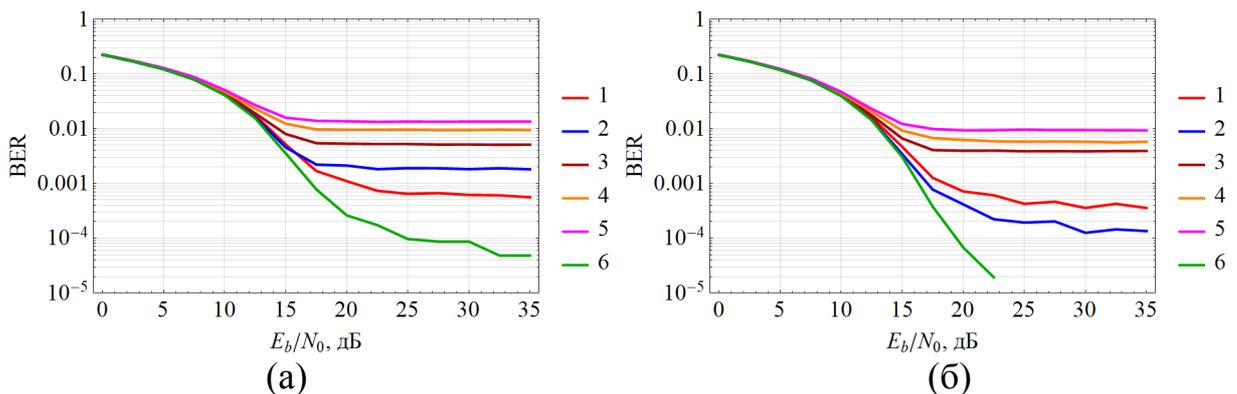


Рисунок 9 – Зависимости коэффициента BER от отношения E_b/N_0 , полученные при применении КИХ-фильтров порядка $2L + 1$ для $L = 125$ (а), $L = 150$ (б): фильтров на основе весовых функций Дирихле (кривая 1), Гаусса (кривая 2), Хэмминга (кривая 3), Блэкмана (кривая 4), Блэкмана-Хэрриса (кривая 5) и фильтра (9) при $S = 12$ (кривая 6).

В заключении сформулированы основные итоги исследования.

1) Впервые получены оценки ошибки усечения для разложения Кравченко-Котельникова. Из полученных формул следует, что погрешность усечения при замене бесконечного ряда конечной суммой из $2N + 1$ слагаемых при $N \rightarrow \infty$ затухает быстрее, чем $O(N^{-r})$, где r — произвольное положительное число. Выведена также оценка ошибки усечения для случая, когда базисными функциями ряда являются произведения конечного числа сомножителей. Представленные формулы позволят более эффективно применять ряд для решения задач обработки сигналов и изображений.

2) Построены новые цифровые КИХ-фильтры с АЧХ на основе функций $h_a(x)$. Получена оценка отклонений АЧХ новых фильтров. Предложенный алгоритм синтеза КИХ-фильтров сравним по простоте реализации с методом оконного взвешивания, при этом применение новых фильтров в некоторых случаях дает лучшие результаты по сравнению с оконными фильтрами.

3) Создан и теоретически обоснован алгоритм аппроксимации финитных функций с быстро сходящимся рядом Фурье неотрицательными рациональными дробями. На основе приближений, получаемых с помощью данного алгоритма, построены аналоговые фильтры с АЧХ, аппроксимирующими функции $h_a(x)$. Приведен пример моделирования ЦАП, в котором продемонстрирована малая чувствительность фильтра на основе функции $h_3(\omega)$ к отбрасыванию отсчетов восстанавливаемого сигнала. Новые аналоговые фильтры использованы в качестве прототипов для построения цифровых БИХ-фильтров с АЧХ, приближающимися по форме к атомарным функциям $h_a(\omega)$. Построенные БИХ-фильтры, как и аналоговые фильтры на основе атомарных функций, позволили выполнить качественное восстановление сигнала по неполной выборке отсчетов.

4) Рассмотрен метод OFDM с фильтрацией, предназначенный для передачи данных по сетям мобильной связи. Проанализирована образующаяся при применении метода погрешность восстановления QAM-символов. Для снижения погрешности предложен модифицированный алгоритм OFDM с фильтрацией. При проведении численного эксперимента модифицированный метод обеспечил качественное восстановление данных для схем высокого порядка QAM 1024 и QAM 4096. Во втором численном эксперименте выбрана схема передачи данных с малым количеством защитных частот. Модифицированный алгоритм OFDM с фильтрацией применен в сочетании с оконными фильтрами и фильтрами с АЧХ, аппроксимирующими суммы сдвигов атомарных функций. При небольших размерах ИХ некоторые из использованных фильтров на основе атомарных функций позволили получить лучшее качество восстановления данных по сравнению с оконными фильтрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джерри, А. Дж. Теорема отсчётов Шеннона, её различные обобщения и приложения. Обзор / А. Дж. Джерри // ТИИЭР. – 1977. – Т. 65. – № 11. – С. 53-89.
2. Benedetto, J.J. Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications / J.J. Benedetto, P.J.S.G. Ferreira. – Boston: Birkhauser, 2001. – 417 p.
3. Eldar, Y.C. Sampling Theory: Beyond Bandlimited Systems / Y.C. Eldar. – Cambridge University Press, 2015. – 800 p.
4. Big Data in Astronomy: Scientific Data Processing for Advanced Radio Telescopes / Eds.: Linghe Kong, Tian Huang, Yongxin Zhu, Shenghua Yu. – Elsevier, 2020. – 438 p.
5. Ромашов, В.В. Математические модели шумовых характеристик цифро-аналоговых преобразователей / В.В. Ромашов, Л.В. Ромашова, И.Д. Грошков, Н.А. Сочнева // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. – 2021. – №2. – С. 50-56.
6. Катунин, Г.П. Телекоммуникационные системы и сети. Т. 2 – Радиосвязь, радиовещание, телевидение. / Г. П. Катунин, Г. В. Мамчев, В. Н. Попантонопуло, В. П. Шувалов – М: Горячая линия–Телеком, 2013. – 672 с.
7. Витязев, В.В. Многоскоростная обработка сигналов / В.В. Витязев. – М.: Горячая линия–Телеком, 2018. – 336 с.

8. Кравченко, В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям / В.Ф. Кравченко. – М.: Радиотехника, 2003. – 510 с.
9. Зелкин, Е.Г. Интерполяция сигналов с финитным спектром с помощью преобразований Фурье атомарных функций и ее применение в задачах синтеза антенн / Е.Г. Зелкин, В.Ф. Кравченко, М.А. Басараб // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47. – № 4. – С. 461-468.
10. Кравченко, В.Ф. Атомарные функции и N-мерная обобщенная теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона / В.Ф. Кравченко, А.Р. Сафин // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2008. – Т. 13. – №12. – С. 31-44.
11. Budunova, K.A. Application of atomic and R-functions in numerical methods for inversion of the Radon transform / K.A. Budunova, Y.Y. Konovalov, O.V. Kravchenko // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symp. (PIERS). St Petersburg 2017. – N.Y.: IEEE, 2017. – P. 1641-1649.
12. Кравченко, В.Ф. Цифровая обработка сигналов на основе обобщённых теорем отсчётов Кравченко — Котельникова — Левитана / В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт, Д.В. Чуриков // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57. – № 9. – С. 1039-1048.
13. Abdoli, J. Filtered OFDM: A New Waveform for Future Wireless Systems / J. Abdoli, M. Jia, J. Ma. // Proc. 2015 IEEE 16th Int. Workshop on Signal Proc. Advances in Wireless Comm. (SPAWC) in Stockholm. – 2015. – P. 66-70.
14. Ali, D.M. An Experimental Study of F-OFDM Spectrum Efficiency for 5G Applications / D.M. Ali, Z.Z. Yahya // Intern. J. Microwave and Optical Technol. – 2022. – Vol. 17. – № 1. – P. 1-9.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Публикации в международных и отечественных рецензируемых изданиях

1. Budunova, K.A. A Generalization of the Kravchenko–Kotelnikov Theorem by Spectra of Compactly Supported Infinitely Differentiable Functions $h_a^{(m)}(x)$ / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko, V.I. Pustovoi // Doklady Mathematics. – 2019. – Vol. 99. – No. 1. – P. 104-107.
2. Budunova, K.A. Parametric Filter Family with a Finite Impulse Response Based on Splines and a Method for Searching for the Optimal Parameter. / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2023. – Vol. 68. – No. 9. – P. 952–959.
3. Budunova, K.A. Digital Frequency-Selective Filters Based on Spectra of Atomic Functions / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko, V.I. Pustovoi // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2019. – Vol. 64. – No. 10. – P. 1095-1100.

4. Budunova, K. A. Truncation Error Bound for the Kravchenko–Kotelnikov Series / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko, V.I. Pustovoyt // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2018. – Vol. 63. – No. 9. – P. 998–1004.

5. Budunova, K.A. On a New Method for Approximation of Squares of Atomic Functions $h_a(x)$ by Nonnegative Rational Fractions / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2021. – Vol. 66. – P. 1252–1265.

6. Будунова, К.А. Обобщение теоремы Кравченко-Котельникова спектрами финитных бесконечно дифференцируемых функций $h_a^{(m)}(x)$ / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт // ДАН РАН. – 2019. – Т. 484. – № 4. – С. 405-409.

7. Будунова, К.А. Параметрическое семейство КИХ-фильтров на основе сплайнов и метод поиска оптимального параметра / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Радиотехника и электроника. – 2023. – Т. 68. – №9. – С. 864-872.

8. Будунова, К.А. Цифровые частотно-избирательные фильтры на основе спектров атомарных функций / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт // Радиотехника и электроника. – 2019. – Т. 64. – № 10. – С. 984-990.

9. Будунова, К.А. Оценка ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт // Радиотехника и электроника. – 2018. – Т. 63. – № 9. – С. 935-941.

10. Будунова, К.А. Атомарные функции $h_a(x)$ в задачах фильтрации / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Физические основы приборостроения. – 2020. – Т. 9. – № 1. – С. 12-26.

11. Будунова, К.А. Повышение точности восстановления QAM-символов при применении метода ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Радиотехника и электроника. – 2024. – Т. 69. – №10. – С. 935-946.

12. Budunova, K.A. Low-pass Filters on Atomic Functions $h_a(x)$ and Their Application in Digital to Analog Conversion / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Физические основы приборостроения. – 2021. – Т. 10. – №1(39). – С. 26-35.

13. Будунова, К.А. Математические методы синтеза частотно-избирательных фильтров / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Физические основы приборостроения. – 2022. – Т. 11. – № 1 (43). – С. 2-21.

14. Будунова, К.А. О новом методе аппроксимации квадратов атомарных функций $h_a(x)$ неотрицательными рациональными дробями / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Радиотехника и электроника. – 2021. – Т. 66. – №11. – С. 1085-1099.

Публикации в трудах конференций

15. Budunova, K.A. Atomic Functions $h_a(x)$ in Digital to Analog Conversion / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Proc. of 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW), Kharkiv, Ukraine. – 2020. – P. 414-417.

16. Budunova, K.A. New Digital Infinite Impulse Response Filters on Atomic Function $h_a(x)$ / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Proc. of Progress In Electromagnetics Research Symposium 2021 in Hangzhou. – 2021. – P. 270-279.

17. Будунова, К.А. Аппроксимация финитных сплайнов и атомарных функций рациональными дробями / К.А. Будунова // Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2019. – Выпуск XII. – С. 23-25.

18. Будунова, К.А. Оценки ошибок усечения для ряда Кравченко-Котельникова и некоторых обобщенных рядов на его основе / К.А. Будунова // Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2018. – Выпуск XI. – С. 19-22.

19. Будунова, К.А. Новое семейство финитных бесконечно дифференцируемых функций $h_a^{(m)}(x)$ и обобщение теоремы Кравченко-Котельникова / К.А. Будунова // Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2017. – выпуск X. – С. 26-30.

20. Будунова, К.А. Дробно-рациональная аппроксимация квадратов атомарных функций с помощью формулы Коши / К.А. Будунова // Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2020. – выпуск XIII. – С. 32-34.

21. Будунова, К.А. Параметрическое семейство КИХ-фильтров на основе сплайнов и поиск оптимального параметра / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Сборник тезисов конференции "Актуальные проблемы электродинамики", Москва, 28-29 марта 2023. – 2023. – С. 38-40.

22. Будунова, К.А. Методы синтеза фильтров низких частот на основе атомарных функций / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2023. – выпуск XVI. – С. 26-30.

23. Budunova, K.A. Application of atomic and R-functions in numerical methods for inversion of the Radon transform / K.A. Budunova, Y.Y. Konovalov, O.V. Kravchenko // Proc. of 2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS), St. Petersburg. – 2017. – P. 1641-1649.