

Минобрнауки России
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ
им. В.А. КОТЕЛЬНИКОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН)

На правах рукописи



БУДУНОВА КРИСТИНА АНДРЕЕВНА

АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ
И ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Специальность 1.3.4 – «Радиофизика»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук, профессор
Кравченко Виктор Филиппович

Москва, 2025 г.

Содержание

Введение	3
Глава 1. Ряд Кравченко-Котельникова и оценка его погрешности усечения	
1.1. Атомарные функции $h_a(x)$	12
1.2. Ряд Кравченко-Котельникова.....	15
1.3. Оценки ошибки усечения для разложения Кравченко-Котельникова	17
1.4. Ошибка усечения ряда, полученного в результате замены функции $F_a(t)$ частичным произведением	22
1.5. Обобщения оценок погрешности усечения для асимметричной суммы	26
1.6. Оценки для произвольных значений переменной t	26
1.7. Обсуждение результатов.....	27
1.8. Ряд Кравченко-Котельникова как теоретическая основа методов фильтрации сигналов.....	28
Выводы к главе 1	29
Глава 2. Цифровые КИХ-фильтры на основе спектров атомарных функций	
2.1. Введение	30
2.2. Цифровые фильтры с ИХ на основе спектров функций $h_a(x)$	31
2.3. Цифровые фильтры на основе сумм сдвигов функции $h_a(x)$	32
2.4. Оценка отклонения АЧХ фильтров в полосах пропускания и подавления	34
2.5. Численный эксперимент	36
Выводы к главе 2.....	41
Глава 3. Аналоговые фильтры и цифровые БИХ-фильтры с АЧХ на основе атомарных функций $h_a(x)$	
3.1. Задача построения аналоговых фильтров с АЧХ на основе атомарной функции $h_a(x)$	42
3.2. Поиск действительных дробно-рациональных приближений функции $h_a^2(\omega)$	43

3.3. Теоремы, позволяющие заменить непрерывную задачу дискретной.....	45
3.4. Численный метод аппроксимации неотрицательными рациональными дробями.....	58
3.5. Аналоговые фильтры с АЧХ, аппроксимирующими атомарные функции $h_a(\omega)$	63
3.6. Амплитудно-частотные характеристики на основе других финитных функций	67
3.7. Цифровые БИХ-фильтры с АЧХ на основе атомарных функций $h_a(\omega)$	69
3.8. Численный эксперимент	72
Выводы к главе 3.....	78
Глава 4. Модифицированный метод ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией	
4.1. Введение	80
4.2. Метод ортогонального частотного мультиплексирования.....	81
4.3. Метод OFDM с фильтрацией и его применение при асинхронной передаче данных	82
4.4. Погрешности, возникающие при применении метода OFDM с фильтрацией	85
4.4.1. Погрешность, вызываемая фильтрацией OFDM-символа с циклическим префиксом и усечением полученной последовательности.....	85
4.4.2. Погрешность, вносимая соседними по времени символами	88
4.4.3. Погрешность, возникающая при фильтрации сигналов из других субполос	90
4.5. Повышение точности метода OFDM с фильтрацией.....	92
4.6. Оконные фильтры и фильтры на основе атомарных функций в модифицированном методе OFDM с фильтрацией.....	103
Выводы к главе 4.....	109
Заключение.....	111
Список литературы	113

ВВЕДЕНИЕ

АКТУАЛЬНОСТЬ И СТЕПЕНЬ РАЗРАБОТАННОСТИ ТЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона о восстановлении сигнала с финитным спектром по отсчетам – одно из наиболее фундаментальных утверждений теоретической радиотехники [3]. Возможность представления сигнала набором его дискретных значений сыграла ключевую роль в развитии методов передачи цифровой информации. В разное время были предложены всевозможные обобщения ряда отсчетов [9,30,36,38]. Область применения обобщенных теорем обширна, она включает в себя обработку сигналов и изображений различной физической природы, теорию связи, радиоастрономию, численный анализ, математическую физику, биомедицину [24,30,31,34,43].

Ряд отсчетов выступает теоретической базой методов фильтрации цифровых и непрерывных сигналов. Процесс цифро-аналогового преобразования (ЦАП) с применением аналоговых фильтров низких частот (ФНЧ) представляет собой практическую реализацию идеи теоремы отсчетов. Устройства ЦАП являются компонентами современных систем радиосвязи и управления [22,25,26].

Частотно-избирательные фильтры в радиопередающих устройствах позволяют очистить передаваемый сигнал от спектральных составляющих, частоты которых выходят за заданную полосу излучения и создают помехи другим радиосредствам. В радиоприемниках с помощью фильтров осуществляется избирательный прием нужного сигнала и ослабление помех, идущих от сторонних радиостанций [11].

Цифровые ФНЧ являются элементами интерполяторов и дециматоров – фильтров, выполняющих преобразование частоты дискретизации в системах многоскоростной обработки сигналов (МОС) [5,44]. Принципы МОС снижают требования к вычислительной производительности при проектировании радиотехнических и телекоммуникационных систем [4].

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) многих классических цифровых и аналоговых ФНЧ аппроксимируют прямоугольный импульс – модуль

спектра базисных функций разложения Уиттекера-Котельникова-Шеннона. С разрывностью функции прямоугольного импульса связан известный недостаток ряда отсчетов – медленная сходимость.

Одним из обобщений ряда отсчетов является разложение Кравченко-Котельникова [15]. Базисные функции данного разложения – сдвиги спектров $F_a(t)$ бесконечно дифференцируемых финитных атомарных функций $h_a(x)$ [14,15]. Вследствие бесконечной гладкости $h_a(x)$ функции $F_a(t)$ быстро затухают. Благодаря этому свойству разложение Кравченко-Котельникова имеет преимущество перед рядом Уиттекера-Котельникова-Шеннона, заключающееся в лучшем качестве восстановления сигнала по усеченной выборке отсчетов. Теорема о реконструкции сигнала спектрами атомарных функций была выдвинута в [10]. Рассматривались приложения ряда Кравченко-Котельникова и его обобщений в задачах восстановления многомерных сигналов [13], синтеза диаграммы направленности антенны [10,12,15], реконструкции томографических изображений [32]. Эффективность ряда была показана экспериментально, однако не было проведено теоретических исследований его свойств, в частности, не было возможности оценивать важнейшую характеристику ряда – ошибку усечения.

Наиболее естественное приложение теоремы Кравченко-Котельникова – разработка цифровых и непрерывных фильтров на основе функций $h_a(x)$. Идея синтеза фильтра с АЧХ, приближенно равной функции $h_a(x)$, обсуждалась в [20], но фильтры построены не были. Построение алгоритмов фильтрации на основе ряда Кравченко-Котельникова является актуальной проблемой, решение которой позволит повысить эффективность обработки сигналов в радиотехнических системах.

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью настоящей работы является разработка методов синтеза цифровых и непрерывных фильтров с АЧХ, приближенно равной атомарной функции $h_a(x)$, а также проверка эффективности их применения в ряде алгоритмов.

В процессе исследования решаются следующие задачи:

1. Построение аналитического выражения, позволяющего оценивать сверху модуль погрешности усечения ряда Кравченко-Котельникова.
2. Определение коэффициентов цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ) и с АЧХ, аппроксимирующей функцию $h_a(x)$ и сумму сдвигов $h_a(x)$.
3. Вывод оценок отклонений АЧХ КИХ-фильтров на основе функций $h_a(x)$.
4. Разработка численного метода, позволяющего строить неотрицательные дробно-рациональные приближения функций $h_a^2(x)$.
5. Построение аналоговых фильтров с АЧХ, приближающейся по форме к функции $h_a(x)$. Синтез цифровых фильтров с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ) на основе полученных аналоговых прототипов.
6. Моделирование процесса ЦАП с применением аналогового фильтра на основе функции $h_a(x)$.
7. Проверка эффективности применения КИХ- и БИХ-фильтров на основе атомарных функций в задаче повышения частоты дискретизации цифрового сигнала.
8. Анализ метода ортогонального частотного мультиплексирования (orthogonal frequency division multiplexing, OFDM) с фильтрацией и вывод формулы погрешности восстановления символов квадратурной амплитудной модуляции (quadrature amplitude modulation, QAM) для данного метода.
9. Разработка модифицированного алгоритма OFDM с фильтрацией, позволяющего повысить точность восстановления символов QAM-модуляции.
10. Моделирование процесса передачи данных при применении классического и модифицированного алгоритмов OFDM с фильтрацией.
11. Моделирование процесса передачи данных при применении модифицированного алгоритма OFDM с фильтрацией в сочетании с фильтрами на основе атомарных функций.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА

В процессе исследования получены следующие новые результаты:

1. Впервые получена оценка ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова. Из полученной формулы следует, что ошибка, которая возникает при замене бесконечной суммы конечной из $2N + 1$ слагаемых, затухает асимптотически быстрее, чем $O(N^{-\alpha})$, где α – любое положительное число.

2. Представлен оригинальный алгоритм расчета КИХ-фильтров с АЧХ на основе атомарных функций, который дает возможность в явном виде определять коэффициенты их характеристик. Метод синтеза отличается простотой, но при этом применение новых фильтров в некоторых случаях дает лучшие результаты по сравнению с оконными фильтрами.

3. Разработан новый метод аппроксимации, позволяющий находить неотрицательные дробно-рациональные приближения финитных функций с быстро сходящимся рядом Фурье. Метод дает возможность строить устойчивые аналоговые фильтры с АЧХ на основе финитных функций.

4. Впервые синтезированы непрерывные ФНЧ с АЧХ, приближающейся к атомарной функции $h_a(x)$. На основе разработанных аналоговых прототипов построены БИХ-фильтры. Полученные фильтры при небольших значениях параметра a обладают быстро затухающей импульсной характеристикой (ИХ). Данное свойство позволяет применять атомарные фильтры для восстановления сигналов по неполным выборкам отсчетов.

5. Получена новая формула погрешности, образующейся при применении метода OFDM с фильтрацией для передачи символов QAM-модуляции.

6. Предложен основанный на свойствах циклической свертки модифицированный алгоритм OFDM с фильтрацией, позволяющий восстанавливать QAM-символы с меньшей погрешностью по сравнению с классическим алгоритмом. При проведении численного эксперимента

модифицированный метод OFDM с фильтрацией обеспечил качественное восстановление данных для схем высокого порядка QAM 1024 и QAM 4096.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ

Полученная оценка ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова будет полезна при практическом применении обобщенной теоремы отсчетов на основе атомарных функций в задачах обработки сигналов и изображений. Предложенный в работе алгоритм приближения финитных функций рациональными дробями дает возможность развить новые методы синтеза аналоговых фильтров с заданной формой АЧХ.

Фильтры на основе атомарных функций благодаря эффективности их использования в алгоритмах ЦАП и МОС могут найти применение в методах обработки сигналов в системах беспроводной связи и телевизионного вещания. Модифицированный метод OFDM с фильтрацией позволит улучшить качество передачи данных по сетям мобильной связи.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для построения оценки ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова, вывода неравенства для отклонений новых цифровых КИХ-фильтров, разработки численного метода дробно-рациональной аппроксимации квадратов функций $h_a(x)$ использовались методы математического анализа и теории оптимизации. Синтез БИХ-фильтров выполнялся алгоритмами инвариантной ИХ и билинейного преобразования. При анализе погрешности метода OFDM с фильтрацией, а также при проведении численных экспериментов, связанных с цифровой обработкой сигналов, применялись методы теории дискретных линейных систем.

ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Теоремы об оценке ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова. Оценка погрешности усечения в случае замены в разложении функции $F_a(t)$ произведением конечного числа сомножителей.

2. Алгоритм вычисления коэффициентов КИХ-фильтров с АЧХ на основе атомарных функций $h_a(x)$, имеющими заданные полосы пропускания и подавления. Оценка отклонения АЧХ построенных КИХ-фильтров.

3. Метод дробно-рациональной аппроксимации финитных функций с быстро сходящимся рядом Фурье, дающий возможность получать устойчивые аналоговые фильтры с АЧХ, приближающимися по форме к финитным функциям. Синтез аналоговых и цифровых БИХ-фильтров на основе атомарной функции $h_a(x)$.

4. Анализ погрешности, образующейся при применении метода OFDM с фильтрацией для передачи символов QAM-модуляции. Модифицированный алгоритм OFDM с фильтрацией, позволяющий снизить погрешность восстановления QAM-символов.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

По результатам исследования опубликованы 5 статей в журналах, индексируемых в системе Scopus, 6 статей в журналах, входящих в «белый список» научных журналов, 3 статьи в журналах из перечня ВАК. Автором представлено также 9 докладов на всероссийских и международных конференциях.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Budunova, K.A. A Generalization of the Kravchenko–Kotelnikov Theorem by Spectra of Compactly Supported Infinitely Differentiable Functions $h_a^{(m)}(x)$ / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko, V.I. Pustovoi // Doklady Mathematics. – 2019. – Vol. 99. – No. 1. – P. 104-107.

2. Budunova, K.A. Parametric Filter Family with a Finite Impulse Response Based on Splines and a Method for Searching for the Optimal Parameter. / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2023. – Vol. 68. – No. 9. – P. 952–959.

3. Budunova, K.A. Digital Frequency-Selective Filters Based on Spectra of Atomic Functions / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko, V.I. Pustovoyt // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2019. – Vol. 64. – No. 10. – P. 1095-1100.

4. Budunova, K. A. Truncation Error Bound for the Kravchenko–Kotelnikov Series / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko, V.I. Pustovoyt // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2018. – Vol. 63. – No. 9. – P. 998–1004.

5. Budunova, K.A. On a New Method for Approximation of Squares of Atomic Functions $h_a(x)$ by Nonnegative Rational Fractions / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2021. – Vol. 66. – P. 1252–1265.

6. Будунова, К.А. Обобщение теоремы Кравченко-Котельникова спектрами финитных бесконечно дифференцируемых функций $h_a^{(m)}(x)$ / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт // ДАН РАН. – 2019. – Т. 484. – № 4. – С. 405-409.

7. Будунова, К.А. Параметрическое семейство КИХ-фильтров на основе сплайнов и метод поиска оптимального параметра / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Радиотехника и электроника. – 2023. – Т. 68. – №9. – С. 864-872.

8. Будунова, К.А. Цифровые частотно-избирательные фильтры на основе спектров атомарных функций / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт // Радиотехника и электроника. – 2019. – Т. 64. – № 10. – С. 984-990.

9. Будунова, К.А. Оценка ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт // Радиотехника и электроника. – 2018. – Т. 63. – № 9. – С. 935-941.

10. Будунова, К.А. Атомарные функции $h_a(x)$ в задачах фильтрации / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Физические основы приборостроения. – 2020. – Т. 9. – № 1. – С. 12-26.

11. Будунова, К.А. Повышение точности восстановления QAM-символов при применении метода ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Радиотехника и электроника. – 2024. – Т. 69. – №10. – С. 935-946.

12. Budunova, K.A. Low-pass Filters on Atomic Functions $h_a(x)$ and Their Application in Digital to Analog Conversion / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Физические основы приборостроения. – 2021. – Т. 10. – №1(39). – С. 26-35.

13. Будунова, К.А. Математические методы синтеза частотно-избирательных фильтров / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Физические основы приборостроения. – 2022. – Т. 11. – № 1 (43). – С. 2-21.

14. Будунова, К.А. О новом методе аппроксимации квадратов атомарных функций $h_a(x)$ неотрицательными рациональными дробями / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Радиотехника и электроника. – 2021. – Т. 66. – №11. – С. 1085-1099.

15. Budunova, K.A. Atomic Functions $h_a(x)$ in Digital to Analog Conversion / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Proc. of 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW), Kharkiv, Ukraine. – 2020. – P. 414-417.

16. Budunova, K.A. New Digital Infinite Impulse Response Filters on Atomic Function $h_a(x)$ / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Proc. of Progress In Electromagnetics Research Symposium 2021 in Hangzhou. – 2021. – P. 270-279.

17. Будунова, К.А. Аппроксимация финитных сплайнов и атомарных функций рациональными дробями / К.А. Будунова // Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2019. – Выпуск XII. – С. 23-25.

18. Будунова, К.А. Оценки ошибок усечения для ряда Кравченко-Котельникова и некоторых обобщенных рядов на его основе / К.А. Будунова // Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2018. – Выпуск XI. – С. 19-22.

19. Будунова, К.А. Новое семейство финитных бесконечно дифференцируемых функций $h_a^{(m)}(x)$ и обобщение теоремы Кравченко-Котельникова / К.А. Будунова // Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2017. – выпуск X. – С. 26-30.

20. Будунова, К.А. Дробно-рациональная аппроксимация квадратов атомарных функций с помощью формулы Коши / К.А. Будунова // Труды

РНТОРЭС им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2020. – выпуск XIII. – С. 32-34.

21. Будунова, К.А. Параметрическое семейство КИХ-фильтров на основе сплайнов и поиск оптимального параметра / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Сборник тезисов конференции "Актуальные проблемы электродинамики", Москва, 28-29 марта 2023. – 2023. – С. 38-40.

22. Будунова, К.А. Методы синтеза фильтров низких частот на основе атомарных функций / К.А. Будунова, В.Ф. Кравченко // Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова, серия Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2023. – выпуск XVI. – С. 26-30.

23. Budunova, K.A. Application of atomic and R functions in numerical methods for inversion of the Radon transform / K.A. Budunova, Y.Y. Konovalov, O.V. Kravchenko // Proc. of 2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS), St. Petersburg. – 2017. – P. 1641-1649.

ЛИЧНЫЙ ВКЛАД

Автору принадлежат формулировки и доказательства теорем об оценках ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова, формулы вычисления коэффициентов КИХ-фильтров низких частот на основе атомарных функций, разработка численного метода дробно-рациональной аппроксимации финитных функций с быстро сходящимся рядом Фурье и теоретическое обоснование данного метода, модификация алгоритма OFDM с фильтрацией. Научному руководителю принадлежит постановка целей и задач исследования.

ОБЪЕМ И СТРУКТУРА РАБОТЫ

Основные разделы диссертации включают: введение, четыре главы, заключение, список литературы. Работа содержит 117 страниц, 21 рисунок, 13 таблиц и список литературы из 46 наименований.

Глава 1. Ряд Кравченко-Котельникова и оценка его погрешности усечения

1.1. Атомарные функции $h_a(x)$

Атомарные функции – финитные, бесконечно гладкие решения функционально-дифференциальных уравнений [15]

$$Lf(x) = \lambda \sum_{k=1}^M c_k f(ax - b_k), \quad (1.1)$$

где L – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, a – параметр сжатия, $|a| > 1$, b_k – параметры сдвига, c_k – весовые коэффициенты. Действительные числа a , b_k , c_k могут быть заданы произвольно, а множитель λ определяется из условия разрешимости уравнения (1.1) для данного набора параметров.

Атомарные функции используются в методах обработки сигналов и изображений, задачах анализа и синтеза антенн, интегральной геометрии, при решении уравнений механики, гидро- и электродинамики [14,15].

Наиболее известной является атомарная функция $ur(x)$, задаваемая как финитное решение уравнения

$$f'(x) = 2(f(2x + 1) - f(2x - 1))$$

с условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (1.2)$$

Параметрическое семейство атомарных функций $h_a(x)$ – множество финитных решений более общего уравнения

$$f'(x) = \frac{a^2}{2}(f(ax + 1) - f(ax - 1)), \quad a > 1 \quad (1.3)$$

с дополнительным условием (1.2). Носитель функции $h_a(x)$ – отрезок $\left[-\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right]$. Функция $up(x)$ совпадает с $h_a(x)$ при $a = 2$. Полезным свойством, выполняющимся для множества параметров $a > 2$, является равенство $h_a(x)$ константе на центральном участке носителя

$$h_a(x) \equiv \frac{a}{2}, \quad |x| < \frac{a-2}{a(a-1)}.$$

Графики функций $h_a(x)$ для некоторых значений параметра a показаны на рисунке 1.

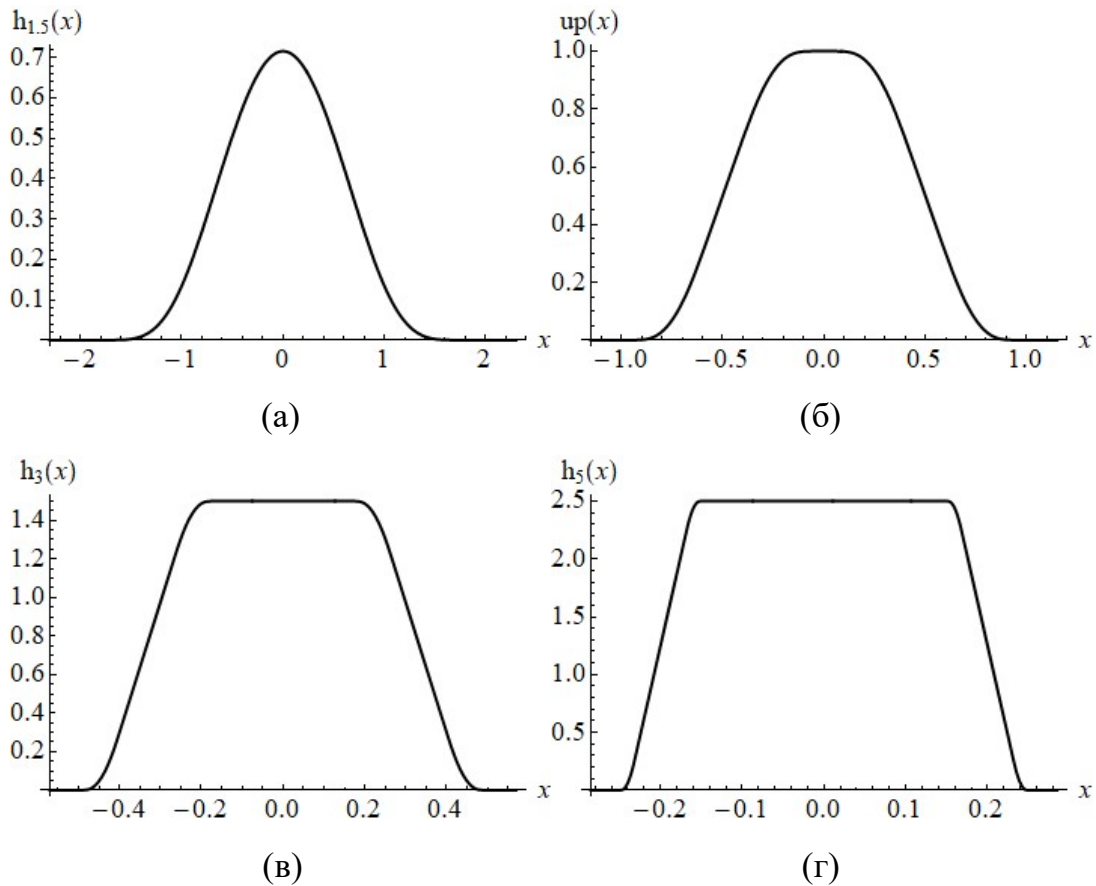


Рисунок 1 – Графики атомарных функций $h_a(x)$ для различных значений параметра a . Функции $h_{1.5}(x)$ (а), $h_2(x) = up(x)$ (б), $h_3(x)$ (в) и $h_5(x)$ (г).

Спектр $F_a(\omega)$ функции $h_a(x)$ задается бесконечным произведением

$$F_a(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{a^k}\right). \quad (1.4)$$

Интеграл Фурье функции $h_a(x)$ определяется формулой

$$h_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F_a(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Атомарная функция $h_a(x)$ может быть представлена бесконечной сверткой прямоугольных импульсов переменной длины

$$h_a(x) = \left(\frac{a}{2} B_0\left(\frac{ax}{2}\right)\right) * \dots * \left(\frac{a^k}{2} B_0\left(\frac{a^k x}{2}\right)\right) * \dots,$$

где

$$B_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2, \\ 1/2, & |x| = 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

Разложение $h_a(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$h_a(x) = (a-1) \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} F_a((a-1)\pi m) \cos((a-1)\pi m x) \right). \quad (1.5)$$

Скорость сходимости суммы (1.5) зависит от параметра – она возрастает при значениях a , близких к единице, и снижается при увеличении a . Приближения ряда (1.5) используют для практического вычисления функции $h_a(x)$:

$$h_a(x) \approx (a-1) \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^M P^{(K)}(a, (a-1)\pi m) \cos((a-1)\pi m x) \right). \quad (1.6)$$

В (1.6) $P_K(a, \omega)$ – частичные произведения, аппроксимирующие функцию $F_a(\omega)$:

$$P_K(a, \omega) = \prod_{k=1}^K \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{a^k}\right). \quad (1.7)$$

Выбор конечных чисел M, K в формуле (1.6) определяется величиной параметра a и требованиями к погрешности приближения.

1.2. Ряд Кравченко-Котельникова

Теорема отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона является важным утверждением, задающим связь между дискретными и непрерывными сигналами. Согласно теореме, сигнал $f(t)$ с финитным преобразованием Фурье $F(\omega)$ может быть точно восстановлен по набору своих равноотстоящих отсчетов $\{f(k\Delta)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с помощью разложения

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right), \quad (1.8)$$

где Δ – шаг дискретизации, удовлетворяющий условию

$$\Delta \leq \frac{\pi}{\Omega}. \quad (1.9)$$

Число Ω в (1.9) таково, что $F(\omega) = 0$ вне отрезка $\omega \in [-\Omega, \Omega]$.

Ряд Уиттекера-Котельникова-Шеннона и его обобщения лежат в основе множества методов восстановления и интерполяции сигналов [36,38]. Формула (1.8) применяется во многих областях науки, в частности, в радиофизике, биомедицине, оптике, математической физике [24,30,31,34,43] и др.

Настоящая работа посвящена исследованию и развитию приложений обобщения формулы (1.8) спектрами атомарных функций $h_a(x)$. Формула вида

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta) F_a \left(\frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right) \quad (1.10)$$

носит название ряда Кравченко-Котельникова [15,19]. В (1.10) $F_a(t)$ – спектр $h_a(x)$, определяемый бесконечным произведением (1.4). Функция $f(t)$ может быть разложена в ряд (1.10) при выполнении условий

$$a > 2, \quad \Delta \leq \frac{\pi}{\Omega} \frac{a-2}{a-1}. \quad (1.11)$$

На практике при восстановлении сигнала по отсчетам ограничиваются суммами конечного числа слагаемых. При этом возникает ошибка усечения $\varepsilon_N(t)$,

равная

$$\varepsilon_N(t) = \sum_{|k|>N} f(k\Delta) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta}(t - k\Delta)\right) \quad (1.12)$$

для ряда (1.8) и

$$\varepsilon_N(t) = \sum_{|k|>N} f(k\Delta) F_a\left(\frac{a\pi}{\Delta}(t - k\Delta)\right) \quad (1.13)$$

для (1.9). Полезное свойство разложения Кравченко-Котельникова заключается в том, что при реконструкции по формулам (1.8), (1.10) сигнала по отсчетам, взятым с одинаковым шагом, величина (1.13) принимает значения значительно меньшие, чем (1.12). Пример полученных при восстановлении с помощью рядов (1.8) и (1.10) ошибок усечения приводится на рисунке 2. Малые значения погрешности усечения (1.13) обеспечиваются быстрым затуханием базисных функций ряда (1.10) (рисунок 3).

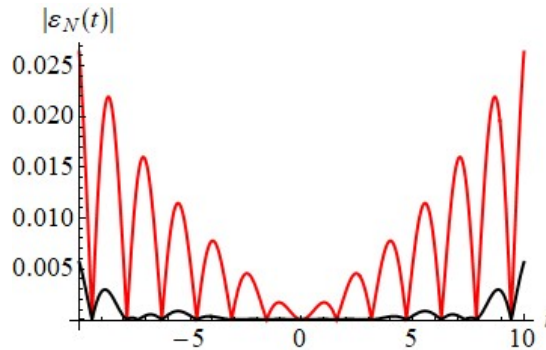


Рисунок 2 – Модули $|\varepsilon_N(t)|$ погрешностей усечения, полученных при восстановлении сигнала $\operatorname{sinc}^2(t/2) + 1$ с помощью формул (1.8) (красная линия) и (1.10) при $a = 3$ (черная линия). Шаг между отсчетами Δ равен $\pi/2$.

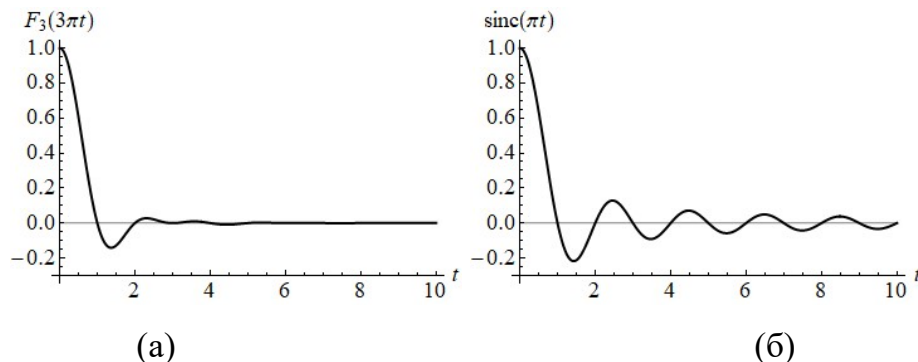


Рисунок 3 – Графики базисных функций рядов (1.10) (а) и (1.8) (б).

Помимо формулы (1.10) имеются обобщения ряда Уиттекера-Котельникова-Шеннона спектрами атомарных функций $\text{up}(x)$ и $\text{fur}_n(x)$ [16,18]. Эффективность использования разложений на основе преобразований Фурье атомарных функций была показана на примерах решения задач восстановления многомерных сигналов [13], синтеза диаграммы направленности антенны [10,12,15], реконструкции томографических изображений [32]. Перспективным является применение данных рядов и в других задачах, где используется теорема отсчетов.

1.3. Оценка ошибки усечения для ряда Кравченко-Котельникова

Вывод формулы оценки ошибки усечения ряда (1.10) основан на построении функции, мажорирующей модуль $|F_a(t)|$ спектра атомарной функции $h_a(x)$. Для всех действительных t справедливо

$$|F_a(t)| = \left| \prod_{l=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{t}{a^l}\right) \right| = \left| \prod_{l=1}^k \text{sinc}\left(\frac{t}{a^l}\right) \right| \cdot \left| F_a\left(\frac{t}{a^k}\right) \right| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $|F_a(t)| \leq 1$, отсюда следует неравенство

$$|F_a(t)| \leq \prod_{l=1}^k \frac{a^l}{|t|}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.14)$$

Из формулы (1.14) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} |F_a(a\pi(t+k))|, \quad N \geq 1,$$

при любом фиксированном $t \in (-1, 1)$.

Пусть n – некоторое натуральное число и $|t| \in (a^n, a^{n+1}]$. Можно заметить, что для любого натурального $m \neq n$ выполняются соотношения

$$\prod_{l=1}^n \frac{a^l}{|t|} < \prod_{l=1}^m \frac{a^l}{|t|}, \quad m < n, \quad (1.15)$$

$$\prod_{l=1}^n \frac{a^l}{|t|} \leq \prod_{l=1}^m \frac{a^l}{|t|}, \quad m > n, \quad (1.16)$$

и, таким образом

$$\prod_{l=1}^n \frac{a^l}{|t|} = \min_{k \in \mathbb{N}} \prod_{l=1}^k \frac{a^l}{|t|}, \quad |t| \in (a^n, a^{n+1}].$$

Используя равенство для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{l=1}^n l = C_{n+1}^{n-1} = \frac{1}{2}n(n+1),$$

получим

$$\prod_{l=1}^n \frac{a^l}{|t|} = \frac{1}{|t|^n} a^{n(n+1)/2}.$$

Зададим на множестве $t > a$ функцию

$$\nu(t) = \begin{cases} [\log_a t], & \{\log_a t\} \neq 0, \\ \log_a t - 1, & \{\log_a t\} = 0. \end{cases}$$

Функция $G_a(t)$, определяемая формулой

$$G_a(t) = a^{\nu(t)(\nu(t)+1)/2} t^{-\nu(t)}, \quad (1.17)$$

удовлетворяет на интервале $t > a$ неравенству

$$|F_a(t)| \leq G_a(t) \quad (1.18)$$

и обладает следующими свойствами:

1. Функция $G_a(t)$ кусочно непрерывна, причем

$$G_a(t) = a^{n(n+1)/2} t^{-n}, \quad t \in (a^n, a^{n+1}], \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Из свойства 1 и соотношений (1.15), (1.16) следует, что $G_a(t)$ монотонно убывает.

3. Для всех $t > a^2$ выполняется

$$G_a(t) \leq a^3 t^{-2}. \quad (1.19)$$

4. Из (1.19) вытекает, что ряд

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau + k)), \quad N \geq 1,$$

и интеграл

$$\int_{N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau + y))dy \quad (1.20)$$

сходятся при любом $\tau \in (-1, 1)$.

Докажем теорему об оценке погрешности (1.13).

Теорема 1.1. Погрешность усечения $\varepsilon_N(t)$ (1.13) для всех $N \geq 1$, $|t| < \Delta$ удовлетворяет соотношению

$$|\varepsilon_N(t)| \leq M \left(\Psi \left(N - \frac{t}{\Delta} \right) + \Psi \left(N + \frac{t}{\Delta} \right) \right), \quad (1.21)$$

где $M = \max_{k \in \mathbb{Z}} f(k\Delta)$, а $\Psi(x)$ – кусочная функция вида

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{a}{\pi(x+1)} + 1 + \frac{1}{x+1} \right), \quad x \leq \frac{a}{\pi} - 1, \quad (1.22)$$

$$\Psi(x) = \frac{a^{(\eta(x)-3/2)^2/2}}{a^{1/8} \pi^{\eta(x)-1}} \frac{1}{(x+1)^{\eta(x)-2}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{\eta(x)-2} \right), \quad \frac{a}{\pi} - 1 < x. \quad (1.23)$$

Функция $\eta(x)$ в (1.23) задается формулой

$$\eta(x) = \begin{cases} [\log_a(a^2\pi(x+1))], & \{\log_a(\pi(x+1))\} \neq 0, \\ \log_a(a\pi(x+1)), & \{\log_a(\pi(x+1))\} = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

В (1.24) $[\cdot]$ – целая часть числа, а $\{\cdot\}$ – дробная часть.

Доказательство. Положим

$$R_N(\tau) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} |F_a(a\pi(\tau - k))|, \quad (1.25)$$

где $\tau = t / \Delta$. Тогда, поскольку функция $F_a(t)$ четна,

$$|\varepsilon_N(\tau\Delta)| \leq M(R_N(\tau) + R_N(-\tau)). \quad (1.26)$$

Из (1.18) и (1.26) следует, что

$$R_N(\tau) \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau + k)). \quad (1.27)$$

Оценим правую часть (1.27), используя известное из анализа соотношение для сумм с монотонно убывающими слагаемыми

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau + k)) \leq G_a(a\pi(\tau + N + 1)) + \int_{N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau + y))dy. \quad (1.28)$$

Заметим, что

$$\int_{N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau + y))dy = \frac{1}{a\pi} \int_{a\pi(\tau+N+1)}^{+\infty} G_a(u)du$$

и вычислим интеграл в правой части (1.28).

Число $n_0 = \eta(\tau + N)$ удовлетворяет неравенствам $n_0 \geq 2$ при $a > \pi$ и $n_0 \geq 3$ при $a \leq \pi$. Принимая $m > n_0 \geq 3$, запишем

$$\begin{aligned} \int_{a\pi(\tau+N+1)}^{a^m} G_a(u)du &= \int_{a\pi(\tau+N+1)}^{a^{n_0}} G_a(u)du + \sum_{n=n_0}^{m-1} \int_{a^n}^{a^{n+1}} G_a(u)du = \\ &= a\pi \left(\frac{a^{(n_0-3/2)^2/2}}{a^{1/8}\pi^{n_0-1}(n_0-2)} (t + N + 1)^{2-n_0} - \sum_{n=n_0}^{m-1} \frac{a^{1/8}a^{-(n-3/2)^2/2}}{\pi(n-2)(n-1)} - \frac{a^{1/8}a^{-(m-3/2)^2/2}}{\pi(m-2)} \right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Из сходимости интеграла (1.20) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau + y))dy &= \frac{1}{a\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{a\pi(\tau+N+1)}^{a^m} G_a(u)du = \\ &= \frac{a^{(n_0-3/2)^2/2}}{a^{1/8}\pi^{n_0-1}(n_0-2)} (\tau + N + 1)^{2-n_0} - \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a^{1/8}}{\pi(n-2)(n-1)} a^{-(n-3/2)^2/2}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Если значения параметра a велики, а N – малы (например, $N \leq 3$ и $a = 10$), может выполняться равенство $n_0 = 2$. Легко показать, что в этом случае

$$\int_{N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau + y))dy \leq \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\frac{a}{\pi(\tau + N + 1)} \right) + 1 \right). \quad (1.31)$$

Учитывая, что первое слагаемое в правой части (1.28) равно

$$G_a(a\pi(\tau + N + 1)) = \frac{a^{(n_0-3/2)^2/2}}{a^{1/8}\pi^{n_0-2}}(\tau + N + 1)^{1-n_0},$$

получим оценку

$$R_N(\tau) \leq \Psi(N + \tau). \quad (1.32)$$

Из (1.26) и (1.32) следует неравенство (1.21).

Докажем еще одну теорему, дающую оценку величины $|\varepsilon_N(t)|$ в более простом виде.

Теорема 1.2. Ошибка усечения $\varepsilon_N(t)$ ряда (1.10) при $|t| \leq \Delta$ и $N > a/\pi$ удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_N(t)| \leq 2M\pi^{-\log_a \sqrt{a\pi}} N^{-\log_a(\pi^2 a^{-1}N)/2} \left(\frac{1}{\eta(N-1)-2} + N^{-1} \right). \quad (1.33)$$

Доказательство. Пусть по-прежнему $n_0 = \eta(N + \tau)$. Число n_0 можно представить в виде

$$n_0 = \log_a(a^2\pi(\tau + N + 1)) - \alpha,$$

где $\alpha \in (0, 1]$. Отсюда

$$\frac{a^{(n_0-3/2)^2/2}}{a^{1/8}\pi^{n_0-1}} \frac{1}{(\tau + N + 1)^{n_0-2}} = (\tau + N + 1)^{-\log_a(\pi^2 a^{-1}(\tau+N+1))/2} \cdot a^{-\log_a^2(\sqrt{a\pi})/2 + (1/2-\alpha)^2/2}. \quad (1.34)$$

Из (1.23) и (1.34) при $|\tau| < 1$ получим

$$\Psi(N + \tau) \leq \pi^{-\log_a \sqrt{a\pi}} N^{-\log_a(\pi^2 a^{-1}N)/2} \left(\frac{1}{\eta(N-1)-2} + N^{-1} \right), \quad (1.35)$$

если $N > a/\pi$. Оценка (1.35) остается верной, если $\Psi(N + \tau)$ в левой части заменить на $\Psi(N - \tau)$, откуда и следует неравенство (1.33).

Значения оценок (1.21) и (1.33) приводятся в таблицах 1 и 2.

Таблица 1 – Значения оценки (1.21) ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова для различных a в точке $t = \Delta / 2$ в зависимости от величины числа N при условии $M = 1$.

a	N						
	5	10	20	50	100	200	500
2.5	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$9.6 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$	$2.51 \cdot 10^{-8}$	$3.26 \cdot 10^{-10}$	$4.55 \cdot 10^{-13}$
3	$3.31 \cdot 10^{-2}$	$4.84 \cdot 10^{-3}$	$6.18 \cdot 10^{-4}$	$1.54 \cdot 10^{-5}$	$5.96 \cdot 10^{-7}$	$1.87 \cdot 10^{-8}$	$7.39 \cdot 10^{-11}$
5	$1.99 \cdot 10^{-1}$	$3.97 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$8.54 \cdot 10^{-4}$	$1.07 \cdot 10^{-4}$	$9.97 \cdot 10^{-6}$	$2.55 \cdot 10^{-7}$
7	$2.78 \cdot 10^{-1}$	$1.41 \cdot 10^{-1}$	$2.75 \cdot 10^{-2}$	$4.42 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$6.44 \cdot 10^{-6}$
10	$3.98 \cdot 10^{-1}$	$2.01 \cdot 10^{-1}$	$1.01 \cdot 10^{-1}$	$1.29 \cdot 10^{-2}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$	$8.06 \cdot 10^{-4}$	$5.48 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2 – Значения оценки (1.33) ошибки усечения ряда Кравченко-Котельникова для различных a в зависимости от величины числа N при условии $M = 1$.

a	N						
	5	10	20	50	100	200	500
2.5	$2.14 \cdot 10^{-2}$	$2.36 \cdot 10^{-3}$	$1.31 \cdot 10^{-4}$	$1.53 \cdot 10^{-6}$	$2.91 \cdot 10^{-8}$	$3.43 \cdot 10^{-10}$	$4.68 \cdot 10^{-13}$
3	$5.59 \cdot 10^{-2}$	$6.92 \cdot 10^{-3}$	$7.91 \cdot 10^{-4}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$6.92 \cdot 10^{-7}$	$2.04 \cdot 10^{-8}$	$8.39 \cdot 10^{-11}$
5	$2.87 \cdot 10^{-1}$	$5.34 \cdot 10^{-2}$	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$1.02 \cdot 10^{-5}$	$3.13 \cdot 10^{-7}$
7	$4.31 \cdot 10^{-1}$	$1.85 \cdot 10^{-1}$	$3.39 \cdot 10^{-2}$	$5.81 \cdot 10^{-3}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$7.65 \cdot 10^{-6}$
10	$5.83 \cdot 10^{-1}$	$2.97 \cdot 10^{-1}$	$1.28 \cdot 10^{-1}$	$1.61 \cdot 10^{-2}$	$4.39 \cdot 10^{-3}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	$6.6 \cdot 10^{-5}$

1.4. Ошибка усечения ряда, полученного в результате замены функции

$F_a(t)$ частичным произведением

На практике бесконечное произведение $F_a(t)$ в разложении (1.10) заменяется конечным $P_K(a, t)$

$$F_a(t) \approx P_K(a, t), \quad P_K(a, t) = \prod_{l=1}^K \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a^l}\right),$$

где $K \geq 2$ – натуральное число.

Ряд вида [10,18]

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta) P_K \left(a, \frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right), \quad (1.36)$$

как и (1.10), обеспечивает точное восстановление сигнала $f(x)$ с финитным преобразованием Фурье $F(\omega)$, $F(\omega) = 0$, $\omega > \Omega$. Требования к шагу Δ и параметру a определяются неравенствами

$$a(1 + a^{-K}) > 2, \quad \Delta \leq \frac{\pi}{\Omega} \frac{a(1 + a^{-K}) - 2}{a - 1}.$$

Ошибка усечения $\varepsilon_N(t)$ суммы (1.36) задается формулой

$$\varepsilon_N(t) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} f(k\Delta) P_K \left(a, \frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right) + \sum_{k=-\infty}^{-N-1} f(k\Delta) P_K \left(a, \frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right). \quad (1.37)$$

Ниже доказывается теорема об оценке величины (1.37).

Теорема 1.3. Пусть $K \geq 2$, $|t| < \Delta$ и $\varepsilon_N(t)$ – погрешность усечения разложения (1.36), заданная формулой (1.37). Тогда величина $|\varepsilon_N(t)|$ удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_N(t)| \leq M \left[\Phi \left(N - \frac{t}{\Delta} \right) + \Phi \left(N + \frac{t}{\Delta} \right) \right], \quad (1.38)$$

где $\Phi(x)$ – кусочная функция, определяемая выражениями:

1. При $x \leq \frac{a}{\pi} - 1$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{a}{\pi(x+1)} + 1 + \frac{1}{x+1} \right); \quad (1.39)$$

2. При $\frac{a}{\pi} - 1 < x \leq \frac{a^{K-1}}{\pi} - 1$

$$\Phi(x) = \frac{a^{\frac{1}{2}(\eta(x)-3/2)^2}}{a^{\frac{1}{8}} \pi^{\eta(x)-1}} \frac{1}{(x+1)^{\eta(x)-2}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{\eta(x)-2} \right); \quad (1.40)$$

3. При $\frac{a^{K-1}}{\pi} - 1 < x$

$$\Phi(x) = \frac{a^{\frac{1}{2}(K-1/2)^2}}{a^{\frac{1}{8}\pi^K}} \frac{1}{(x+1)^{K-1}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{K-1} \right). \quad (1.41)$$

Доказательство. Положим

$$R_N(\tau) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} |P_K(a, a\pi(\tau+k))|$$

Для произведения $P_K(a, t)$ верно неравенство

$$|P_K(a, t)| \leq G_a(t),$$

где

$$G_a(t) = \begin{cases} a^{n(n+1)/2} t^{-n}, & t \in (a^n, a^{n+1}], \quad n = 1, \dots, K-1, \\ a^{K(K+1)/2} t^{-K}, & a^K < t. \end{cases}$$

Оценим $R_N(\tau)$ с помощью формулы

$$R_N(\tau) \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau+k)) \leq G_a(a\pi(\tau+N+1)) + \int_{N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau+y)) dy \quad (1.42)$$

и рассмотрим интеграл

$$\int_{N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(\tau+y)) dy = \frac{1}{a\pi} \int_{a\pi(\tau+N+1)}^{+\infty} G_a(u) du.$$

Для различных значений числа $n_0 = \eta(N + \tau)$ возможны следующие случаи.

1. При $2 < n_0 < K$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a\pi} \int_{a\pi(\tau+N+1)}^{+\infty} G_a(u) du &= \frac{1}{a\pi} \left(\int_{a\pi(\tau+N+1)}^{a^{n_0}} G_a(u) du + \sum_{n=n_0}^{K-1} \int_{a^n}^{a^{n+1}} G_a(u) du + \int_{a^K}^{+\infty} G_a(u) du \right) = \\ &= \frac{a^{(n_0-3/2)^2/2}}{a^{1/8} \pi^{n_0-1} (n_0-2)} (\tau+N+1)^{2-n_0} - \sum_{n=n_0}^K \frac{a^{1/8}}{\pi(n-2)(n-1)} a^{-(n-3/2)^2/2}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

2. Если $n_0 = K$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{a\pi} \int_{a\pi(\tau+N+1)}^{+\infty} G_a(u) du &= \frac{1}{a\pi} \left(\int_{a\pi(\tau+N+1)}^{a^K} G_a(u) du + \int_{a^K}^{+\infty} G_a(u) du \right) = \\ &= \frac{a^{(n_0-3/2)^2/2}}{a^{1/8} \pi^{n_0-1} (n_0-2)} (\tau+N+1)^{2-n_0} - \frac{a^{1/8}}{\pi(K-2)(K-1)} a^{-(K-3/2)^2/2}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

3. При $n_0 > K$

$$\frac{1}{a\pi} \int_{a\pi(\tau+N+1)}^{+\infty} G_a(u) du = \frac{a^{(K-1/2)^2/2}}{a^{1/8} \pi^K (K-1)} (\tau+N+1)^{1-K}. \quad (1.45)$$

4. В случае $n_0 = 2$ легко доказать неравенство

$$\int_{N+1}^{+\infty} G_a(a\pi(t+y)) dy \leq \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\frac{a}{\pi(\tau+N+1)} \right) + 1 \right). \quad (1.46)$$

Используя (1.42)-(1.46), получим оценку

$$|\varepsilon_N(t)| \leq M(R_N(t/\Delta) + R_N(-t/\Delta)) \leq M \left(\Phi \left(N - \frac{t}{\Delta} \right) + \Phi \left(N + \frac{t}{\Delta} \right) \right).$$

Значения оценки (1.38), полученные для различного числа сомножителей K произведения $P_K(a, t)$, представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Значения оценки (1.38) ошибки усечения ряда (1.36) при $a = 3$ для различных K в зависимости от величины числа N . Принято $M = 1$.

K	N						
	5	10	20	50	100	200	500
2	$1.19 \cdot 10^{-1}$	$6.04 \cdot 10^{-2}$	$3.03 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$6.08 \cdot 10^{-3}$	$3.04 \cdot 10^{-3}$	$1.22 \cdot 10^{-3}$
3	$3.31 \cdot 10^{-2}$	$8.57 \cdot 10^{-3}$	$2.17 \cdot 10^{-3}$	$3.48 \cdot 10^{-4}$	$8.71 \cdot 10^{-5}$	$2.18 \cdot 10^{-5}$	$3.48 \cdot 10^{-6}$
5	$3.31 \cdot 10^{-2}$	$4.84 \cdot 10^{-3}$	$6.18 \cdot 10^{-4}$	$1.54 \cdot 10^{-5}$	$9.64 \cdot 10^{-7}$	$6.03 \cdot 10^{-8}$	$1.54 \cdot 10^{-9}$
7	$3.31 \cdot 10^{-2}$	$4.84 \cdot 10^{-3}$	$6.18 \cdot 10^{-4}$	$1.54 \cdot 10^{-5}$	$5.96 \cdot 10^{-7}$	$1.87 \cdot 10^{-8}$	$7.39 \cdot 10^{-11}$

1.5. Обобщения оценок погрешности усечения для асимметричной суммы

Рассмотрим случай, когда приближение сигнала $f(t)$ ищется с помощью асимметричной суммы

$$f_{N_1, N_2}(t) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} f(k\Delta) F_a \left(\frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right).$$

Погрешность усечения $\varepsilon_{N_1, N_2}(t) = f(t) - f_{N_1, N_2}(t)$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_{N_1, N_2}(t)| \leq M \left(R_{N_1}(t/\Delta) + R_{N_2}(-t/\Delta) \right),$$

где $M = \max_{k \in \mathbb{Z}} |f(k\Delta)|$, а функция $R_N(\tau)$ определяется формулой (1.25). Отсюда и из (1.32) следует соотношение

$$|\varepsilon_{N_1, N_2}(t)| \leq M (\Psi(N_2 - t/\Delta) + \Psi(N_1 + t/\Delta)). \quad (1.47)$$

Таким же образом получается и оценка погрешности $\varepsilon_{N_1, N_2}(t)$ для ряда (1.36)

$$|\varepsilon_{N_1, N_2}(t)| \leq M (\Phi(N_2 - t/\Delta) + \Phi(N_1 + t/\Delta)).$$

Из (1.47) вытекает обобщение оценки (1.33)

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{N_1, N_2}(t)| \leq M \pi^{-\log_a \sqrt{a\pi}} & \left(N_1^{-\log_a (\pi^2 a^{-1} N_1)/2} \left(\frac{1}{\eta(N_1 - 1) - 2} + N_1^{-1} \right) + \right. \\ & \left. + N_2^{-\log_a (\pi^2 a^{-1} N_2)/2} \left(\frac{1}{\eta(N_2 - 1) - 2} + N_2^{-1} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.48)$$

Неравенство (1.48) справедливо для чисел N_1 и N_2 , удовлетворяющих условию $N_{1,2} > a/\pi$.

1.6. Оценки для произвольных значений переменной t

Построим теперь оценки ошибки усечения для случая, когда переменная t принимает произвольные значения. Пусть $t \in [L\Delta, (L+1)\Delta]$, $L \in \mathbb{Z}$, и

приближение $f_N(t)$ функции $f(t)$ ищется в виде

$$f_N(t) = \sum_{k=L-N}^{L+N} f(k\Delta) F_a \left(\frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right).$$

Погрешность усечения будет определяться формулой

$$\begin{aligned} \varepsilon_N(t) &= \sum_{|k-L|>N} f(k\Delta) F_a \left(\frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right) = \\ &= \sum_{|m|>N} f((m+L)\Delta) F_a \left(\frac{a\pi}{\Delta} (t - (L+m)\Delta) \right). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Поскольку $|t - L\Delta| < \Delta$, из теоремы 1.1 вытекает неравенство

$$|\varepsilon_N(t)| \leq M(\Psi(N + L - t / \Delta) + \Psi(N - L + t / \Delta)),$$

где функция $\Psi(x)$ определяется выражениями (1.22) и (1.23).

Оценка (1.33) не изменится, поскольку выражение в правой части неравенства не зависит от t .

Из теоремы 1.3 для величины

$$\varepsilon_N(t) = \sum_{|k-L|>N} f(k\Delta) P_K \left(a, \frac{a\pi}{\Delta} (t - k\Delta) \right)$$

получим

$$|\varepsilon_N(t)| \leq M(\Phi(N + L - t / \Delta) + \Phi(N - L + t / \Delta)),$$

где функция $\Phi(x)$ задается формулами (1.39)-(1.41).

1.7. Обсуждение результатов

В теоремах 1.1 и 1.2 представлены два различных выражения, позволяющих оценить погрешность усечения (1.13). Оценку (1.33) благодаря простому виду удобнее применять в практических приложениях. Оценка (1.21) лучше (1.33), но при этом, как видно из таблиц 1,2, (1.21) и (1.33) имеют одинаковый порядок.

Из неравенства (1.33) следует, что величина $\varepsilon_N(t)$ при $N \rightarrow \infty$ затухает быстрее, чем $O(N^{-r})$, где r — произвольное положительное число. Данный

результат можно сравнить с анализом асимптотического поведения погрешности усечения (1.12). В работе Пайпера [41] показано, что любая оценка ошибки усечения ряда Уиттекера-Котельникова-Шеннона, полученная для множества всевозможных функций с финитным абсолютно интегрируемым спектром, стремится при возрастании N к нулю не быстрее, чем $O(1/N)$.

Оценка (1.38), полученная для остатка разложения (1.36) на основе частичных произведений, совпадает с (1.21) при

$$N \leq \frac{a^K}{\pi} - 2.$$

Отсюда следует, что при заданном N для числа сомножителей $K \geq \log_a(\pi(N+2))$ ошибка усечения ряда (1.36) подчиняется неравенству (1.21). Если к тому же $N > a/\pi$, для (1.37) справедлива оценка (1.33).

1.8. Ряд Кравченко-Котельникова как теоретическая основа методов фильтрации сигналов

Разложение (1.10) сигнала $f(t)$, имеющего финитный спектр $F(\omega)$ с носителем $\text{supp } F(\omega) = [-\Omega, \Omega]$, может быть представлено в форме свертки с суммой δ -функций Дирака

$$f(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta)\delta(t-k\Delta) \right) * F_a \left(\frac{a\pi}{\Delta} t \right). \quad (1.50)$$

В формуле (1.50) выражение

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta)\delta(t-k\Delta) \quad (1.51)$$

определяет дискретизованный с шагом $\Delta = \pi(a-2)/(\Omega(a-1))$ сигнал $f(t)$. Функция $F_a(a\pi t/\Delta)$ – ИХ ФНЧ, позволяющего восстановить непрерывный сигнал $f(t)$ по дискретному (1.51). В частотной области соотношению (1.50) соответствует равенство

$$F(\omega) = \frac{1}{a\Omega} \frac{a-2}{a-1} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta) \exp(jk\Delta\omega) \right) h_a \left(\frac{\omega}{a\Omega} \frac{a-2}{a-1} \right) \quad (1.52)$$

В правой части (1.52) разложение в ряд Фурье функции $F(\omega)$ умножается на частотную характеристику $h_a \left(\frac{\omega}{a\Omega} \frac{a-2}{a-1} \right)$ фильтра с полосой пропускания $|\omega| \leq \Omega$ и полосой подавления $|\omega| \geq \frac{a}{a-2} \Omega$. Фильтр с АЧХ $h_a \left(\frac{\omega}{a\Omega} \frac{a-2}{a-1} \right)$ не является реализуемым. Для решения практических задач восстановления и интерполяции сигналов разработаны (гл. 2,3) реализуемые аналоговые и цифровые фильтры с АЧХ, приближающимися по форме к функции $h_a(\omega)$.

Выводы к главе 1

Главным преимуществом ряда Кравченко-Котельникова являются малые значения его погрешности усечения. Данное свойство объясняется быстрым затуханием базисных функций ряда. Разложение Кравченко-Котельникова может рассматриваться в качестве теоретической основы методов фильтрации цифровых и аналоговых сигналов.

В главе 1 представлены две оценки погрешности усечения ряда Кравченко-Котельникова. Показано, что величина $\varepsilon_N(t)$ (1.13) при $N \rightarrow \infty$ затухает быстрее, чем N^{-r} , где r — произвольное положительное число. Проанализирована ошибка усечения ряда, базисными функциями которого являются произведения конечного числа сомножителей. Приведены обобщения соотношений в случае произвольных значений переменной t . Рассмотрены неравенства для погрешности приближения искомой функции асимметричной частичной суммой. Полученные оценки позволят эффективно применять ряд Кравченко-Котельникова на практике для решения широкого круга задач.

Глава 2. Цифровые КИХ-фильтры на основе спектров атомарных функций

2.1. Введение

Цифровые фильтры с конечной ИХ определяются набором своих коэффициентов $h(k)$, $k = 0, \dots, N - 1$, задающих результат воздействия $y(n)$ фильтра на входной сигнал $x(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Преимуществами КИХ-фильтров являются наличие линейной фазовой характеристики и устойчивость [1].

Для синтеза цифровых ФНЧ с конечной ИХ обычно применяются методы оконного взвешивания, частотной выборки и оптимизации [1,6,21]. Алгоритмы оптимизации и частотной выборки позволяют получать ФНЧ с заданными полосами пропускания и подавления и с произвольным отклонением приближенной АЧХ от идеальной. При этом определение коэффициентов может быть затратным с точки зрения вычислений.

В методе оконного взвешивания строится приближение ФНЧ с идеальной АЧХ

$$|H(\exp(j\omega))| = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| < \omega_0, \\ 0, & \omega_0 < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (2.1)$$

где ω_0 – частота среза. Коэффициенты фильтра получаются умножением идеальной ИХ на весовые функции. Ширина переходной полосы полученного фильтра определяется выбором окна и числом коэффициентов. Недостатком метода является отсутствие затухания отклонений в полосах пропускания и подавления с увеличением длины фильтра [1,6].

В рассматриваемом в данном разделе методе синтеза КИХ-фильтра идеальную АЧХ (2.1) предлагается заменить финитными бесконечно гладкими

функциями, образованными суммами S сдвигов атомарных функций $h_a(x)$. Для $S = 1$ новая идеальная АЧХ определяется выражением

$$|H(\exp(j\omega))| = \frac{2}{a} h_a(C\omega), \quad (2.2)$$

где C – постоянная. Параметр a в (2.2) дает возможность строить фильтр с заданными полосами пропускания и подавления. Благодаря бесконечной дифференцируемости АЧХ (2.2) ИХ соответствующего цифрового фильтра быстро затухает. Для построения КИХ-фильтров с АЧХ, приближенно равной (2.2), можно использовать усечение выборки коэффициентов ИХ прямоугольным окном.

2.2. Цифровые фильтры с импульсной характеристикой на основе спектров функций $h_a(x)$

На основе идеальной АЧХ вида (2.2) можно построить цифровой КИХ-фильтр, удовлетворяющий заданным требованиям спецификации

$$\text{Полоса пропускания } 0 \leq \omega \leq \omega_0.$$

$$\text{Полоса подавления } \omega_1 \leq \omega \leq \pi.$$

Отклонение в полосах пропускания и подавления δ .

Граничные частоты ω_0, ω_1 для фильтра с характеристикой (2.2) связаны с параметром a соотношением

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{a-2}{a}.$$

Отсюда следует, что число a определяется равенством

$$a = 2 / (1 - \omega_0 / \omega_1). \quad (2.3)$$

При

$$C = \frac{1}{\omega_1(a-1)}$$

АЧХ (2.2) соответствует фильтру, имеющему требуемые спецификацией полосы пропускания и подавления. Коэффициенты $h(k)$ данного фильтра равны

$$h(k) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2\pi} F_a(k(a-1)\omega_1), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Заменяя функцию $F_a(t)$ в (2.4) ее приближением частичным произведением $P_K(a, t)$:

$$h(k) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2\pi} P_K(a, k(a-1)\omega_1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

получим фильтр с граничными частотами $\tilde{\omega}_0$ и $\tilde{\omega}_1$

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 \left(1 + \frac{a^{-K+1}}{a-2} \right), \quad \tilde{\omega}_1 = \omega_1 \left(1 - \frac{1}{a^K} \right).$$

При достаточно больших K быстрое затухание коэффициентов (2.5) позволяет синтезировать качественный КИХ-фильтр низких частот путем усечения последовательности (2.5) прямоугольным окном

$$h(k) = \frac{\omega_1 + \omega_0}{2\pi} P_K(a, k(a-1)\omega_1), \quad k = -N, \dots, N. \quad (2.6)$$

На рисунке 4б приводится график АЧХ фильтра (2.6) для заданных значений граничных частот ω_0, ω_1 .

2.3. Цифровые фильтры на основе сумм сдвигов функции $h_a(x)$

Функция $h_a(x)$ является решением задачи о единице [15]

$$\frac{2}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_a \left(x + \frac{2}{a} k \right) \equiv 1.$$

Конечные суммы сдвигов $h_a(x)$ образуют финитные бесконечно дифференцируемые функции, равные константе на центральном участке своего носителя. Фильтры на основе сумм сдвигов могут иметь меньшее отклонение в полосах пропускания и подавления по сравнению с (2.6).

Формулы

$$h_{s,a}(x) = \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S/2} \left(h_a \left(x + \frac{2k+1}{a} \right) + h_a \left(x - \frac{2k+1}{a} \right) \right), \quad S = 2n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.7)$$

$$h_{s,a}(x) = \frac{1}{S} \sum_{k=-(S-1)/2}^{(S-1)/2} h_a \left(x + \frac{2k}{a} \right), \quad S = 2n-1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.8)$$

определяют соответственно четное и нечетное количество сдвигов атомарной функции $h_a(x)$. Функции $h_{s,a}(x)$ имеют носитель

$$\text{supp } h_{s,a}(x) = \left[-\frac{S(a-1)+1}{a(a-1)}, \frac{S(a-1)+1}{a(a-1)} \right].$$

Суммы (2.7), (2.8) обладают свойствами идеальной АЧХ ФНЧ при выполнении условия

$$a > \frac{S+1}{S}. \quad (2.9)$$

Для значений параметра a , удовлетворяющих (2.9), справедливо

$$h_{s,a}(x) \equiv \frac{a}{2}, \quad |x| < \frac{S(a-1)-1}{a(a-1)}.$$

Спектр $H_{s,a}(\omega)$ функции $h_{s,a}(x)$ имеет вид

$$H_{s,a}(\omega) = \frac{\sin(S\omega/a)}{S \sin(\omega/a)} F_a(\omega). \quad (2.10)$$

Фильтр с идеальной АЧХ

$$|H(\exp(j\omega))| = \frac{2}{a} h_{s,a}(C\omega)$$

имеет заданные спецификацией полосы пропускания и подавления при

$$a = \frac{(S-1)(1-\omega_0/\omega_1)+2}{S(1-\omega_0/\omega_1)}, \quad C = \frac{2S}{a(\omega_0+\omega_1)}.$$

Заменим функцию $F_a(\omega)$ в (2.10) конечным произведением $P_K(a,\omega)$ (1.7)

$$H_{s,a}^*(\omega) = \frac{\sin(S\omega/a)}{S \sin(\omega/a)} P_K(a,\omega). \quad (2.11)$$

Коэффициенты КИХ-фильтра с АЧХ на основе суммы $h_{s,a}(\omega)$ равны

$$\frac{\omega_1 + \omega_0}{2\pi} H_{s,a}^* \left(\frac{a(\omega_1 + \omega_0)}{2S} k \right), \quad k = -N, \dots, N. \quad (2.12)$$

При $S = 1$ фильтр (2.12) совпадает с (2.6). На рисунках 4в, 4г показаны АЧХ некоторых фильтров вида (2.12) для $S = 2$ и $S = 3$.

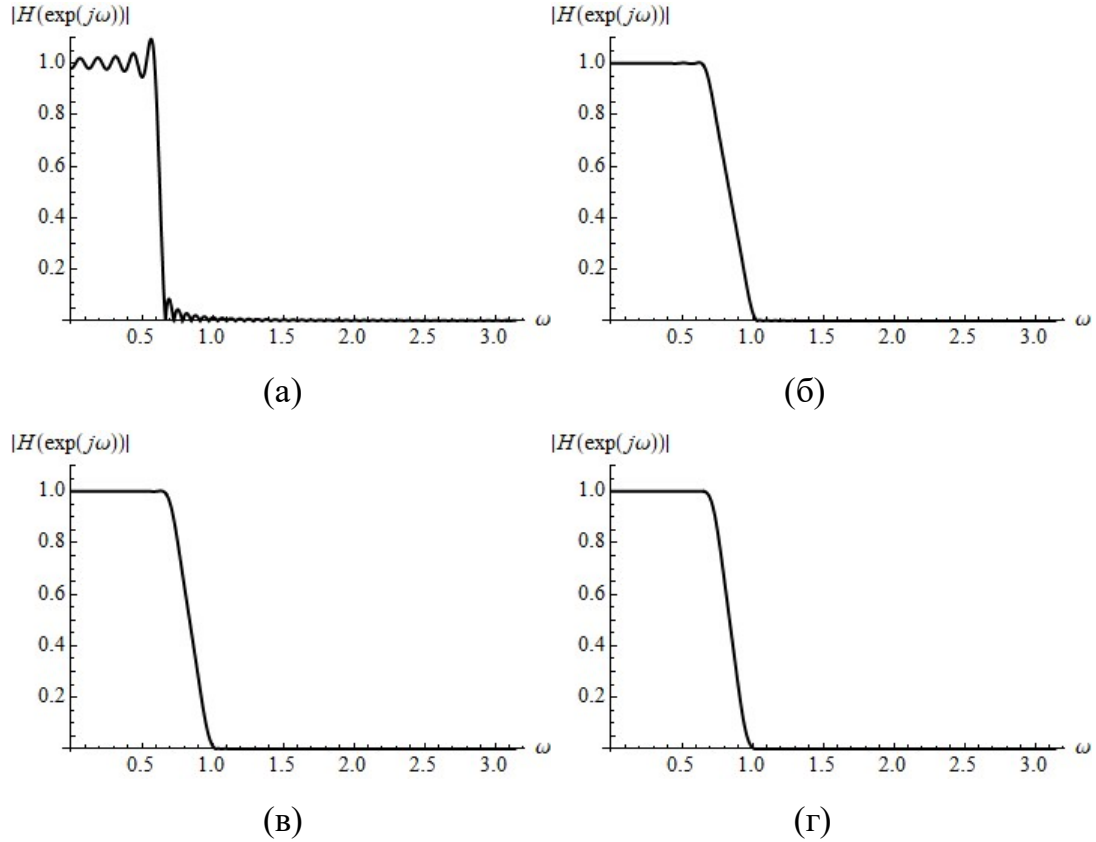


Рисунок 4 – АЧХ фильтра с частотой среза $\omega_0 = \pi / 5$, полученного усечением идеальной ИХ прямоугольным окном, $N = 50$ (а), АЧХ фильтров (2.6) (б) и (2.12) для $S = 2$ (в) и $S = 3$ (г) при $\omega_0 = \pi / 5$, $\omega_1 = \pi / 3$, $N = 50$.

2.4. Оценка отклонения АЧХ фильтров в полосах пропускания и подавления

Неравномерность δ АЧХ фильтра (2.12) в полосах пропускания и подавления подчиняется неравенству

$$\delta \leq \max_{\omega} \left| \frac{\omega_0 + \omega_1}{\pi} \sum_{m=N+1}^{+\infty} H_{s,a}^* \left(\frac{a(\omega_0 + \omega_1)}{2S} k \right) \cos(k\omega) \right|. \quad (2.13)$$

Приведенная ниже оценка неравномерности позволяет строить фильтры (2.6) и (2.11), удовлетворяющие заданному спецификацией ограничению на величину δ .

Теорема 2.1. Для отклонения δ АЧХ фильтра (2.11) в полосах пропускания и подавления справедлива оценка

$$\delta \leq \frac{2}{\pi} a^{\nu(\nu-1)/2} \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2S} \right)^{1-\nu} (N+1)^{1-\nu} \left(\frac{1}{\nu-1} + (N+1)^{-1} \right), \quad (2.14)$$

где

$$\nu \equiv \nu(N) = \begin{cases} \left\lceil \log_a \left(a \frac{\omega_1 + \omega_0}{2S} (N+1) \right) \right\rceil, & \log_a \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2S} (N+1) \right) \notin \mathbb{N}, \\ \log_a \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2S} (N+1) \right), & \log_a \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2S} (N+1) \right) \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Количество сомножителей K произведения $P_K(a, t)$ в (2.11) и число N в (2.12) должны удовлетворять условиям

$$K \geq \log_a \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2S} (N+1) \right), \quad N > \frac{2aS}{\omega_1 + \omega_0} - 1. \quad (2.16)$$

Доказательство. В разделе 1.3.3 было показано, что для произведения $P_K(a, t)$ выполняется соотношение

$$|P_K(a, t)| \leq G_a^{(K)}(t),$$

где $G_a^{(K)}(t)$ – заданная для $t > a$ кусочная функция вида

$$G_a^{(K)}(t) = \begin{cases} a^{n(n+1)/2} t^{-n}, & t \in (a^n, a^{n+1}], \quad n = 1, \dots, K-1, \\ a^{K(K+1)/2} t^{-K}, & t > a^K. \end{cases}$$

Обозначим $A = \frac{a(\omega_0 + \omega_1)}{2S}$. Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega_0 + \omega_1}{\pi} \sum_{m=N+1}^{+\infty} H_{S,a}^*(Am) \cos(m\omega) \right| &\leq \frac{\omega_0 + \omega_1}{\pi} \sum_{m=N+1}^{+\infty} |H_{S,a}^*(Am)| \leq \\ &\leq \frac{\omega_0 + \omega_1}{\pi S} \sum_{m=N+1}^{+\infty} G_a^{(K)}(Am), \end{aligned} \quad (2.17)$$

Используя формулу оценки остатка ряда с положительными монотонно убывающими слагаемыми, получим

$$\sum_{m=N+1}^{+\infty} G_a^{(K)}(Am) \leq G_a^{(K)}(A(N+1)) + \frac{1}{A} \int_{A(N+1)}^{+\infty} G_a^{(K)}(x) dx. \quad (2.18)$$

Пусть для $\nu \in \mathbb{N}$ выполняется условие $A(N+1) \in (a^\nu, a^{\nu+1}]$. Тогда из (2.15) вытекает, что $2 \leq \nu < K-1$. Интеграл в правой части (2.18) равен

$$\begin{aligned} \int_{A(N+1)}^{+\infty} G_a^{(K)}(x) dx &= \int_{A(N+1)}^{a^{\nu+1}} a^{\nu(\nu+1)/2} x^{-\nu} dx + \sum_{l=\nu+1}^{K-1} \int_{a^l}^{a^{l+1}} a^{l(l+1)/2} x^{-l} dx + \int_{a^K}^{+\infty} a^{K(K+1)/2} x^{-K} dx = \\ &= \frac{1}{\nu-1} a^{\nu(\nu+1)/2} (A(N+1))^{-\nu+1} - \sum_{l=\nu+1}^K \frac{a^{-l^2/2+3l/2}}{(l-2)(l-1)}. \end{aligned}$$

Из равенства

$$G_a^{(K)}(A(N+1)) = a^{\nu(\nu+1)/2} (A(N+1))^{-\nu}$$

и соотношения (2.18) следует, что

$$\sum_{m=N+1}^{+\infty} G_a^{(K)}(Am) \leq a^{\nu(\nu+1)/2} A^{-\nu} (N+1)^{-\nu+1} \left(\frac{1}{\nu-1} + \frac{1}{N-1} \right). \quad (2.19)$$

Учитывая (2.13), (2.17) и (2.19), получим искомую оценку отклонения

$$\delta \leq \frac{2}{\pi} a^{\nu(\nu-1)/2} \left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2S} \right)^{1-\nu} (N+1)^{1-\nu} \left(\frac{1}{\nu-1} + (N+1)^{-1} \right).$$

При $S = 1$ неравенство (2.14) выполняется для неравномерности δ АЧХ фильтра (2.6).

2.5. Численный эксперимент

На примере решения задачи повышения частоты дискретизации цифрового сигнала [1,5] сравним эффективность классических КИХ-фильтров и фильтров (2.6), (2.12) на основе атомарных функций.

Пусть входной сигнал $x(n\Delta)$ дискретизован с шагом Δ и требуется получить последовательность $y(k\Delta_1) \approx x(k\Delta_1)$ с увеличенной частотой

дискретизации, $\Delta_1 = \Delta / L$, где L – коэффициент интерполяции [5].

Сигнал

$$x^*(k\Delta) = \begin{cases} x(n\Delta), & k = Ln, \\ 0, & k = Ln + 1, \dots, Ln + L - 1, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

образованный вставкой $L - 1$ нулей между отсчетами $x(k\Delta)$, подвергается фильтрации в соответствие с формулой [5]

$$y(k\Delta_1) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)x^*((k-l)\Delta_1),$$

где $h(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, – коэффициенты ИХ фильтра низких частот. Для фильтра конечной длины $2M + 1$ выходная последовательность вычисляется по формуле

$$y(k\Delta_1) = \sum_{l=-M}^M h(l)x^*((k-l)\Delta_1).$$

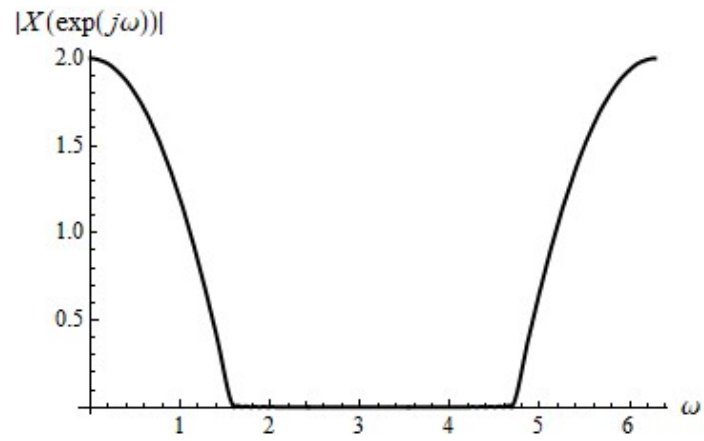
На рисунке 5 показан процесс интерполяции сигнала в частотной области на различных этапах. Модуль спектра $|X^*(\exp(j\omega))|$ сигнала $x^*(k\Delta_1)$ образуется из сжатых в L раз копий АЧХ сигнала $x(n\Delta)$. После подавления лишних копий с помощью ФНЧ на выходе получается сигнал с увеличенной частотой дискретизации [5].

В примере проводилось повышение частоты дискретизации с коэффициентом $L = 3$. Отсчеты выходной последовательности вычислялись полифазным методом [5]

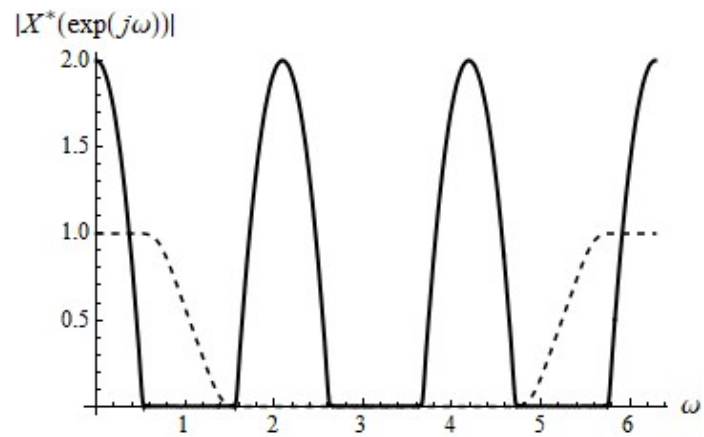
$$y((3s + m)\Delta_1) = \sum_{l=-N+1}^N h(3l + m)x(3(s - l)), \quad m = 1, 2,$$

где $N = (M + 1) / 3$. Исходный сигнал $x(k\Delta)$ был положен равным

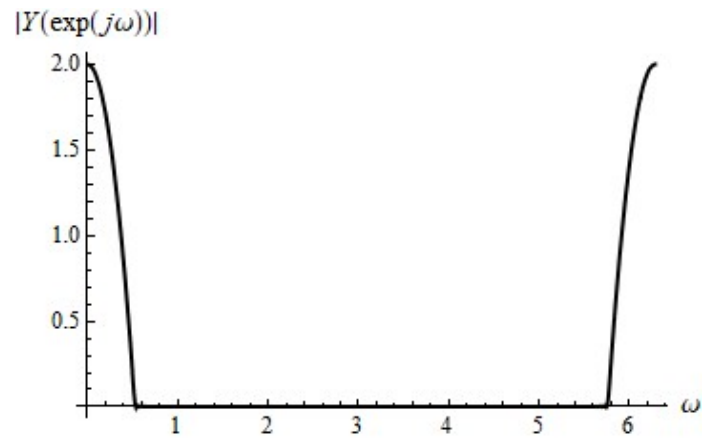
$$x(k\Delta) = \begin{cases} 4(\sin(k\Delta) / (k\Delta)^3 - \cos(k\Delta) / (k\Delta)^2) + 1, & |k| > 0, \\ 7 / 3, & k = 0. \end{cases}$$



(a)



(б)



(в)

Рисунок 5 – Спектры сигналов: $x(n\Delta)$ (а), $x^*(k\Delta_1)$ (б) и $y(k\Delta_1)$ (в). Пунктирной линией показана АЧХ фильтра (2.12).

Для интерполяции применялись фильтры (2.6) (h_1), (2.12) при $S = 2, 3$ (h_2, h_3), фильтр с характеристикой типа «приподнятый косинус» (h_4) [37], а также оконные фильтры на основе весовых функций Хэмминга (h_5), Кайзера при $\beta = 8.96$ (h_6) и Блэкмана (h_7) [1]. Абсолютная погрешность интерполяции ε вычислялась по формуле

$$\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}, \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \max_{s=-20, \dots, 20} |x((3s+1)\Delta_1) - y((3s+1)\Delta_1)|, \\ \varepsilon_2 &= \max_{s=-20, \dots, 20} |x((3s+2)\Delta_1) - y((3s+2)\Delta_1)|. \end{aligned}$$

Шаг дискретизации Δ полагался равным $\Delta = \Delta_0 / b$ при $b = 1.5, 2, 3, 4$, где Δ_0 – интервал, соответствующий частоте дискретизации Найквиста. Интерполяция выполнялась для различных значений числа N . Полученная при повышении частоты дискретизации погрешность (2.20) приводится в таблице 4.

Наименьшая погрешность получена при интерполяции с помощью КИХ-фильтров (2.6) и (2.12) для небольшого шага дискретизации исходного сигнала. В методах цифровой обработки сигналов часто используется выборка с запасом [1] – дискретизация с частотой, превышающей частоту Найквиста. Применение в этом случае атомарных фильтров, как видно из таблицы 4, дает хорошие результаты. Для фильтров h_1, \dots, h_3 при $b = 3$ и $b = 4$ получена погрешность, на несколько порядков меньшая по сравнению с ошибкой для оконных фильтров и фильтра типа «приподнятый косинус». Наименьшую погрешность обеспечил фильтр (2.12) при $S = 3$.

Также в таблице 4 можно заметить соответствующую атомарным фильтрам h_1, \dots, h_3 высокую скорость затухания погрешности ε с ростом числа N . Благодаря быстрому уменьшению погрешности для h_1, \dots, h_3 при $N = 60$ и $b = 4$ получено преимущество в 7-10 порядков по сравнению с фильтрами h_4, \dots, h_7 .

Таблица 4. Погрешность ε интерполяции сигнала $x(k\Delta_1)$ для различных значений b , полученная при использовании фильтров h_1, \dots, h_7 длиной $2N$ при $N = 20, 40, 60$.

$b = 1.5$							
N	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
20	$3.26 \cdot 10^{-5}$	$2.10 \cdot 10^{-5}$	$4.51 \cdot 10^{-5}$	$1.02 \cdot 10^{-4}$	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$7.48 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-5}$
40	$3.50 \cdot 10^{-7}$	$8.74 \cdot 10^{-8}$	$5.14 \cdot 10^{-7}$	$5.37 \cdot 10^{-6}$	$5.99 \cdot 10^{-4}$	$4.16 \cdot 10^{-6}$	$4.30 \cdot 10^{-7}$
60	$3.68 \cdot 10^{-8}$	$5.94 \cdot 10^{-9}$	$2.71 \cdot 10^{-9}$	$3.27 \cdot 10^{-6}$	$3.99 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-7}$
$b = 2$							
N	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
20	$3.29 \cdot 10^{-5}$	$1.80 \cdot 10^{-6}$	$5.81 \cdot 10^{-7}$	$8.83 \cdot 10^{-5}$	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$7.30 \cdot 10^{-6}$	$9.94 \cdot 10^{-6}$
40	$1.56 \cdot 10^{-6}$	$1.04 \cdot 10^{-8}$	$1.42 \cdot 10^{-10}$	$5.92 \cdot 10^{-6}$	$5.99 \cdot 10^{-4}$	$4.17 \cdot 10^{-6}$	$4.23 \cdot 10^{-7}$
60	$4.74 \cdot 10^{-9}$	$1.09 \cdot 10^{-10}$	$4.46 \cdot 10^{-12}$	$1.75 \cdot 10^{-6}$	$3.99 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-7}$
$b = 3$							
N	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
20	$2.78 \cdot 10^{-6}$	$1.97 \cdot 10^{-7}$	$1.32 \cdot 10^{-8}$	$3.69 \cdot 10^{-5}$	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$7.11 \cdot 10^{-6}$	$8.63 \cdot 10^{-6}$
40	$7.70 \cdot 10^{-9}$	$1.80 \cdot 10^{-9}$	$4.41 \cdot 10^{-12}$	$2.56 \cdot 10^{-6}$	$6.01 \cdot 10^{-4}$	$4.18 \cdot 10^{-6}$	$4.23 \cdot 10^{-7}$
60	$2.19 \cdot 10^{-9}$	$5.46 \cdot 10^{-12}$	$3.07 \cdot 10^{-14}$	$1.35 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-7}$
$b = 4$							
N	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
20	$5.19 \cdot 10^{-6}$	$3.72 \cdot 10^{-8}$	$1.72 \cdot 10^{-8}$	$6.90 \cdot 10^{-5}$	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$7.05 \cdot 10^{-6}$	$8.26 \cdot 10^{-6}$
40	$4.94 \cdot 10^{-9}$	$8.49 \cdot 10^{-12}$	$3.79 \cdot 10^{-13}$	$4.65 \cdot 10^{-6}$	$6.04 \cdot 10^{-4}$	$4.20 \cdot 10^{-6}$	$4.27 \cdot 10^{-7}$
60	$4.36 \cdot 10^{-11}$	$2.17 \cdot 10^{-12}$	$4.07 \cdot 10^{-14}$	$1.37 \cdot 10^{-6}$	$4.00 \cdot 10^{-4}$	$3.34 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-7}$

Выводы к главе 2

В Главе 2 рассмотрены цифровые КИХ-фильтры с АЧХ, аппроксимирующими атомарные функции. Метод определения коэффициентов ИХ позволяет синтезировать фильтры с заданными спецификацией полосами пропускания и подавления. Доказаны теоремы об оценках отклонений АЧХ новых фильтров.

Преимуществами фильтров (2.6), (2.12) являются, во-первых, простота процедуры определения их численных коэффициентов, во-вторых, быстрое затухание отклонения АЧХ в полосах пропускания и подавления с ростом длины фильтра. Таким образом, сходные по простоте построения с фильтрами на основе оконных весовых функций, при проведении численного эксперимента они позволили восстановить цифровой сигнал с большей точностью.

Глава 3. Аналоговые фильтры и цифровые БИХ-фильтры с АЧХ на основе атомарных функций $h_a(x)$

3.1. Задача построения аналоговых фильтров с АЧХ на основе атомарной функции $h_a(x)$

Идеальная АЧХ на основе функции $h_a(x)$ обладает бесконечной гладкостью. Поэтому аналоговые фильтры с АЧХ, приближенно равными $h_a(x)$, имеют быстро затухающую ИХ. Данное свойство позволяет получить преимущество при применении подобных фильтров в задачах восстановления сигналов, поскольку АЧХ часто применяемых классических фильтров Баттерворта и Чебышева [1,21] на основе разрывной функции прямоугольного импульса соответствует медленно затухающим ИХ, особенно с ростом порядка фильтров.

Построение устойчивого непрерывного фильтра с АЧХ на основе финитной атомарной функции – нетривиальная задача. Для ее решения потребовалось разработать метод построения неотрицательных рациональных дробей, аппроксимирующих квадрат функции $h_a(x)$.

В основе метода лежит равенство, вытекающее из интегральной формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\varphi(z)}{z - \omega} dz = \begin{cases} \varphi(\omega), & -1 < \omega < 1, \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь ω – вещественная переменная, C – контур, проходящий через точки $z = \pm 1$ и ограничивающий односвязную область D , $\varphi(z)$ – некоторая аналитическая на D функция. Заменяя функцию $\varphi(\omega)$ в (3.1) на аппроксимацию $h_a^2(\omega)$ частичными суммами ее ряда Фурье, и далее переходя от интеграла в правой части к его приближению формулой прямоугольников, можно получить рациональную дробь. Погрешность приближения данной дробью можно

попробовать оптимизировать, как было сделано в [33], используя метод градиентного спуска.

Дробь, найденная с помощью метода из [33], может принимать отрицательные значения. Это делает ее непригодной для построения устойчивых аналоговых фильтров. Ниже описан алгоритм позволяющий строить только неотрицательные дробные приближения $h_a^2(\omega)$.

3.2. Поиск действительных дробно-рациональных аппроксимаций функции $h_a^2(\omega)$

Функция

$$\varphi_a(\omega) = \frac{4}{a^2} \left(h_a(\omega / (a-1)) \right)^2 \quad (3.2)$$

равна единице в точке $\omega = 0$ и имеет носитель $\text{supp} \varphi_a(x) = [-1, 1]$. Частичные суммы $\varphi_a^{(M)}(\omega)$ ряда Фурье (3.2) задаются формулой

$$\varphi_a^{(M)}(\omega) = a_0 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k \cos(\pi k \omega). \quad (3.3)$$

Числа a_k в (3.3) можно вычислить по формулам

$$a_0 = \frac{c_0^2}{2} + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{2} c_l^2,$$

$$a_k = \sum_{l=0}^k \frac{1}{2} c_{k-l} c_l + \sum_{l=k+1}^{+\infty} c_{l-k} c_l, \quad k \geq 1,$$

где $c_0, c_1, \dots, c_k, \dots$ – коэффициенты Фурье функции $\frac{2}{a} h_a \left(\frac{\omega}{a-1} \right)$:

$$c_0 = (a-1) / a, \quad c_l = \frac{2}{a} (a-1) F((a-1)\pi l).$$

Функция $\varphi_a^{(M)}(z)$ является целой, что позволяет положить в (3.1) $\varphi(z) = \varphi_a^{(M)}(z)$.

При этом правая часть (3.1) окажется аппроксимацией функции $\varphi_a(\omega)$.

Заменяя далее интеграл в (3.1) его приближением по формуле прямоугольников, получим

$$\frac{1}{2\pi j} \sum_{l=0}^{2n-1} \frac{\varphi_a^{(M)}(z(t_l))z'(t_l)}{z(t_l) - \omega} \Delta t \approx \varphi_a(\omega). \quad (3.4)$$

Левая часть (3.4) представляет собой рациональную дробь. Погрешность приближения данной дробью функции $\varphi_a(\omega)$ зависит от выбора контура C , сетки интегрирования t_0, \dots, t_{2n-1} , а также от числа слагаемых M в (3.3). Рассмотрим в качестве контуров параметрическое семейство эллипсов C_b

$$C_b = \{(x, y) : x = \cos t, y = b \sin t\}.$$

Полагая узлы равными $t_l = \pi / (2n) + l\pi / n$, $l = 0, \dots, 2n - 1$, в левой части (3.4) можно получить рациональную дробь $H_{b,M}(\omega)$, принимающую лишь действительные значения

$$H_{b,M}(\omega) = \frac{1}{2nj} \sum_{l=0}^{2n-1} \frac{\varphi_a^{(M)}(\cos t_l + jb \sin t_l)(-\sin t_l + jb \cos t_l)}{\cos t_l + jb \sin t_l - \omega}. \quad (3.5)$$

Равномерная погрешность $\varepsilon \equiv \varepsilon(b, M)$ приближения функции $\varphi_a(\omega)$ дробью $H_{b,M}(\omega)$ определяется формулой

$$\varepsilon = \max_{\omega \in (-\infty, \infty)} |\varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega)|. \quad (3.6)$$

Задающие минимум погрешности (3.6) оптимальные параметры b и M можно определить, решая задачу минимизации функционала

$$\Phi(b_{\text{опт}}, M_{\text{опт}}) = \min_{b, M} \Phi(b, M), \quad (3.7)$$

где

$$\Phi(b, M) = \max_{\omega \in (-\infty, \infty)} (\varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega))^2. \quad (3.8)$$

Предположим, что число M принимает конечное число значений, $1 \leq M \leq M_1 < \infty$, и для каждого M определено решение задачи

$$\Phi(b_{\text{опт}}, M) = \min_{b > 0} \Phi(b, M). \quad (3.9)$$

Тогда $\min_{\substack{b \\ 1 \leq M \leq M_1}} \Phi(b, M)$ можно найти перебором.

Поскольку параметр b принимает значения из интервала $(0, +\infty)$, задача (3.9) не обязательно имеет решение. Ниже доказываются теоремы, позволяющие заменить область поиска $b \in (0, +\infty)$ конечным отрезком $[b_0, b_1]$, что обеспечивает существование решения (3.9).

3.3. Теоремы, позволяющие заменить непрерывную задачу дискретной

Если решение задачи (3.9) существует, то найденный параметр $b_{\text{опт}}$ и число M задают действительную рациональную дробь (3.5) $H_{b,M}(\omega)$, обладающую свойством четности числителя и знаменателя относительно переменной ω . Однако для построения квадрата АЧХ устойчивого фильтра этого недостаточно. Функция $H_{b,M}(\omega)$ должна также удовлетворять требованию неотрицательности

$$H_{b,M}(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Для поиска оптимальной неотрицательной дроби был разработан метод, основанный на выделении из интервала $b \in (0, +\infty)$ конечного отрезка $[b_0, b_1]$, где располагается решение. Отрезок $[b_0, b_1]$ можно далее заменить без потери точности решения конечным набором точек. Таким образом, вместо непрерывной задачи (3.9) решается дискретная задача, что позволяет учитывать условие (3.10).

Область поиска $b \in (0, +\infty)$ можно попробовать сузить, исключая хотя бы частично точки, в которых погрешность ε превышает некоторую заданную величину ε_1 . Как будет показано далее, для $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ всегда имеются числа b_0 и b_1 , $0 < b_0 < b_1 < +\infty$, такие, что $\varepsilon > \varepsilon_1$ при $b \in (0, b_0) \cup (b_1, +\infty)$.

В приведенных ниже доказательствах учитывается тот факт, что функция $\cos t$ является иррациональной на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ во всех π -рациональных точках, за исключением $t \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$ [40]. При этом для любого n и для любого узла дискретизации $t_l \in (0, \pi/2]$ из формулы (3.5) верно

$$t_l = \frac{\pi}{2n} + l \frac{\pi}{n} = \frac{2l+1}{2n} \pi \neq \frac{\pi}{3}.$$

Отсюда следует, что при $t_l \in (0, 2\pi)$, $t_l \neq \pi/2$, $t_l \neq 3\pi/2$

$$\sin(\pi m \cos t_l) \neq 0, \quad \cos(\pi m \cos t_l) \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.1. Для любого $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ найдется число $b_0 = b_0(M, n, \varepsilon_1)$ такое, что $\varepsilon > \varepsilon_1$ для всех $b \in (0, b_0)$.

Доказательство. Запишем функцию (3.5) в виде

$$H_{b,M}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_m \frac{A_1(b, m, t_l)\omega + A_0(b, m, t_l)}{(\omega + \cos t_l)^2 + b^2 \sin^2 t_l}, \quad (3.11)$$

где

$$A_1(b, m, t) = \sin t \sin(\pi m \cos t) \operatorname{sh}(\pi m b \sin t) + b \cos t \cos(\pi m \cos t) \operatorname{ch}(\pi m b \sin t),$$

$$A_0(b, m, t) = (1 - b^2) \sin t \cos t \sin(\pi m \cos t) \operatorname{sh}(\pi m b \sin t) + b \cos(\pi m \cos t) \operatorname{ch}(\pi m b \sin t).$$

Отметим, что $\lim_{b \rightarrow 0} A_1(b, m, t) = \lim_{b \rightarrow 0} A_0(b, m, t) = 0$.

Рассмотрим (3.11) в точке $\omega = \omega_0$,

$$\omega_0 = \begin{cases} 0, & n \text{ четно,} \\ \min \left\{ \frac{1}{2} \cos t_{(n-3)/2}, \frac{a-2}{a} \right\}, & n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Поскольку $\varphi_a(\omega_0) = 1$, при $|H_{b,M}(\omega_0)| < 1 - \varepsilon_1$ выполняются неравенства

$$\varepsilon \geq \left| H_{b,M}(\omega_0) - \varphi_a(\omega_0) \right| \geq 1 - |H_{b,M}(\omega_0)| > \varepsilon_1.$$

Положим

$$B_1(t, m) = \sin t \left| \sin(\pi m \cos t) \right| + \frac{\left| \cos t \cos(\pi m \cos t) \right|}{\pi m \sin t},$$

$$B_2(t, m) = \sin t \left| \cos(\pi m \cos t) \right| + \frac{\left| \cos t \sin(\pi m \cos t) \right|}{\pi m \sin t}.$$

Для функций $\left| A_1(b, m, t_l) \right|$ и $\left| A_0(b, m, t_l) - A_1(b, m, t_l) \cos t_l \right|$ при различных значениях m и t верны следующие оценки:

1) пусть $m \geq 1$, $t \neq \pi / 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| A_1(b, m, t) \right| &\leq \frac{B_1(t, m)}{2} \operatorname{sh}(2\pi m b \sin t), \\ \left| A_0(b, m, t) - A_1(b, m, t) \cos t \right| &\leq \frac{B_2(t, m)}{2\pi m} \operatorname{sh}(2\pi m b \sin t); \end{aligned}$$

2) при $t = \pi / 2$, $m \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \left| A_1(b, m, t) \right| &= 0, \\ \left| A_0(b, m, t) - A_1(b, m, t) \cos t \right| &= b \operatorname{ch}(\pi m b) \leq \frac{1}{2\pi m} \operatorname{sh}(2\pi m b); \end{aligned}$$

3) при $m = 0$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \left| A_1(b, m, t) \right| &= b \left| \cos t \right|, \\ \left| A_0(b, m, t) - A_1(b, m, t) \cos t \right| &= b \sin^2 t. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\beta_0 = (1 - \varepsilon_1) / \left(\sum_{m=0}^{M-1} \left| a_m \right| \right),$$

$$\rho_1(t) = \frac{\beta_0}{2} \left| \omega_0 + \cos t \right|, \quad \rho_2(t) = \frac{\beta_0}{2} (\omega_0 + \cos t)^2,$$

и положим

$$\tilde{b}_{01}(m, l) = \frac{1}{2\pi m \sin t_l} \operatorname{arcsch} \left(\frac{2\rho_1(t_l)}{B_1(t_l, m)} \right), \quad m = 1, \dots, M-1, \quad 0 \leq l \leq n-1, \quad l \neq (n-1)/2,$$

$$\tilde{b}_{01}(0, l) = \rho_1(t_l) / \left| \cos t_l \right|, \quad m = 0, \quad 0 \leq l \leq n-1, \quad l \neq (n-1)/2,$$

$$\tilde{b}_1 = \min_{\substack{0 \leq m \leq M-1, \\ 0 \leq l \leq n-1, \\ l \neq (n-1)/2}} \left\{ \tilde{b}_{01}(m, l) \right\},$$

$$\tilde{b}_{02}(m, l) = \frac{1}{2\pi m \sin t_l} \operatorname{arcsch} \left(\frac{2\pi m \rho_2(t_l)}{B_2(t_l, m)} \right), \quad m = 1, \dots, M-1, \quad 0 \leq l \leq n-1,$$

$$\tilde{b}_{02}(0, l) = \rho_2(t_l) / \sin^2 t_l, \quad l = 0 \leq l \leq n-1,$$

$$\tilde{b}_2 = \min_{\substack{0 \leq m \leq M-1, \\ 0 \leq l \leq n-1}} \{ \tilde{b}_{02}(m, l) \}.$$

Тогда для $b < b_0$, где

$$b_0 = \min\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\}, \quad (3.12)$$

выполняются неравенства

$$\left| \frac{A_1(b, m, t_l)\omega + A_0(b, m, t_l)}{(\omega_0 + \cos t_l)^2 + b^2 \sin^2 t_l} \right| < \beta_0, \quad \forall m, l: \quad 0 \leq m \leq M-1, \quad 0 \leq l \leq n-1.$$

Отсюда

$$\left| H_{b, M}(\omega_0) \right| < \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{M-1} |a_m| \beta_0 = \beta_0 \sum_{m=0}^{M-1} |a_m| = 1 - \varepsilon_1, \quad b < b_0. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что число b_0 существует и может быть найдено по формуле (3.12).

Приведем еще одно доказательство теоремы, верное при условии

$$\max_l \left| \varphi_a^{(M)}(\cos t_l) \right| = \left| \varphi_a^{(M)}(\cos t_0) \right| = K \neq 0. \quad (3.14)$$

Обозначим $\tau = t_0$. В точке $\omega = -\cos \tau$ справедливо

$$\begin{aligned} H_{b, M}(-\cos \tau) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{M-1} a_m \frac{-A_1(b, m, \tau) \cos \tau + A_0(b, m, \tau)}{b^2 \sin^2 \tau} + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq t_0}}^{n-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_m \frac{-A_1(b, m, t_l) \cos \tau + A_0(b, m, t_l)}{(\cos \tau - \cos t_l)^2 + b^2 \sin^2 t_l}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Первая сумма в правой части (3.15) равна

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} a_m \frac{-A_1(b, m, \tau) \cos \tau + A_0(b, m, \tau)}{b^2 \sin^2 \tau} &= \frac{1}{b} \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cos(\pi m \cos \tau) \operatorname{ch}(\pi m b \sin \tau) - \\ &- \operatorname{ctg} \tau \sum_{m=0}^{M-1} a_m \sin(\pi m \cos \tau) \operatorname{sh}(\pi m b \sin \tau). \end{aligned}$$

Для $b < \tilde{b}$, где

$$\tilde{b} = \min_{1 \leq m \leq M-1} \left\{ \frac{1}{\pi m \sin \tau} \operatorname{arcch} \left(\frac{K}{2M |a_m \cos(\pi m \cos \tau)|} + 1 \right) \right\},$$

выполнено соотношение

$$|a_m \cos(\pi m \cos \tau) (\operatorname{ch}(\pi m b \sin \tau) - 1)| < \frac{K}{2M}.$$

Отсюда

$$\left| \sum_{m=0}^{M-1} a_m \frac{-A_1(b, m, \tau) \cos \tau + A_0(b, m, \tau)}{b^2 \sin^2 \tau} \right| \geq \frac{1}{b} \frac{K}{2} - \Lambda, \quad b < \tilde{b}, \quad (3.16)$$

где

$$\Lambda = |\operatorname{ctg} \tau| \sum_{m=0}^{M-1} |a_m \sin(\pi m \cos \tau) \operatorname{sh}(\pi m \tilde{b} \sin \tau)|.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(b, m, t) &= \sin t | \sin(\pi m \cos t) | \operatorname{sh}(\pi m b \sin t) + b | \cos t \cos(\pi m \cos t) | \operatorname{ch}(\pi m b \sin t), \\ \tilde{A}_0(b, m, t) &= (1 + b^2) \sin t | \cos t \sin(\pi m \cos t) | \operatorname{sh}(\pi m b \sin t) + \\ &\quad + b | \cos(\pi m \cos t) | \operatorname{ch}(\pi m b \sin t) \end{aligned}$$

и оценим вторую сумму в правой части (3.15)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq l_0}}^{n-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_m \frac{-A_1(b, m, t_l) \cos \tau + A_0(b, m, t_l)}{(\cos \tau - \cos t_l)^2 + b^2 \sin^2 t_l} \right| \leq \\ & \leq \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq l_0}}^{n-1} \sum_{m=0}^{M-1} |a_m| \frac{A_1(\tilde{b}, m, t_l) |\cos \tau| + A_0(\tilde{b}, m, t_l)}{(\cos \tau - \cos t_l)^2} = X. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из (3.16) и (3.17) следует, что

$$\left| H_{b, M}(-\cos \tau) \right| \geq \frac{1}{n} \left(\frac{K}{2b} - \Lambda - X \right) > 1 + \varepsilon_1$$

при

$$0 < b < b_0,$$

где

$$b_0 = \min \left\{ \tilde{b}, \frac{1}{2} \frac{K}{n(1 + \varepsilon_1) + \Lambda + X} \right\}. \quad (3.18)$$

Если выполняется (3.14), число b_0 предпочтительней определять с помощью (3.18). Вычисленные значения оценки (3.12) оказывались на порядок или два меньше по сравнению с (3.18).

Приведенная ниже лемма используется при доказательстве теоремы о существовании числа b_1 .

Лемма. Пусть $m \in \mathbb{N}$, t – некоторое π -рациональное число из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $t \neq \frac{\pi}{3}$, и для $b > 0$ задана дробь

$$V(b, \omega) = \frac{p_1(b)\omega^2 + p_0(b)}{\omega^4 + q_1(b)\omega^2 + q_0(b)} \quad (3.19)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} p_1(b) &= -2((1 + b^2) \sin t \cos t \sin(\pi l \cos t) + b \cos(2t) \cos(\pi l \cos t)), \\ p_0(b) &= 2(\cos^2 t + b^2 \sin^2 t)((1 - b^2) \sin t \cos t \sin(\pi l \cos t) + b \cos(\pi l \cos t)), \\ q_1(b) &= 2(b^2 \sin^2 t - \cos^2 t), \\ q_0(b) &= (\cos^2 t + b^2 \sin^2 t)^2. \end{aligned}$$

Тогда для наибольшего по модулю значения

$$V_0(b) = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |V(\omega, b)|$$

дроби (3.19) при любом $b > 0$ справедлива оценка снизу

$$V_0(b) \geq \Omega_0.$$

Число Ω_0 определяется формулой

$$\Omega_0 = \min \left\{ \frac{1}{\sin(2t)}, \sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}, \alpha_2 \right\},$$

где

$$\alpha_1 = \min_{b \geq 0} \left(\frac{p_0^2(b)}{q_0^2(b)} + \frac{p_1^4(b)}{16(p_0^2(b) + p_1^2(b)q_0(b) - p_0(b)p_1(b)q_1(b))} \right)$$

и

$$\alpha_2 = \min_{b \in \Theta} \left| \frac{p_0(b)}{q_0(b)} \right|,$$

$$\Theta = \{b : p_1^2(b)q_0(b) - p_0(b)p_1(b)q_1(b) \leq 0\} \cap \{b : p_0(b)p_1(b) \geq 0\}.$$

Теорема 3.2. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует число $b_1 = b_1(M, n, \varepsilon_1)$ такое, что

$\varepsilon > \varepsilon_1$ для всех $b > b_1$.

Доказательство. Пусть число n четно. Представим функцию $H_{b,M}(\omega)$ в виде

$$H_{b,M}(\omega) = \frac{1}{2n} \exp\left(\pi(M-1)b \sin t_{n/2-1}\right) \sum_{l=0}^{n/2-1} \sum_{m=0}^{M-1} (S_{l,m}^{(1)}(b, \omega) + S_{l,m}^{(2)}(b, \omega)), \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned} S_{m,l}^{(1)}(b, \omega) &= a_m \exp\left(\pi b(m \sin t_l - (M-1) \sin t_{n/2-1})\right) \mu_{m,l}(b, \omega), \\ S_{m,l}^{(2)}(b, \omega) &= a_m \exp\left(-\pi b(m \sin t_l + (M-1) \sin t_{n/2-1})\right) \nu_{m,l}(b, \omega). \end{aligned} \quad (3.21)$$

В (3.21) функции $\mu_{m,l}(b, \omega)$ и $\nu_{m,l}(b, \omega)$ при $l \neq \frac{n-1}{2}$ равны

$$\mu_{m,l}(b, \omega) = \frac{C_1(b, m, t_l)\omega + C_0(b, m, t_l)}{(\omega + \cos t_l)^2 + b^2 \sin^2(t_l)} + \frac{-C_1(b, m, t_l)\omega + C_0(b, m, t_l)}{(\omega - \cos t_l)^2 + b^2 \sin^2(t_l)}, \quad (3.22)$$

$$\nu_{m,l}(b, \omega) = \frac{C_1(b, m, -t_l)\omega + C_0(b, m, -t_l)}{(\omega + \cos t_l)^2 + b^2 \sin^2(t_l)} + \frac{-C_1(b, m, -t_l)\omega + C_0(b, m, -t_l)}{(\omega - \cos t_l)^2 + b^2 \sin^2(t_l)}, \quad (3.23)$$

где

$$C_0(b, m, t) = (1 - b^2) \sin t \cos t \sin(\pi m \cos t) + b \cos(\pi m \cos t),$$

$$C_1(b, m, t) = \sin t \sin(\pi m \cos t) + b \cos t \cos(\pi m \cos t).$$

Применяя лемму к функции (3.22) при $t = t_{n/2-1}$, $m = M-1$, получим

соотношение

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} |\mu_{M-1, n/2-1}(b, \omega)| \geq \Omega_0. \quad (3.24)$$

Каждому значению b поставим в соответствие точку $\omega = \omega_0(b)$, в которой выполняется равенство

$$\mu_{M-1, n/2-1}(b, \omega_0(b)) = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |\mu_{M-1, n/2-1}(b, \omega)|.$$

Из (3.24) следует

$$|S_{n/2-1, M-1}^{(1)}(b, \omega_0(b))| \geq |a_{M-1}| \Omega_0.$$

Для функций $\mu_{m,l}$ и $\nu_{m,l}$ при $l \neq \frac{n-1}{2}$ легко вывести неравенства

$$|\mu_{m,l}(b, \omega)| \leq 2 \left(\frac{1}{b} + \operatorname{ctg} t_l \right), \quad |\nu_{m,l}(b, \omega)| \leq 2 \left(\frac{1}{b} + \operatorname{ctg} t_l \right). \quad (3.25)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |S_{l,m}^{(1)}(b, \omega_0(b))| &\leq 2 |a_m| \left(\frac{1}{b} + \operatorname{ctg} t_l \right) \exp\left(\pi b(m \sin t_l - (M-1) \sin t_{n/2-1})\right), \\ |S_{l,m}^{(1)}(b, \omega_0(b))| &\leq 2 |a_m| \left(\frac{1}{b} + \operatorname{ctg} t_l \right) \exp\left(-\pi b(m \sin t_l + (M-1) \sin t_{n/2-1})\right). \end{aligned}$$

Сумма

$$S(b) = \sum_{\substack{|m| \leq M-1, 0 \leq l \leq n/2-1, \\ (m,l) \neq (M-1, n/2-1)}} 2 |a_m| \left(\frac{1}{b} + \operatorname{ctg} t_l \right) \exp\left(\pi b(m \sin t_l - (M-1) \sin t_{n/2-1})\right)$$

монотонно убывает и стремится к нулю с ростом b . Поэтому существует число \tilde{b}_1 , для которого при любом $b > \tilde{b}_1$ справедливо

$$S(b) < \frac{|a_{M-1}| \Omega_0}{2}.$$

Таким образом,

$$|H_{b,M}(\omega_0(b))| > \frac{1}{2n} \frac{\Omega_0 |a_{M-1}|}{2} \exp\left(\pi(M-1)b \sin t_{n/2-1}\right), \quad b > \tilde{b}_1. \quad (3.26)$$

Из (3.26) и определения числа \tilde{b}_1 следует, для всех $b > \tilde{b}_1$, где

$$\tilde{b}_1 = \max \left\{ \tilde{b}_1, \frac{\ln(4n(1 + \varepsilon_1)) - \ln(\Omega_0 |a_{M-1}|)}{\pi(M-1) \sin t_{n/2-1}} \right\}, \quad (3.27)$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} |H_{b,M}(\omega_0(b))| &> 1 + \varepsilon_1, \\ |H_{b,M}(\omega_0(b)) - \varphi_a(\omega_0(b))| &> 1 + \varepsilon_1 - 1 = \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда число n нечетно. Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} \left(M - 1 + \max \left\{ M - 2, (M - 1) \sin t_{(n-3)/2} \right\} \right), \\ \Omega_1 &= 3\pi(M - 1 - \alpha_0). \end{aligned}$$

Для $b > \tilde{b}_1$, где $\tilde{b}_1 = -\frac{3}{\Omega_1} W\left(-\frac{1}{3}\right)$, а $W(\cdot)$ – W -функция Ламберта [35],

справедливо

$$\frac{1}{b} > \Omega_1 \exp(\pi(\alpha_0 - (M - 1))b). \quad (3.28)$$

В точке $\omega = 0$ дробь $H_{b,M}(\omega)$ можно представить выражением

$$H_{b,M}(0) = \frac{1}{2n} \exp(\pi\alpha_0 b) \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{(n-1)/2} (S_{l,m}^{(1)}(b) + S_{l,m}^{(2)}(b)),$$

где

$$\begin{aligned} S_{m,l}^{(1)}(b) &= a_m \exp(\pi b(m \sin t_l - \alpha_0)) \mu_{m,l}(b, 0), \\ S_{m,l}^{(2)}(b) &= a_m \exp(-\pi b(m \sin t_l + \alpha_0)) \nu_{m,l}(b, 0). \end{aligned} \quad (3.29)$$

В (3.29) при $l < (n - 1) / 2$ функции $\mu_{m,l}$ и $\nu_{m,l}$ задаются формулами (3.22), (3.23),

а при $l = (n - 1) / 2$ равны

$$\mu_{m,l}(b, \omega) = \nu_{m,l}(b, \omega) = \frac{b}{\omega^2 + b^2}. \quad (3.30)$$

Используя (3.28) и (3.29), получим, что для всех $b > \tilde{b}_1$ справедливо

$$|S_{M-1, (n-1)/2}^{(1)}(b)| = |a_m| \frac{1}{b} \exp(\pi b(M - 1 - \alpha_0)) \geq |a_m| \Omega_1.$$

Применяя неравенства (3.25), получим

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{(n-1)/2} (S_{l,m}^{(1)} + S_{l,m}^{(2)}) \right| \geq |S_{(n-1)/2, M-1}^{(1)}| - \\ & - \left| \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{(n-1)/2} (S_{l,m}^{(1)} + S_{l,m}^{(2)}) - S_{(n-1)/2, M-1}^{(1)} \right| \geq |a_m| \Omega_1 - S(b), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S(b) = & \frac{|a_{M-1}|}{b} \exp(-\pi b(M-1 + \alpha_0)) + 2 \sum_{m=0}^{M-2} \frac{|a_m|}{b} \exp(-\pi b \alpha_0) \operatorname{ch}(\pi b m) + \\ & + 4 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{(n-3)/2} |a_m| \left(\frac{1}{b} + \operatorname{ctg} t_l \right) \exp(-\pi b \alpha_0) \operatorname{ch}(\pi b m \sin t_l). \end{aligned}$$

Функция $S(b)$ является монотонно убывающей и имеет предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} S(b) = 0$.

Подберем число \tilde{b}_2 таким образом, чтобы

$$S(b) < \frac{|a_{M-1}| \Omega_1}{2}, \quad b > \tilde{b}_2.$$

Тогда для всех $b > b_1$, где

$$b_1 = \max \left\{ \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \frac{\ln(4n(1 + \varepsilon_1)) - \ln(\Omega_1 |a_{M-1}|)}{\pi(M-1)} \right\}, \quad (3.31)$$

справедливо неравенство

$$\left| H_{b,M}(0) - \varphi_a(0) \right| > \varepsilon_1, \quad b > b_1.$$

Следующая теорема дает возможность заменить непрерывную задачу (3.9) дискретной.

Теорема 3.3. Пусть заданы погрешность ε_0 , число M и некоторый отрезок $[\beta_0, \beta_1]$, на котором ищется решение непрерывной задачи

$$\min_{b \in [\beta_0, \beta_1]} \varepsilon(b, M).$$

Шаг Δ равномерного разбиения отрезка $[\beta_0, \beta_1]$

$$\Delta = \frac{\beta_1 - \beta_0}{R}, \quad R \in \mathbb{N},$$

можно подобрать таким образом, чтобы решение дискретной задачи

$$\min_{0 \leq r \leq R} \varepsilon(\beta_0 + r\Delta, M)$$

отличалось бы от решения непрерывной задачи не более, чем на $\varepsilon_0 / 10$

$$\left| \min_{b \in [\beta_0, \beta_1]} \varepsilon(b, M) - \min_{0 \leq r \leq R} \varepsilon(\beta_0 + r\Delta, M) \right| \leq \frac{\varepsilon_0}{10}. \quad (3.32)$$

Доказательство. Функция

$$\left(\varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega) \right)^2$$

и ее частная производная

$$\frac{\partial}{\partial b} \left[\left(\varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega) \right)^2 \right]$$

непрерывны при $\omega \in \mathbb{R}$, $b \in [\beta_0, \beta_1]$. Поэтому функционал $\Phi(b, M)$ (3.8) имеет производную по переменной b , равную [8]

$$\frac{\partial}{\partial b} \Phi(b, M) = \max_{\omega \in \Omega'} \left[\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{4}{a^2} h_a^2(\omega) - H_{b,M}(\omega) \right)^2 \right],$$

где

$$\Omega' \equiv \Omega'(b) = \left\{ \omega : \left(\frac{4}{a^2} h_a^2(\omega) - H_{b,M}(\omega) \right)^2 = \max_{\omega} \left(\frac{4}{a^2} h_a^2(\omega) - H_{b,M}(\omega) \right)^2 \right\}.$$

Погрешность (3.6) $\varepsilon(b, M)$ удовлетворяет равенству

$$\varepsilon(b, M) = \sqrt{\Phi(b, M)}.$$

Отличная от нуля рациональная дробь не может быть тождественно равна нулю на $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, поэтому $\Phi(b, M) \neq 0$ при любых значениях M и b . Отсюда следует, что функция $\varepsilon(b, M)$ имеет производную $\partial \varepsilon / \partial b$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} &= \frac{1}{2\sqrt{\Phi(b, M)}} \Phi'(b, M) = \frac{1}{2\sqrt{\Phi}} \max_{\omega \in \Omega'} \left[2 \left(\varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega) \right) \frac{\partial}{\partial b} H_{b,M}(\omega) \right] = \\ &= \max_{\omega \in \Omega'} \left[\text{sign} \left(\varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega) \right) \frac{\partial}{\partial b} H_{b,M}(\omega) \right] = \max_{\omega \in \Omega'} \left[\frac{\partial}{\partial b} \left| \varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega) \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

При этом в последней части (3.33)

$$|\varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega)| \neq 0, \quad \omega \in \Omega'(b).$$

Выведем оценку $\left| \frac{\partial H_{b,M}(\omega)}{\partial b} \right|$. Для функций $\mu_{m,l}$, $\nu_{m,l}$ справедливо

$$\left| \frac{\partial \mu_{m,l}}{\partial b} \right| \leq w_{m,l}(b), \quad \left| \frac{\partial \nu_{m,l}}{\partial b} \right| \leq w_{m,l}(b), \quad (3.34)$$

где

$$w_{m,l}(b) = \frac{2}{b} \operatorname{ctg} t_l \left(2 + 2 \left| \sin(\pi m \cos t_l) \right| + \left| \cos(\pi m \cos t_l) \right| \right) + \frac{2}{b^2} \left(2 + \left| \cos(\pi m \cos t_l) \right| \right)$$

при $l < \frac{n-1}{2}$ и

$$w_{m,l}(b) = \frac{1}{b^2}$$

при $l = \frac{n-1}{2}$. Выполняются также неравенства

$$\mu_{m,l}(b, \omega) \leq v_{m,l}(b), \quad \nu_{m,l}(b, \omega) \leq v_{m,l}(b), \quad (3.35)$$

$$v_{m,l}(b) = 2 \left(\frac{1}{b} + \operatorname{ctg} t_l \right), \quad l \neq \frac{n-1}{2},$$

$$v_{m,l}(b) = \frac{1}{b}, \quad l = \frac{n-1}{2}.$$

Из (3.34) и (3.35) следует, что

$$\left| \frac{\partial H_{b,M}}{\partial b} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{2n} \sum_{l=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sum_{m=0}^{M-1} a_m (e^{\pi m b \sin t_l} \mu_{m,l} + e^{-\pi m b \sin t_l} \nu_{m,l}) \right) \right| \leq S_1(b, \omega) + S_2(b, \omega),$$

где

$$\begin{aligned}
S_1(b, \omega) &= \frac{1}{2n} \left| \pi \sum_{l=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sum_{m=0}^{M-1} a_m m \sin t_l \left(\exp(\pi m b \sin t_l) \mu_{m,l} - \exp(-\pi m b \sin t_l) \nu_{m,l} \right) \right| \leq \\
&\leq \frac{\pi}{n} \sum_{l=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sum_{m=0}^{M-1} |a_m| m \sin t_l \operatorname{ch}(\pi m b \sin t_l) v_{m,l}(b), \\
S_2(b, \omega) &= \frac{1}{2n} \left| \sum_{l=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sum_{m=0}^{M-1} a_m \left(\exp(\pi m b \sin t_l) \frac{\partial \mu_{m,l}}{\partial b} + \exp(-\pi m b \sin t_l) \frac{\partial \nu_{m,l}}{\partial b} \right) \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sum_{m=0}^{M-1} |a_m| \operatorname{ch}(\pi m b \sin t_l) w_{m,l}(b).
\end{aligned}$$

Функции

$$\begin{aligned}
\Psi_1(b) &= \frac{\pi}{n} \sum_{l=0}^{\lfloor n/2-1 \rfloor} \sum_{m=0}^{M-1} |a_m| m \sin t_l \operatorname{ch}(\pi m b \sin t_l) v_{m,l}(b), \\
\Psi_2(b) &= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{\lfloor n/2-1 \rfloor} \sum_{m=0}^{M-1} |a_m| \operatorname{ch}(\pi m b \sin t_l) w_{m,l}(b)
\end{aligned}$$

выпуклы вниз, что позволяет оценить $\left| \frac{\partial H_{b,M}(\omega)}{\partial b} \right|$ сверху линейной функцией

$\Psi_0(b)$:

$$\left| \frac{\partial H_{b,M}(\omega)}{\partial b} \right| \leq S_1(b, \omega) + S_2(b, \omega) \leq \Psi_1(b) + \Psi_2(b) \leq \Psi_0(b).$$

Поскольку $\Psi_0(b)$ линейна, справедливо

$$\left| \frac{\partial H_{b,M}(\omega)}{\partial b} \right| \leq \max \{ \Psi_0(\beta_0), \Psi_0(\beta_1) \}. \quad (3.36)$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем [8] и учитывая (3.33), получим

$$| \varepsilon(b + \Delta, M) - \varepsilon(b, M) | = \Delta \left| \frac{\partial \varepsilon(b, M)}{\partial b} \right|_{b=\xi} \leq \max \{ \Psi_0(\beta_0), \Psi_0(\beta_1) \} \Delta, \quad \xi \in (b, b + \Delta).$$

Если число R таково, что

$$\frac{\beta_1 - \beta_0}{R} < \frac{\varepsilon_0}{10} \left(\max \{ \Psi_0(\beta_0), \Psi_0(\beta_1) \} \right)^{-1}, \quad (3.37)$$

то для $\Delta = (\beta_1 - \beta_0) / R$ получим

$$|\varepsilon(b + \Delta, M) - \varepsilon(b, M)| < \frac{\varepsilon_0}{10}, \quad b \in [\beta_0, \beta_1].$$

3.4. Численный метод аппроксимации неотрицательными рациональными дробями

Построим алгоритм поиска численного решения задачи (3.7) с дополнительным условием (3.10) неотрицательности дроби $H_{b,M}(\omega)$. Применяя теоремы 3.1-3.3, на интервале $b > 0$ можно выделить конечный набор B точек, в которых ищется решение. Для заданного M будем рассматривать вместо (3.9) задачу

$$\min_{b \in B_1} \max_{\omega \in \mathbb{R}} |\varphi_a(\omega) - H_{b,M}(\omega)|, \quad (3.38)$$

где

$$B_1 = \{b \in B : H_{b,M}(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}\}$$

Ниже описан алгоритм поиска численного решения задачи (3.7) с условием (3.10).

1. Задается число M_1 и далее методом градиентного спуска для каждого $M = 1, 2, \dots, M_1$ определяются действительные решения непрерывной задачи (3.9) $H_{b_{\text{онт}}(M), M}(\omega)$ и соответствующие ошибки $\varepsilon(b_{\text{онт}}(M), M)$. Ищутся корни дроби $H_{b_{\text{онт}}(M), M}(\omega)$ и проверяется условие $H_{b_{\text{онт}}(M), M}(\omega) \geq 0$.

2. Осуществляется выбор числа M , для которого рассматривается (3.38), и задается верхняя граница погрешности ε_1 .

Если дискретная задача (3.38) ранее не решалась, то выбирается M , соответствующее наименьшей погрешности $\varepsilon(b_{\text{онт}}(M), M)$, $M = 1, 2, \dots, M_1$. При наличии неотрицательных дробей $H_{b_{\text{онт}}(M), M}(\omega)$, приближающих $\varphi_a(\omega)$ с погрешностями γ_M , оценка ε_1 полагается равной $\min\{\gamma_M\}$. Если же все

найденные на шаге 1 $H_{b_{\text{опт}}(M),M}(\omega)$ не удовлетворяют условию (3.10), то полагается $\varepsilon_1 = 1/2$.

Рассмотрим теперь случай, когда задача (3.38) уже решалась для чисел $M = m_i$, $m_i \in \{m_i\}_{i=1}^I$, и для некоторых m_i были найдены неотрицательные решения и соответствующие ошибки δ_i . Тогда задается число M , для которого

$$\varepsilon(b_{\text{опт}}(M), M) = \min_{\substack{1 \leq m \leq M_1, \\ m \neq m_1, \dots, m_I}} \{\varepsilon(b_{\text{опт}}(m), m)\},$$

$$\varepsilon(b_{\text{опт}}(M), M) < \min_{1 \leq i \leq I} \{\delta_i\}.$$

Граница ε_1 определяется по формуле

$$\varepsilon_1 = \min\{\min\{\gamma_M\}, \min\{\delta_i\}\}.$$

Если

$$\min_{\substack{1 \leq m \leq M_1, \\ m \neq m_1, \dots, m_I}} \{\varepsilon(b_{\text{опт}}(m), m)\} \geq \min\{\delta_i\},$$

то алгоритм завершается.

3. Для выбранного M задается оценка снизу $\tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon(b_{\text{опт}}(M), M)$ погрешности решения задачи (3.9) с условием (3.10).

4. С помощью формул (3.12) или (3.18) находится число b_0 , а из (3.27) или (3.31) – число b_1 .

5. Ищется уточнение b_{10} верхней границы b_1 . При $\omega = 0$ для дроби $H_{b,M}(0)$, рассматриваемой в качестве функции аргумента b , выполняется соотношение

$$\left|H_{b,M}(0)\right| \leq \sum_{\substack{0 \leq m \leq M-1, \\ 0 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor}} \alpha_{m,l} \exp(\beta_{m,l} b) + \sum_{\substack{-M+1 \leq m \leq 0, \\ 0 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor}} \alpha_{m,l} \exp(\beta_{m,l} b), \quad (3.39)$$

где

$$\beta_{m,l} = \pi m \sin t_l$$

и

$$\alpha_{m,l} = \begin{cases} |a_m| \max_{b \in [b_0, b_1]} \mu_{m,l}(b, 0) / n, & m \geq 0, \\ |a_{-m}| \max_{b \in [b_0, b_1]} \nu_{m,l}(b, 0) / n, & m < 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

при $m = 0, \dots, M-1$, $l = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. В (3.40) функции $\mu_{m,l}(b, \omega)$ и $\nu_{m,l}(b, \omega)$ задаются выражениями (3.22), (3.23), (3.30). Используя формулу Тейлора, получим

$$\exp(\beta_{m,l} b) \approx p_{m,l}(b), \quad p_{m,l}(b) = 1 + \frac{\beta_{m,l} b}{1!} + \dots + \frac{(\beta_{m,l} b)^{n_{m,l}}}{n_{m,l}!}. \quad (3.41)$$

Количество слагаемых $n_{m,l} + 1$ суммы $p_{m,l}(b)$ в (3.41) определяется из условия

$$\left| p_{m,l}(b) - \exp(\beta_{m,l} b) \right| \leq \frac{\varepsilon_1}{20\alpha_{m,l} M \left[(n+1) / 2 \right]}$$

при $b \in [b_0, b_1]$. Функция

$$G_M(b) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{0 \leq m \leq M-1, \\ 0 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor}} a_m \mu_{m,l}(b, 0) p_{m,l}(b) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{0 \leq m \leq M-1, \\ 0 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor}} a_m \nu_{m,l}(b, 0) p_{-m,l}(b)$$

является рациональной дробью, причем $\left| H_{b,M}(0) - G_M(b) \right| \leq \varepsilon_1 / 10$ при $b \in [b_0, b_1]$.

Из всех лежащих на отрезке $[b_0, b_1]$ корней уравнений

$$\begin{aligned} G_M(b) &= 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_1 / 10, \\ G_M(b) &= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 / 10, \end{aligned}$$

выберем наибольший корень b_{10} . Число будет уточнением верхней границы отрезка, на котором располагается решение.

Таким же образом, используя аппроксимацию $G_M(b)$ дроби $H_{b,M}(\cos \tau)$ (см. формулу (3.15)), можно получить уточнение b_{00} левой границы b_0 .

6. Задается набор погрешностей $\tilde{\varepsilon}_s$, $s = 1, \dots, q$, $\tilde{\varepsilon}_0 < \tilde{\varepsilon}_1 < \dots < \tilde{\varepsilon}_q < \varepsilon_1$. С помощью алгоритма из шага 5 ищутся границы отрезков $[b_{0s}, b_{1s}]$, вне которых $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}_{q-s+1}$.

7. Выполняется разбиение каждого из отрезков $[b_{00}, b_{01}], \dots, [b_{0,q-1}, b_{0,q}], [b_{0,q}, b_{1,q}], [b_{1,q}, b_{1,q-1}], \dots, [b_{11}, b_{10}]$ на меньшие отрезки узлами вида b_{jkl} , $j = 0, 1$, $k = 0, \dots, q$, $l = 0, \dots, L - 1$, $L = L_0, L_{01}, L_1$,

$$\begin{aligned} b_{0,k} &= b_{0,k,0} < b_{0,k,1} < \dots < b_{0,k,L_0-1} < b_{0,k+1}, \quad k = 0, \dots, q-1, \\ b_{1,k} &< b_{1,k,0} < b_{1,k,1} < \dots < b_{1,k,L_1-1} = b_{1,k-1}, \quad k = 1, \dots, q, \\ b_{0q} &= b_{0,q,0} < b_{0,q,1} < \dots < b_{0,q,L_{01}-1} = b_{1q}, \end{aligned}$$

т.е. отрезки вида $[b_{0,k}, b_{0,k+1}]$ разбиваются на подотрезки L_0 узлами, отрезки $[b_{1,k}, b_{1,k+1}]$ — L_1 узлами, и, наконец, на отрезке $[b_{0,q}, b_{1,q}]$ выбирается L_{01} узлов. Подобное разбиение далее дает возможность сократить число точек, где ищется неотрицательное решение задачи (3.9). Теперь на отрезке $[b_{00}, b_{01}]$ имеется $S = (L_0 + L_1)q + L_{01}$ точек вида b_{jkl} . Для определенности отсортируем их в порядке возрастания и будем рассматривать точки $b = \tilde{\beta}_s$, $s = 1, \dots, S$.

8. Используя теорему 3.3, расположим на отрезках $[\tilde{\beta}_s, \tilde{\beta}_{s+1}]$, $s = 1, \dots, S$,

узлы с шагом $\Delta_s = \frac{\tilde{\beta}_{s+1} - \tilde{\beta}_s}{R(s)}$, для которого выполняется условие (3.32). Для

определения шага дискретизации на отрезке $[\tilde{\beta}_s, \tilde{\beta}_{s+1}] \subset [b_{00}, b_{10}]$ применим

формулу (3.37), задавая $R = R(s)$, $\beta_0 = \tilde{\beta}_s$, $\beta_1 = \tilde{\beta}_{s+1}$. При $[\tilde{\beta}_s, \tilde{\beta}_{s+1}] \subset [b_{0,k}, b_{0,k+1}]$

или $[\tilde{\beta}_s, \tilde{\beta}_{s+1}] \subset [b_{1,k+1}, b_{1,k}]$ положим $\varepsilon_0 = \tilde{\varepsilon}_{q-k}$, а для $[\tilde{\beta}_s, \tilde{\beta}_{s+1}] \subset [b_{0,q}, b_{1,q}]$ — $\varepsilon_0 = \tilde{\varepsilon}_0$.

Множество точек B , где ищется численное решение задачи (3.9) с условием (3.10), задается объединением

$$B = \bigcup_{s=1}^{S-1} \bigcup_{l=0}^{R(s)} \{\tilde{\beta}_s + l\Delta_s\}.$$

Пример 3.1. Найдем с помощью описанного метода численное решение задачи (3.7) с условием (3.10) для $a = 3$, $n = 20$, $1 \leq M \leq 20$. На первом этапе методом спуска найдем для всех $M = 1, \dots, 20$ оптимальные параметры $b_{\text{опт}}$.

Полученные значения $b_{\text{опт}}$ и ошибки $\varepsilon(b_{\text{опт}}(M), M)$ приводятся в таблице 6.

Таблица 6 – Оптимальные параметры $b_{\text{опт}}$ и погрешности $\varepsilon(b_{\text{опт}}, M)$, полученные при решении задач вида (3.9) методом спуска для различных чисел M

M	$b_{\text{опт}}$	ε
1	6.3285	$4.21 \cdot 10^{-1}$
2	1.0000	$2.29 \cdot 10^{-1}$
3	1.0000	$1.18 \cdot 10^{-1}$
4	1.0000	$6.50 \cdot 10^{-2}$
5	0.9401	$3.60 \cdot 10^{-2}$
6	0.6317	$1.84 \cdot 10^{-2}$
7	0.4454	$1.72 \cdot 10^{-2}$
8	0.2841	$7.42 \cdot 10^{-3}$
9	0.4232	$6.24 \cdot 10^{-3}$
10	0.1831	$2.72 \cdot 10^{-3}$
11	0.1767	$4.09 \cdot 10^{-3}$
12	0.1481	$1.03 \cdot 10^{-2}$
13	0.1234	$2.96 \cdot 10^{-2}$
14	0.1435	$1.21 \cdot 10^{-2}$
15	0.1492	$9.53 \cdot 10^{-3}$
16	0.1167	$3.60 \cdot 10^{-2}$
17	0.1031	$6.15 \cdot 10^{-2}$
18	0.1059	$5.50 \cdot 10^{-2}$
19	0.1004	$7.34 \cdot 10^{-2}$
20	0.0991	$7.72 \cdot 10^{-2}$

При $M = 10$ получена функция $H_{b_{\text{опт}}, M}(\omega)$, приближающая $\varphi_3(\omega)$ с наименьшей погрешностью $2.72 \cdot 10^{-3}$, а при $M = 12$ дробь $H_{b_{\text{опт}}, M}(\omega)$ является неотрицательной и ошибка аппроксимации составляет $1.03 \cdot 10^{-2}$. Для $M < 8$ и $M > 12$ погрешность приближения превышает $1.03 \cdot 10^{-2}$, а функции $H_{b_{\text{опт}}, M}(\omega)$ при $M = 8, 9, 10, 11$ не удовлетворяют условию неотрицательности. Поэтому задача (3.9) будет решаться для чисел $M = 8, 9, 10, 11$.

Результаты работы численного метода поиска решения (3.7) даны в таблице 7. Указаны левая b_0 и правая b_1 оценки границ отрезка, где ищется решения,

уточненные границы b_{00} и b_{10} , количество N_1 узлов дискретизации на $[b_{00}, b_{10}]$, а также число точек N_2 , где оказалось выполнено условие $H_{b,M}(\omega) \geq 0$.

Таблица 7 – Результаты, полученные при поиске неотрицательных решений путем сведения непрерывной задачи вида (3.9) для $M = 8, 9, 10, 11$ к дискретной задаче вида (3.38)

M	b_0	b_1	b_{00}	b_{10}	N_1	N_2	$b_{\text{опт}}$	ε
8	0.009	3.57	0.1361	0.5191	37 143	16 901	0.4702	$1.07 \cdot 10^{-2}$
9	0.0057	3.31	0.1358	0.4811	26 870	0	-	-
10	0.0068	3.16	0.1287	0.2764	10 935	0	-	-
11	0.0057	3.16	0.1291	0.2392	5 582	0	-	-

Для чисел $M = 9, 10, 11$ во всех точках дискретизации функция $H_{b,M}(\omega)$ не удовлетворяла требованию неотрицательности. Задача (3.38) была решена в случае $M = 8$, ошибка аппроксимации оказалась равной $\varepsilon = 1.07 \cdot 10^{-2}$. При этом методом спуска для $M = 12$ получена меньшая погрешность $\varepsilon = 1.03 \cdot 10^{-2}$. Поскольку функция $H_{b_{\text{опт}}, M}(\omega)$ при $M = 12$ неотрицательна, численное решение задачи (8) с условием (11) задается параметрами $b = 0.1481$, $M = 12$.

3.5. Аналоговые фильтры с АЧХ, аппроксимируемыми атомарными функциями $h_a(\omega)$

Неотрицательная дробно-рациональная аппроксимация $H_{b,M}(\omega)$ функции $\varphi_a(\omega)$ может быть использована для построения устойчивого аналогового фильтра. При этом АЧХ $|H(j\omega)|$ такого фильтра будет приближаться по форме к атомарной функции $h_a(\omega)$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{H_{b,M}(\omega)} \approx \frac{2}{a} h_a \left(\frac{\omega}{a-1} \right).$$

Передаточная функция $H(s)$ аналогового фильтра может быть найдена с помощью формулы [21]

$$H(j\omega)H(-j\omega) = H_{b,M}(\omega). \quad (3.42)$$

Для определения частотной характеристики $H(j\omega)$ ищутся комплексные нули и полюсы дроби $H_{b,M}(\omega)$, лежащие в верхней полуплоскости. Передаточная функция $H(s)$ получается из $H(j\omega)$ заменой $s = j\omega$.

Следующий пример демонстрирует особенности предложенных фильтров на основе атомарных функций $h_a(\omega)$.

Пример 3.2. Новые фильтры можно применять для восстановления сигналов по отсчетам. Выполним моделирование процесса ЦАП [1] с использованием фильтра 30-го порядка на основе функции $h_3(\omega)$. Для набора чисел $1 \leq M \leq 20$ в результате работы алгоритма из раздела 3.4 получены оптимальные параметры $M_{\text{опт}} = 13$, $b_{\text{опт}} = 0.2974$. Погрешность приближения (3.6) равна $1.14 \cdot 10^{-3}$. С помощью соотношения (3.42) получим фильтр $h_1(t)$, имеющий АЧХ $|H_1(j\omega)| = \sqrt{H_{b_{\text{опт}}, M_{\text{опт}}}(\omega)}$, показанную на рис. 6. Отметим, что число полюсов и нулей характеристики $H(j\omega)$ фильтра $h_1(t)$ отличается лишь на единицу, поэтому при $\omega \rightarrow \infty$ выполняется равенство $|H_1(j\omega)| = O(1/\omega)$.

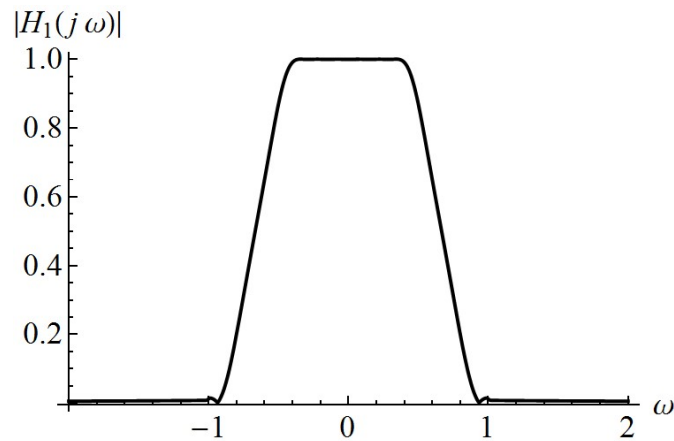


Рисунок 6 – АЧХ $|H_1(j\omega)|$ фильтра $h_1(t)$ на основе атомарной функции $h_3(\omega)$.

Применим построенный фильтр для ЦАП. Вычисляя свертку сигнала

$$s(t) = \frac{\cos t + 2}{1 + (t/4)^2}, \quad t \geq 0,$$

с некоторым ФНЧ, получим сигнал $s_0(t)$. Эффективная ширина полосы [23] спектра $s_0(t)$ равна $\Omega_{\text{эф}} = 2.4$. В соответствие с формулой (1.11) разд. 1.2, восстановление сигнала фильтром с идеальной АЧХ $h_s(\omega)$ обеспечивает шаг дискретизации Δ , удовлетворяющий неравенству $\Delta \leq \pi / (2\Omega_{\text{эф}}) = 0.654$. Поскольку частотная характеристика построенного аналогового фильтра отличается от идеальной и затухает со скоростью $O(1/\omega)$, при восстановлении сигнала возникнет эффект просачивания высокочастотных компонент. Для снижения данного явления шаг выбран меньше, чем 0.654, $\Delta = 0.422$. Сопоставим конечному набору $\{s_0(k\Delta)\}$ отсчетов сигнала $s_0(t)$ последовательность импульсов шириной 0.1 и имеющих амплитуды $s_0(k\Delta)$. Для восстановления сигнала вычислим свертку этой последовательности со сглаживающим ФНЧ. Кроме атомарного фильтра $h_1(t)$ используем также фильтр Баттерворта [21] 30-го порядка $h_2(t)$. Импульсные характеристики $h_1(t)$ и $h_2(t)$ показаны на рисунке 7.

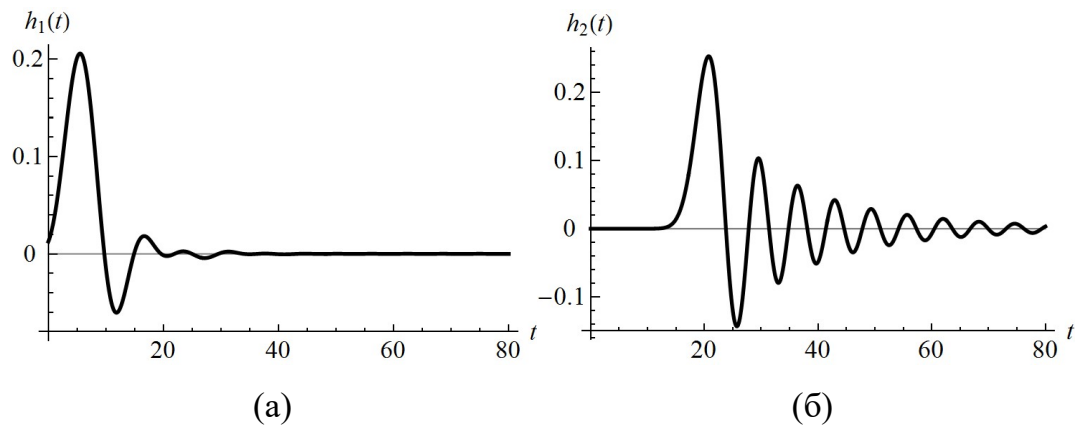


Рисунок 7 – Импульсные характеристики фильтров $h_1(t)$ (а) и $h_2(t)$ (б); серой линией показана ось t .

Для сглаживания применялись растянутые по переменной t фильтры $h_1(7.2t)$ и $h_2\left(\frac{\pi}{\Delta}t\right)$. Полоса пропускания фильтра $h_1(7.2t)$ полностью охватывает эффективную ширину полосы спектра сигнала $s_0(t)$, а полоса подавления $h_1(7.2t)$ начинается несколько левее точки $\omega = 2\frac{\pi}{\Delta} - \Omega_{\text{эф}}$, где появляются высокочастотные составляющие спектра $s_0(t)$. На рисунке 10 показан реконструированный с помощью фильтров $h_1(t)$ и $h_2(t)$ сигнал $s_0(t)$. Задержка не учитывалась. Для восстановления использовалась выборка из первых 25-ти значимых отсчетов. Как видно из рисунков 8а и 8б, фильтры $h_1(t)$ и $h_2(t)$ обеспечили качественную реконструкцию сигнала $s_0(t)$. При восстановлении $s_0(t)$ с применением фильтра $h_1(t)$ возникла небольшая погрешность.

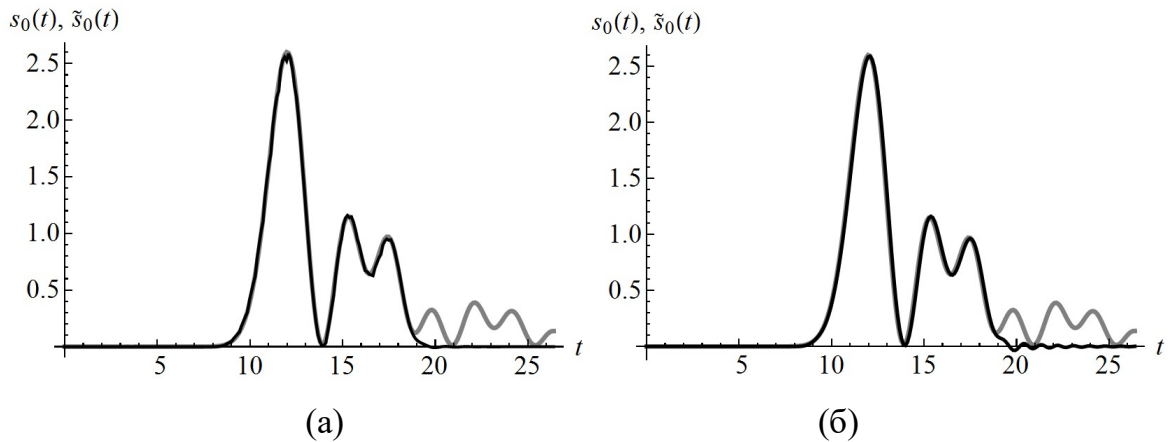


Рисунок 8 – Сигнал $s_0(t)$ (серая линия) и результат его восстановления $\tilde{s}_0(t)$ (черная линия) по 25-ти отсчетам с помощью фильтров $h_1(t)$ (а) и $h_2(t)$ (б).

На рисунке 9 приводится результат восстановления сигнала $s_0(t)$ по усеченной выборке: первые 10 из 25 ранее использовавшихся отсчетов были отброшены. В этом случае атомарный фильтр $h_1(t)$ позволил восстановить сигнал без потери качества, а при применении $h_2(t)$ возникла существенная ошибка. Быстрое затухание ИХ $h_1(t)$ делает фильтр малочувствительным к отбрасыванию отсчетов.

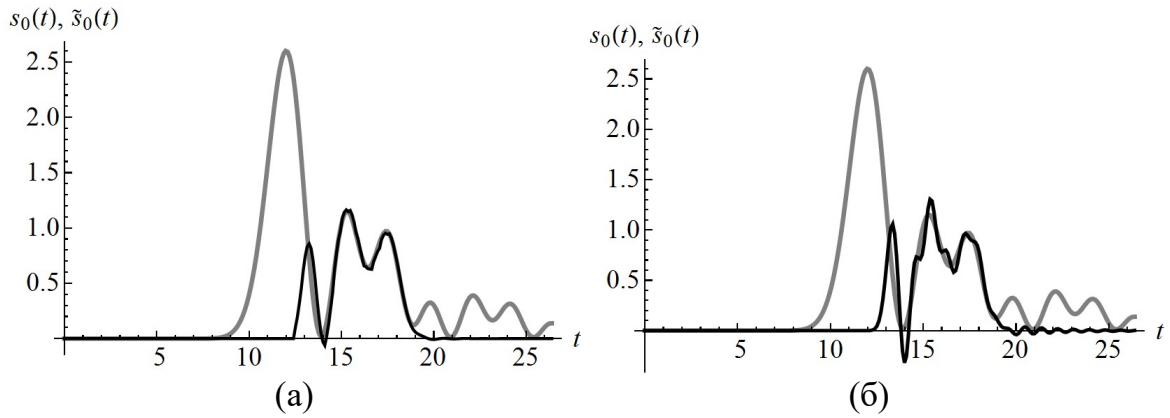


Рисунок 9 – Сигнал $s_0(t)$ (серая линия) и результат его восстановления $\tilde{s}_0(t)$ (черная линия) по 15-ти отсчетам с помощью фильтров $h_1(t)$ (а) и $h_2(t)$ (б).

3.6. Амплитудно-частотные характеристики на основе других финитных функций

Алгоритм из раздела 3.4 может быть использован для поиска дробно-рациональных приближений квадратов различных неотрицательных финитных функций, обладающих быстро сходящимся рядом Фурье. Пусть финитная функция $\varphi_0(\omega) \geq 0$ имеет носитель $[-1, 1]$ и спектр $F[\varphi](t)$. Ряд Фурье $\varphi_0(\omega)$ задается формулой

$$\varphi_0(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(jk\pi\omega),$$

где

$$c_k = \frac{1}{2} F[\varphi_0](k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Коэффициенты

$$a_m = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k c_{m-k}$$

определяют разложение в ряд Фурье функции $\varphi(\omega) = \varphi_0^2(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \exp(jm\pi\omega). \quad (3.43)$$

Используя частичные суммы $\varphi^{(M)}(\omega)$ ряда (3.43),

$$\varphi^{(M)}(\omega) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} a_m \exp(jm\pi\omega),$$

по формуле, аналогичной (3.5), можно получить действительную аппроксимирующую $\varphi(\omega)$ рациональную дробь

$$H_{b,M}(\omega) = \frac{1}{2nj} \sum_{l=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(M)}(\cos t_l + jb \sin t_l)(-\sin t_l + jb \cos t_l)}{\cos t_l + jb \sin t_l - \omega}. \quad (3.44)$$

С помощью алгоритма оптимизации из раздела 3.4 находится неотрицательная функция $H_{b_{\text{опт}}, M_{\text{опт}}}(\omega)$. Далее на основе $H_{b_{\text{опт}}, M_{\text{опт}}}(\omega)$ можно построить аналоговый фильтр с АЧХ $|H(j\omega)|$:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{H_{b_{\text{опт}}, M_{\text{опт}}}(\omega)} \approx \varphi_0(\omega).$$

На рисунке 10а показан нормированный относительно носителя В-сплайн $B^{(2)}(\omega)$ [42], а на рисунке 10б – АЧХ аналогового фильтра на основе функции $B^{(2)}(\omega)$. Методом спуска были получены оптимальные параметры $b_{\text{опт}} = 0.3074$ и $M_{\text{опт}} = 9$, определяющие действительную дробь, погрешность приближения составила $\varepsilon = 1.9 \cdot 10^{-3}$. С помощью алгоритма поиска неотрицательной дробно-рациональной аппроксимации найдены параметры $b_{\text{опт}} = 0.177$, $M_{\text{опт}} = 11$, погрешность оказалась равной $\varepsilon = 2.79 \cdot 10^{-3}$.

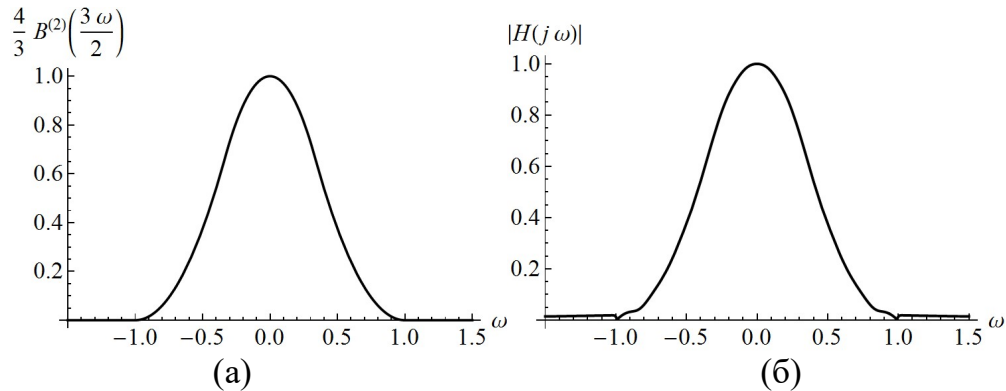


Рисунок 10 – Сплайн $\frac{4}{3} B^{(2)}\left(\frac{3}{2}\omega\right)$ (а) и АЧХ $|H(j\omega)|$ на его основе (б).

3.7. Цифровые БИХ-фильтры с АЧХ на основе атомарных функций $h_a(x)$

Результатом воздействия цифрового БИХ-фильтра с коэффициентами ИХ $\{h(k)\}_{k=0}^{\infty}$ на входной сигнал $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ является последовательность [1]

$$y(k) = \sum_{l=0}^{\infty} x(k-l)h(l). \quad (3.44)$$

Уравнение связи (3.44) обычно записывается в рекурсивной форме

$$y(k) = \sum_{l=0}^L b_l x(k-l) - \sum_{l=1}^K a_l y(k-l),$$

где a_1, \dots, a_K и b_0, \dots, b_L – коэффициенты. Передаточная функция $H_d(z)$ фильтра задается формулой

$$H_d(z) = \frac{\sum_{l=0}^L b_l z^{-l}}{1 + \sum_{l=1}^K a_l z^{-l}}. \quad (3.45)$$

Синтез ФНЧ с бесконечной ИХ наиболее часто осуществляется путем преобразования аналоговых прототипов. Используя стандартные методы, из непрерывных фильтров на основе атомарных функций $h_a(\omega)$ можно получить БИХ-фильтры с АЧХ вида

$$|H_d(\exp(j\theta))| \approx \frac{2}{a} h_a \left(\frac{\theta}{\theta_1(a-1)} \right),$$

где θ_1 – граничная частота полосы подавления.

Рассмотрим здесь два различных классических метода синтеза БИХ-фильтров – алгоритмы инвариантной ИХ и билинейного преобразования [1,6].

Пусть $H(s)$ – передаточная функция аналогового фильтра $h(t)$, имеющего порядок n и АЧХ $|H(j\omega)| \approx \varphi_a(\omega)$. В методе инвариантной ИХ функция $H(s)$

раскладывается в сумму элементарных дробей:

$$H(s) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\xi_l}{s - p_l},$$

где p_0, \dots, p_{n-1} – полюсы $H(s)$, ξ_0, \dots, ξ_{n-1} – коэффициенты разложения. Для получения передаточной функции $H_d(z)$ дискретного фильтра используется формула

$$H_d(z) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\xi_l}{1 - z^{-1} \exp(p_l T)}. \quad (3.46)$$

В (3.46) параметр $T < \pi$ задает интервал дискретизации ИХ. Фильтр с передаточной функцией (3.46) имеет граничные частоты θ_0, θ_1 полос пропускания и подавления, равные $\theta_1 = T$, $\theta_0 = T(a - 2) / a$. Описанный метод позволяет получать дискретные фильтры с коэффициентами $h_d(k)$, совпадающими со значениями ИХ аналоговых прототипов, $h_d(k) = h(kT)$. В случае атомарных аналоговых фильтров после подобного преобразования сохраняется быстрое затухание ИХ. В то же время медленное затухание АЧХ непрерывных атомарных фильтров повышает отклонение АЧХ дискретных фильтров в полосе пропускания. На рисунке 11 показаны АЧХ некоторых атомарных БИХ-фильтров, полученных методом инвариантной ИХ.

При билинейном преобразовании переход от функции $H(s)$ к $H_d(z)$ осуществляется с помощью формулы, задающей связь между переменными s и z :

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (3.47)$$

Соотношение между дискретной и непрерывной частотами нелинейно:

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

поэтому при переходе от непрерывного фильтра к дискретному форма АЧХ искажается. Описанный в разделе 3.6 метод построения фильтров на основе

финитных функций позволяет устранить этот недостаток с помощью синтеза аналогового фильтра с предварительно измененной АЧХ.

Пусть требуется построить неотрицательное дробно-рациональное приближение четной функции $\psi(\omega)$ с носителем $[-1, 1]$, разложение которой в ряд Фурье равно

$$\psi(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(\pi m \omega), \quad (3.48)$$

где a_0, a_1, \dots – коэффициенты. Частичные суммы ряда (3.48) есть функции

$$\psi^{(M)}(\omega) = \sum_{m=0}^{M-1} a_m \cos(\pi m \omega). \quad (3.49)$$

Подставляя $\psi^{(M)}(\omega)$ вместо $\varphi_a^{(M)}(\omega)$ в (3.5), получим дробь $H_{b,M}(\omega)$, аппроксимирующую $\psi(\omega)$ с некоторой погрешностью. Далее, применяя метод из разд. 3.4, можно сконструировать аналоговый фильтр с АЧХ $|H(j\omega)| \approx \sqrt{\psi(\omega)}$.

Положим

$$\psi(\omega) = \varphi_a \left(\frac{2}{T} \operatorname{arctg} \left(\omega \operatorname{tg} \frac{T}{2} \right) \right).$$

Тогда, согласно (3.47), получим БИХ-фильтр с передаточной функцией

$$H_d(z) = H \left(\frac{T}{2} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \operatorname{ctg} \frac{T}{2} \right) \quad (3.50)$$

и с АЧХ, обладающей свойством

$$|H_d(\exp(j\theta))| \approx \sqrt{\varphi_a \left(\frac{\theta}{T} \right)}, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (3.51)$$

Граничные частоты полос пропускания и подавления фильтра с АЧХ (3.51) равны $\theta_1 = T$, $\theta_0 = T(a - 2) / a$. Отметим, что медленное затухание частотных характеристик аналоговых атомарных фильтров в случае билинейного преобразования плохо сказывается на отклонении БИХ-фильтра в полосе подавления. Примеры АЧХ некоторых полученных данным методом фильтров показаны на рисунке 11.

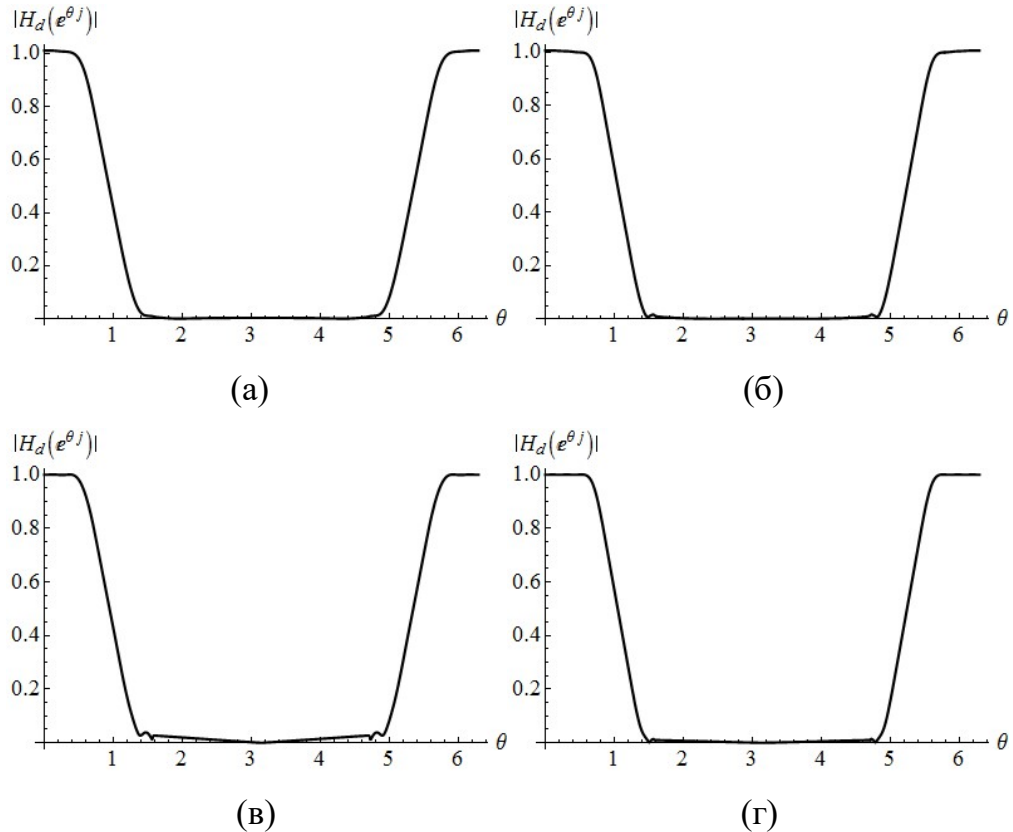


Рисунок 11 – Амплитудно-частотные характеристики $|H_d(\exp(j\theta))|$ цифровых БИХ-фильтров на основе функции $h_a(\omega)$, полученные методами инвариантной ИХ и билинейного преобразования для $n = 20, 30$; (а) $a = 2.5$, $n = 20$, метод инвариантной ИХ, (б) $a = 3$, $n = 30$, метод инвариантной ИХ, (а) $a = 2.5$, $n = 20$, метод билинейного преобразования, (б) $a = 3$, $n = 30$, метод билинейного преобразования.

3.8. Численный эксперимент

Новые БИХ-фильтры могут применяться для повышения частоты дискретизации сигналов. Рассмотрим сигнал

$$y(k) = \begin{cases} f(k\Delta), & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

где Δ – шаг, равный $\Delta = \pi / 12$, а функция f определяется выражением

$$f(t) = \operatorname{sinc}^3\left(\frac{t-13}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2(t-20) + \frac{1}{6}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{t-33}{2}\right).$$

Сигнал $\{y(k)\}$ является физически реализуемым и имеет частотную характеристику $Y(\exp(j\theta)) = Z[\{y(k)\}](\exp(j\theta))$, обладающую свойством $|Y(\exp(j\theta))| \approx 0$ при $\theta \in [\pi/6, 11\pi/6]$. Удаляя из последовательности $\{y(k)\}$ элементы с номерами, не кратными 3, получим дискретный сигнал $\{y_0(m)\}$ с отсчетами

$$y_0(m) = y(3m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Поставим задачу восстановления сигнала $\{y(k)\}$ по последовательности $\{y_0(m)\}$, или, что то же самое, задачу повышения частоты дискретизации $\{y_0(m)\}$ в 3 раза. Интерполяция с коэффициентом 3 осуществляется путем вычисления дискретной свертки $\{\hat{y}(k)\}$ сигнала $\{y_1(k)\}$ [5], равного

$$y_1(k) = \begin{cases} y_0(m), & k = 3m, \\ 0, & k \neq 3m, \end{cases}$$

с ИХ $\{h(k)\}$ цифрового ФНЧ:

$$\hat{y}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1(k-l)h(l). \quad (3.52)$$

В случае применения БИХ-фильтра

$$\hat{y}(k) = \sum_{l=0}^L b_l y_1(k-l) - \sum_{l=1}^K a_l \hat{y}(k-l), \quad (3.53)$$

где b_0, \dots, b_L и a_1, \dots, a_K – коэффициенты фильтра с передаточной функцией $H_d(z)$ вида (3.45).

На рисунке 12 показана АЧХ $|Y_1(\exp(j\theta))|$ сигнала $\{y_1(k)\}$, состоящая из трех копий характеристики $|Y(\exp(j\theta))|$. Для восстановления сигнала $\{y(k)\}$ по последовательности $\{y_0(m)\}$ нужно подавить две лишние копии $|Y(\exp(j\theta))|$, располагающиеся в полосе $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Отсюда следует, что ФНЧ $\{h(k)\}$ в

(3.52) должен иметь граничные частоты полос пропускания и подавления $\theta_0 \geq \pi / 6$, $\theta_1 \leq \pi / 2$.

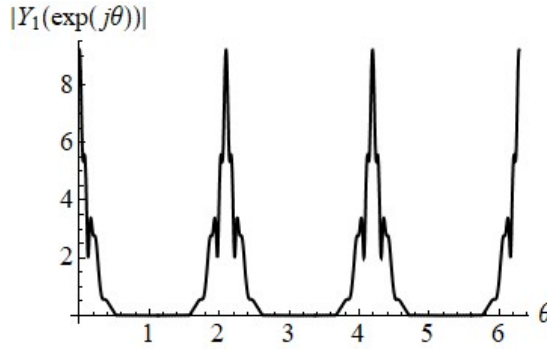


Рисунок 12 – Амплитудно-частотная характеристика $|Y_1(\exp(j\theta))|$ сигнала $\{y_1(k)\}$.

В процессе интерполяции будем использовать несколько различных ФНЧ 30-го порядка: атомарный фильтр $\{h_1(k)\}$ и фильтр Баттерворта $\{h_2(k)\}$, полученные методом инвариантной ИХ; атомарный фильтр $\{h_3(k)\}$ и фильтр Баттерворта $\{h_4(k)\}$, построенные с помощью билинейного преобразования. Ниже приводится описание аналоговых прототипов $\{h_1(k)\}, \dots, \{h_4(k)\}$.

Прототипом $\{h_1(k)\}$ является непрерывный фильтр на основе функции $\varphi_3(\omega)$ с АЧХ $|H_1(j\omega)| = \sqrt{H_{b,M}(\omega)}$ (формула (3.42)), где $b = 0.29471$, $M = 13$. Для данных значений параметров дробь $H_{b,M}(\omega)$ неотрицательна и аппроксимирует $\varphi_3(\omega)$ с погрешностью (3.6), равной $\varepsilon = 1.1 \cdot 10^{-3}$.

Прототип фильтра $\{h_2(k)\}$ имеет АЧХ $|H_2(j\omega)| = \sqrt{B(1.25 \cdot \omega)}$, где $B(\omega)$ – функция Баттерворта [21]: $B(\omega) = 1 / (1 + \omega^{2n})$.

Для АЧХ $|H_3(j\omega)|$ аналогового прототипа $\{h_3(k)\}$ выполняется равенство $|H_3(j\omega)| = \sqrt{H_{b,M}(\omega)}$, где дробь $H_{b,M}(\omega)$ с параметрами $b = 0.14883$, $M = 16$ аппроксимирует функцию $\varphi_3\left((2/T) \arctg(\omega \operatorname{tg}(T/2))\right)$ с ошибкой $\varepsilon = 1.7 \cdot 10^{-3}$.

Для построения $\{h_4(k)\}$ использован аналоговый фильтр с АЧХ

$$|H_4(j\omega)| = \sqrt{B \left(1.25\omega \frac{T}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{T}{2} \right)}.$$

Передаточные функции цифровых фильтров $\{h_1(k)\}$, $\{h_2(k)\}$ были получены из $H_1(s)$, $H_2(s)$ по формуле (3.46). Для синтеза $\{h_3(k)\}$ применялось правило (3.50), а фильтр $\{h_4(k)\}$ построен с помощью соотношения (3.47). Интервал дискретизации для всех фильтров равен $T = \pi / 2$. Коэффициенты БИХ-фильтров определялись путем приведения их передаточных функций к форме (3.45). Последовательности $h_l(k)$, $l = 1, \dots, 4$, показаны на рисунке 13. Здесь и далее в разд. 3 последовательности $\{x(k)\}$ представлены на графиках в виде ломаных с узлами в точках $(k; x(k))$. Графики на рисунке 13 показывают различие между классическими фильтрами Баттерворта и атомарными фильтрами: ИХ последних затухает намного быстрее.

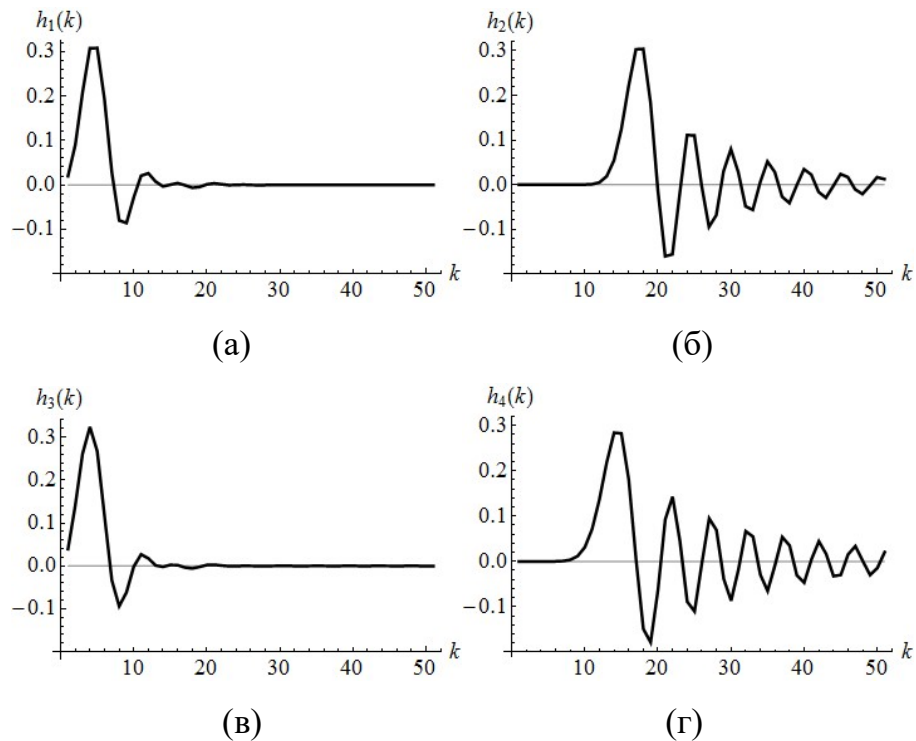


Рисунок 13 – Последовательности коэффициентов ИХ используемых фильтров: (а) $\{h_1(k)\}$, (б) $\{h_2(k)\}$, (в) $\{h_3(k)\}$, (г) $\{h_4(k)\}$.

Используя найденные коэффициенты передаточных функций БИХ-фильтров, воспользуемся формулой (3.53) для повышения частоты дискретизации $\{y_0(m)\}$. Отметим, что при применении формулы (3.53) выходная последовательность будет равна $\{\hat{y}(k) / 3\}$ [5], поэтому ее следует домножить на коэффициент усиления 3.

Последовательности $\{\hat{y}(k)\}$, полученные при использовании каждого из фильтров $\{h_l(k)\}$, $l = 1, \dots, 4$, показаны на рисунке 14. Задержка сигнала во внимание не принималась.

Графики на рис. 14 отличаются мало. Небольшая ошибка возникла при применении атомарного фильтра $\{h_3(k)\}$, построенного с помощью билинейного преобразования.

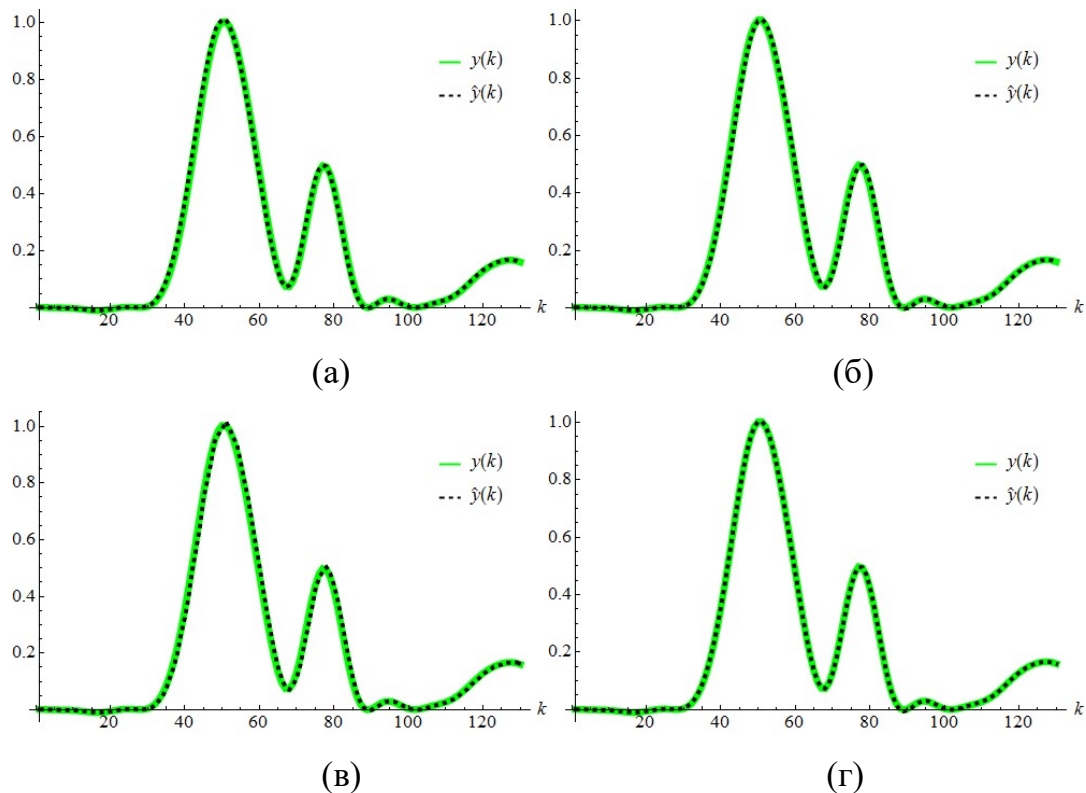


Рисунок 14 – Исходный сигнал $\{y(k)\}$ (зеленая линия) и результат его восстановления $\{\hat{y}(k)\}$ (пунктирная линия) с помощью фильтров (а) $\{h_1(k)\}$, (б) $\{h_2(k)\}$, (в) $\{h_3(k)\}$, (г) $\{h_4(k)\}$.

Отбросим теперь первые 15 отличных от нуля отсчетов $\{y_0(k)\}$ и сформируем последовательность $\{y_1(k)\}$ по правилу

$$y_1(k) = \begin{cases} y_0(m), & k = 3m, m > 14, \\ 0, & k \neq 3m, \\ 0, & k = 3m, m \leq 14. \end{cases} \quad (3.54)$$

Результат восстановления сигнала $\{y(k)\}$ по последовательности (3.54) приводится на рисунке 15.

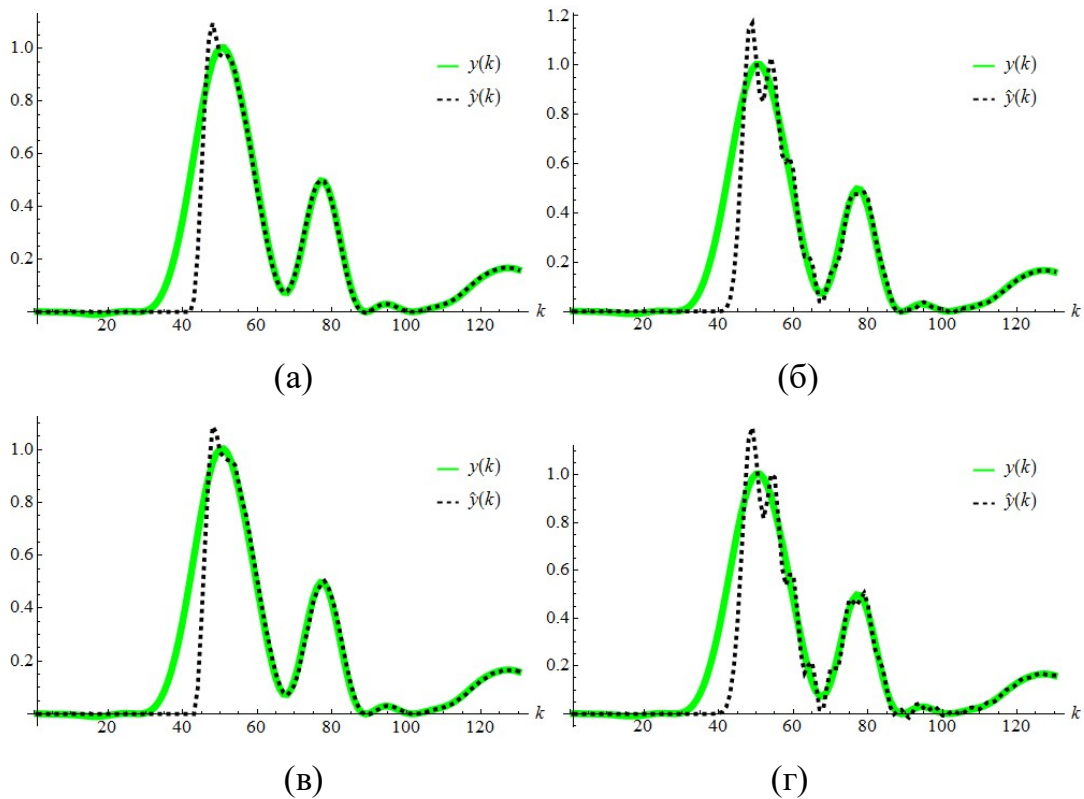


Рисунок 15 – Исходный сигнал $\{y(k)\}$ (зеленая линия) и результат его восстановления $\{\hat{y}(k)\}$ (пунктирная линия) по усеченной выборке с 15-ю отброшенными отсчетами с помощью фильтров (а) $\{h_1(k)\}$, (б) $\{h_2(k)\}$, (в) $\{h_3(k)\}$, (г) $\{h_4(k)\}$.

Отбрасывание отсчетов практически не повлияло на качество восстановления сигнала $\{y(k)\}$ с помощью фильтров $\{h_1(k)\}$, $\{h_3(k)\}$ на основе

атомарной функции $h_3(\omega)$. При применении классических фильтров $\{h_2(k)\}$, $\{h_4(k)\}$ возникла значительная ошибка.

Похожий результат был получен при восстановлении непрерывного сигнала с использованием аналогового атомарного фильтра (см. раздел 3.5).

Выводы к главе 3

В работе впервые представлен численный метод построения неотрицательных дробно-рациональных приближений квадратов атомарных функций $h_a(x)$. Доказаны теоремы об оценке границ отрезка, на котором ищется решение и теорема о выборе шага дискретизации, позволяющие перейти от непрерывной задачи минимизации функционала к дискретной. Дано описание численного метода определения конечного множества точек, в которых ищется неотрицательное решение, и приведен пример практического применения этого метода.

Наличие алгоритма поиска неотрицательных рациональных дробей, аппроксимирующих $h_a^2(\omega)$, позволяет строить аналоговые фильтры с АЧХ на основе функции $h_a(\omega)$. Новые фильтры обладают важным преимуществом – при небольших значениях параметра a они имеют быстро затухающие ИХ. Это свойство дает возможность существенно снизить погрешность усечения в процессе реконструкции сигналов. Предложенные в работе фильтры имеют и недостатки. В частности, количество нулей числителя передаточной функции на основе построенных дробно-рациональных приближений в общем случае отличается от количества нулей знаменателя лишь на единицу, поэтому при больших ω АЧХ стремится к нулю как $O(1/\omega)$.

Приведен пример моделирования ЦАП, в котором продемонстрирована малая чувствительность фильтра на основе функции $h_3(\omega)$ к отбрасыванию отсчетов восстанавливаемого сигнала. При этом во время восстановления с

помощью классического фильтра Баттерворта после отбрасывания отсчетов погрешность оказалась довольно большой.

Может оказаться полезной возможность применения предложенного метода аппроксимации с целью построения дробно-рациональных приближений не только $h_a^2(\omega)$, но и других неотрицательных финитных функций с быстро сходящимся рядом Фурье.

На основе полученных аналоговых фильтров построены цифровые БИХ-фильтры с АЧХ, приближающимися по форме к атомарным функциям $h_a(\omega)$. Синтез выполнялся с помощью алгоритмов инвариантной ИХ и билинейного преобразования. Предложен метод, позволяющий получить неискаженную форму АЧХ при переходе от аналогового атомарного фильтра к цифровому посредством билинейного преобразования.

Проведен численный эксперимент, заключавшийся в повышении частоты дискретизации цифрового сигнала с использованием атомарных БИХ-фильтров. Новые фильтры, в отличие от классических на основе функции Баттерворта, позволили восстановить сигнал по усеченной выборке отсчетов без увеличения погрешности.

Глава 4. Модифицированный метод ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией

4.1. Введение

Технология цифровой модуляции, основанная на мультиплексировании с ортогональным частотным разделением каналов [2,29] (orthogonal frequency division multiplexing, OFDM) широко используется для беспроводной передачи данных. Преимущества схемы OFDM заключаются в устойчивости к искажениям в канале, а также в ее гибкости – возможности менять параметры модуляции, например, размер сигнального созвездия и скорость кодирования [2]. Технология OFDM и ее сочетание с методами множественного доступа (orthogonal frequency-division multiple access, OFDMA) применяются в современных стандартах беспроводной связи IEEE 802.11 (Wi-Fi), IEEE 802.16 (WiMAX), LTE.

Сигналы OFDM имеют медленно спадающий спектр [2]. Из-за этого возникает внеполосное излучение, влияющее на сигналы, спектры которых расположены в соседних частотных полосах [27,28,39,45,46]. Медленный спад спектра может отрицательно влиять на восстановление данных, передающихся по схеме OFDMA [27], в которой имеющийся диапазон частот разделяется на субполосы, соответствующие различным пользователям. Внеполосное излучение также плохо сказывается на работе когнитивных и программно-определяемых радиосистем [28], где соседние полосы частот используются различными радиосредствами.

Для подавления внеполосного излучения спектра OFDM-сигнала в классической схеме используется оконная обработка [2,17]. Разработаны и другие методы улучшения спектра: схема OFDM с фильтрацией [27,28,46] и предварительное кодирование [39]. В данном разделе исследуется возможность повышения эффективности алгоритма фильтрации OFDM-сигналов.

Алгоритм OFDM с фильтрацией применяется в случае, когда имеющаяся полоса частот разделена на несколько субполос, для каждой из которых

формируется свой сигнал. Сигнал, соответствующий субполосе, подвергается фильтрации, что позволяет снизить его излучение вне данной субполосы. При использовании классической схемы OFDM для снижения взаимодействия между соседними спектрами сигналов выделяется набор нулевых защитных поднесущих частот, что приводит к снижению эффективности использования имеющегося частотного диапазона. Технология OFDM с фильтрацией может быть использована при существенно меньшем количестве защитных частот по сравнению с классической схемой [46].

Благодаря низкой сложности расчета в схеме OFDM с фильтрацией наиболее часто применяются цифровые фильтры, полученные усечением идеальной ИХ весовой оконной функцией [27,28,46].

4.2. Метод ортогонального частотного мультиплексирования

Низкочастотное комплексное представление OFDM-символа имеет вид [2]

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} d_k \exp(2\pi jk(t - t_s) / T), & t \in [t_s, t_s + T], \\ 0, & t \notin [t_s, t_s + T], \end{cases} \quad (4.1)$$

где t_s – время начала символа, T – его длительность, d_0, \dots, d_{N-1} – символы квадратурной амплитудной модуляции (quadrature amplitude modulation, QAM). Данная формула соответствует OFDM-сигналу с набором поднесущих частот

$$f_c - (k + 1 / 2) / T, \quad k = -N / 2, \dots, N / 2 - 1,$$

расположенных симметрично вокруг несущей частоты f_c . Сигнал $S(t)$ на отрезке $t \in [t_s, t_s + T]$ полностью описывается конечным числом своих отсчетов в моменты времени $t - t_s = Tl / N_1, \quad l = 0, \dots, N_1 - 1, \quad N_1 \geq N,$ поэтому OFDM-символу (4.1) эквивалентен дискретный сигнал s_l , равный

$$s_l = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} d_k \exp(2\pi jlk / N_1), \quad 0 \leq l \leq N_1 - 1, \quad (4.2)$$

где $d_k = 0$ при $N \leq k \leq N_1 - 1$. Для чисел $N_1 > N$ дискретизация сигнала $S(t)$ имеет запас по частоте. Избыточная дискретизация требуется для реконструкции сигнала $S(t)$ в цифро-аналоговом преобразователе [2]. Формула (4.2) представляет собой обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) размера N_1 последовательности QAM-символов, дополненной $N_1 - N$ нулями.

Числа d_k можно восстановить, вычисляя дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности s_l :

$$d_k = \sum_{l=0}^{N_1-1} s_l \exp(-2\pi jkl / N_1), \quad k = 0, \dots, N_1 - 1. \quad (4.3)$$

Сигнал OFDM состоит из набора символов $S(t)$. При прохождении сигнала через канал отдельные поднесущие могут задерживаться. В этом случае возникает эффект, называемый интерференцией между поднесущими [2]. При наличии данного эффекта QAM-символы не могут быть восстановлены в форме ДПФ (4.3). Для устранения интерференции между поднесущими к каждому OFDM-символу вида (4.2) слева добавляется циклический префикс (ЦП) – набор из n последних отсчетов символа. Сигнал u_l , состоящий из одного OFDM-символа и ЦП, имеет вид

$$u_l = \begin{cases} s_{N_1-n+l}, & 0 \leq l \leq n-1, \\ s_{l-n}, & n \leq l \leq N_1+n-1. \end{cases}$$

4.3. Метод OFDM с фильтрацией и его применение при асинхронной передаче данных

При применении метода OFDM с фильтрацией в частотной области выделяется P субполос

$$[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}], \quad p = 1, \dots, P.$$

Каждой субполосе $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ соответствует свой OFDM-сигнал $x_l^{(p)}$, образованный отсчетами K OFDM-символов $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ длиной N с ЦП $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=0}^{n-1}$ длиной n , $q = 1, \dots, K$:

$$x_l^{(p)} = \sum_{q=1}^K u_{l-l_q}^{(p,q)}, \quad (4.4)$$

где $l_q = (q-1)(N+n)$. В сумме (4.4) отсчеты $u_l^{(p,q)}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} u_l^{(p,q)} &= 0, \quad l < 0, \\ u_l^{(p,q)} &= 0, \quad l \geq n + N. \end{aligned}$$

На отрезках $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ расположены центры спектров поднесущих, образующих сигнал $x_l^{(p)}$, а интервалы вида $(\omega_{p,2}, \omega_{p+1,1})$ содержат защитные частоты.

Символы $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ – ОДПФ последовательности $\{d_k^{(p,q)}\}_{k=0}^{N-1}$:

$$u_{n+l}^{(p,q)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} d_k^{(p,q)} \exp(j2\pi kl / N), \quad l = 0, \dots, N-1,$$

где числа $d_k^{(p,q)}$, $k = 0, \dots, N-1$, – символы QAM-модуляции при $2\pi k / N \in [\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ или нулевые коэффициенты $d_k^{(p,q)} = 0$, если $2\pi k / N \notin [\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$.

Блок-схема метода OFDM с фильтрацией для асинхронной передачи данных [27] показана на рис. 16. После формирования последовательностей $x_l^{(p)}$ в передатчиках выполняется свертка каждого из сигналов $x_l^{(p)}$ с субполосным фильтром $h_l^{(p)}$:

$$y_l^{(p)} = h_l^{(p)} * x_l^{(p)}, \quad p = 1, \dots, P.$$

Фильтры $h_l^{(p)}$ имеют АЧХ $|H_p(\exp(j\omega))|$, полоса пропускания которых включает в себя отрезок $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$. При $\omega \in [0, 2\pi]$ в общем случае у АЧХ $|H_p(\exp(j\omega))|$ должно быть две полосы подавления, одна из которых содержит отрезок $[0, \omega_{p-1,2}]$, а вторая – отрезок $[\omega_{p+1,1}, 2\pi]$. В случае конечной ИХ и физической

реализуемости фильтра [21] коэффициенты $h_l^{(p)}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} h_l^{(p)} &= 0, & l < 0, \\ h_l^{(p)} &= 0, & l \geq 2L + 1, \end{aligned}$$

где $2L + 1$ – длина фильтра.

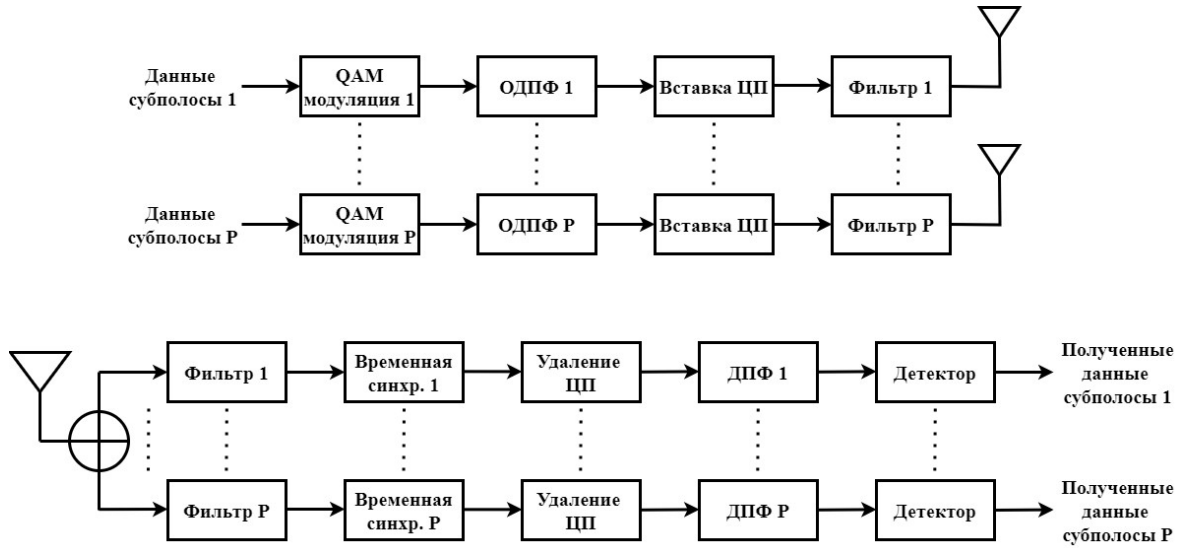


Рисунок 16 – Блок-схема метода OFDM с фильтрацией.

Сигналы $y_l^{(p)}$ передаются в различное время, причем допускается запаздывание $y_l^{(p)}$, превышающее длительность защитного интервала [27]. На вход приемника поступает сигнал r_l :

$$r_l = \sum_{p=1}^P \tilde{h}_l^{(p)} * \tilde{y}_l^{(p)} + z_l,$$

где $\tilde{h}_l^{(p)}$ – ИХ канала между p -м передатчиком и приемником, z_l – аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ), $\tilde{y}_l^{(p)} = y_{l-\nu_p}^{(p)}$ – сигнал на выходе p -го передатчика с учетом задержки на ν_p отсчетов.

Полученный сигнал r_l подается на вход субполосных фильтров $f_l^{(p)}$:

$$r_l^{(p)} = f_l^{(p)} * r_l, \quad p = 1, \dots, P.$$

Коэффициенты ИХ фильтров $f_l^{(p)}$ определяются формулой

$$f_l^{(p)} = \begin{cases} 0, & l < 0, \\ \overline{h_{2L-l}^{(p)}}, & 0 \leq l \leq 2L, \\ 0, & l > 2L. \end{cases}$$

Для произведения частотных характеристик $H_p(\exp(j\omega))$, $F_p(\exp(j\omega))$ фильтров $h_l^{(p)}$, $f_l^{(p)}$ выполняется равенство

$$H_p(\exp(j\omega))F_p(\exp(j\omega)) = \exp(-j2L\omega) |H_p(\exp(j\omega))|^2. \quad (4.5)$$

После фильтрации для каждой из последовательностей $r_l^{(p)}$ проводится временная синхронизация с p -м передатчиком [27]. Восстановление символов QAM-модуляции $d_k^{(p,q)}$ для чисел $p = 1, \dots, P$, $q = 1, \dots, K$ при $2\pi k / N \in [\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ осуществляется по формуле

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = \sum_{l=0}^{N-1} r_{l+D_{p,q}}^{(p,q)} \exp(-2\pi jkl / N),$$

где $D_{p,q} = 2L + \nu_p + n + (q-1)(N+n)$.

4.4. Погрешности, возникающие при применении метода OFDM с фильтрацией

При использовании метода OFDM с фильтрацией даже при условии отсутствия помех во время передачи сигналов по каналу QAM-символы в приемнике восстанавливаются с ошибкой. Погрешность, вносимая методом, образуется из нескольких составляющих, которые рассматриваются ниже.

4.4.1. Погрешность, вызываемая фильтрацией OFDM-символа с циклическим префиксом и усечением полученной последовательности

Для фиксированных чисел p и q положим

$$c_l = \begin{cases} u_l^{(p,q)}, & l = 0, \dots, n-1, \\ 0, & l \geq n, \end{cases},$$

$$s_l = \begin{cases} u_{n+l}^{(p,q)}, & l = 0, \dots, N-1, \\ 0, & l \geq N, \end{cases}$$

где $u_0^{(p,q)}, \dots, u_{n-1}^{(p,q)}$ – отсчеты префикса, $u_n^{(p,q)}, \dots, u_{n+N-1}^{(p,q)}$ – отсчеты OFDM-символа, n и N – длина ЦП и символа соответственно. Здесь и далее последовательности считаются физически реализуемыми, т.е. для любой последовательности x_l предполагается $x_l = 0$ при $l < 0$.

Рассмотрим последовательность

$$u_l = c_l + s_{l-n}, \quad (4.6)$$

образованную отсчетами одного OFDM-символа с ЦП:

$$\{u_l\}_{l=0}^{N+n-1} = \{c_0, \dots, c_{n-1}, s_0, \dots, s_{N-1}\}.$$

Фильтрация сигнала (4.6) в передатчике с применением фильтра $h_l^{(p)}$, а затем в приемнике с использованием фильтра $f_l^{(p)}$ эквивалентна линейной свертке w_l последовательности (4.6) с фильтром, имеющим ИХ $g_l = h_l^{(p)} * f_l^{(p)}$:

$$w_l = g_l * u_l.$$

Если длина ИХ $h_l^{(p)}$ равна $2L + 1$, то ИХ g_l будет состоять из $4L + 1$ отсчетов и задержка сигнала из-за фильтрации составит $2L$ отсчетов. Запишем w_l в виде суммы

$$w_l = \tilde{c}_l + \tilde{s}_{l-n}, \quad (4.7)$$

где

$$\tilde{c}_l = g_l * c_l, \quad \tilde{s}_l = g_l * s_l.$$

Символ $d_k^{(p,q)}$ QAM-модуляции, соответствующий поднесущей с номером k , $0 \leq k \leq N-1$, можно найти, вычисляя значение спектра $S(\exp(j\omega))$ сигнала

$$\{s_l\}_{l=0}^{N-1}$$

$$S(\exp(j\omega)) = \sum_{l=0}^{N-1} s_l \exp(-j\omega l)$$

в точке $\omega = 2\pi k / N$.

Фильтр g_l имеет частотную характеристику $G(\exp(j\omega))$, равную, в соответствии с (4.5),

$$G(\exp(j\omega)) = H_p(\exp(j\omega))F_p(\exp(j\omega)) = \exp(-2j\omega L) \left| H_p(\exp(j\omega)) \right|^2.$$

Если $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ – полоса пропускания $\left| H_p(\exp(j\omega)) \right|$ и

$$\gamma_p(\omega) = \left| H_p(\exp(j\omega)) \right| - 1$$

– неравномерность АЧХ в полосе $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$, то в точке $\omega = 2\pi k / N$ при условии

$\omega_{p,1} \leq 2\pi k / N \leq \omega_{p,2}$ характеристика $G(\exp(j\omega))$ удовлетворяет равенству

$$\exp(4j\pi k L / N) G(\exp(2\pi k j / N)) = 1 + \delta_k^{(p)}, \quad (4.8)$$

где

$$\delta_k^{(p)} = 2\gamma_p(2\pi k / N) + \gamma_p^2(2\pi k / N).$$

Поэтому для функции

$$\tilde{S}(\exp(j\omega)) = \sum_{l=-2L}^{N+2L-1} \tilde{s}_{l+2L} \exp(-j\omega l)$$

справедливо выражение

$$\tilde{S}(\exp(j2\pi k / N)) = (1 + \delta_k^{(p)}) S(\exp(j2\pi k / N)).$$

В сигнале w_l отсчеты состоят из сумм вида (4.7). Для восстановления QAM-символов $d_k^{(p,q)}$ используется формула

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = \sum_{l=0}^{N-1} w_{l+n+2L} \exp(-j2\pi k l / N).$$

Введем функцию

$$\tilde{W}(\exp(j\omega)) = \sum_{l=0}^{N-1} w_{l+n+2L} \exp(-j\omega l).$$

Число $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ можно записать в виде

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = \tilde{W}(\exp(j2\pi k / N)) - \tilde{S}(\exp(j2\pi k / N)) + (1 + \delta_k^{(p)})S(\exp(j2\pi k / N)). \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что числа $d_k^{(p,q)}$ и $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ связаны соотношением

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)})d_k^{(p,q)} + \varepsilon_{1,k}^{(p,q)}, \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,k}^{(p,q)} &= \tilde{W}(\exp(j2\pi k / N)) - \tilde{S}(\exp(j2\pi k / N)) = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{c}_{l+n+2L} \exp(-j2\pi kl / N) - \sum_{l=-2L}^{-1} \tilde{s}_{l+2L} \exp(-j2\pi kl / N) - \\ &\quad - \sum_{l=N}^{N+2L-1} \tilde{s}_{l+2L} \exp(-j2\pi kl / N). \end{aligned}$$

Таким образом, при фильтрации одного OFDM-символа вместе с ЦП и усечении полученной последовательности возникает погрешность, имеющая следующие составляющие:

- 1) ошибка, возникающая из-за наложения на сигнал $\{\tilde{s}_l\}_{l=2L}^{2L+N-1}$ задержки от фильтрации префикса;
- 2) погрешность из-за отсечения от последовательности $\{\tilde{s}_l\}_{l=0}^{4L+N-1}$ первых $2L$ и последних $2L$ отсчетов;
- 3) ошибка, вызванная отклонением фильтра в полосе пропускания.

Последняя ошибка для качественного фильтра может быть незначительной по сравнению с общей погрешностью. В этом случае теряется выгода от применения фильтров с малым отклонением в полосе пропускания.

4.4.2. Погрешность, вносимая соседними по времени символами

В результате фильтрации каждый OFDM-символ искажается задержкой от соседних по времени символов, попавшей в область, где вычисляется ДПФ. Этот эффект для двух символов показан на рис. 17.

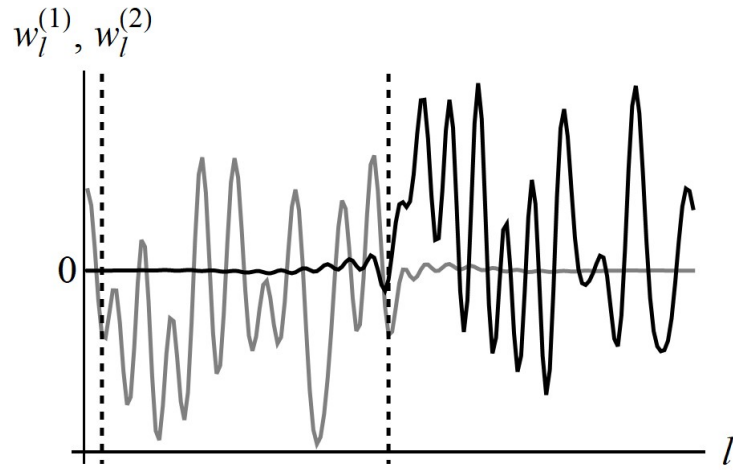


Рисунок 17 – Последовательности $w_l^{(1)}$ и $w_l^{(2)}$ (светлая и темная линии соответственно), полученные в результате фильтрации двух соседних OFDM-символов $u_l^{(1)}$ и $u_l^{(2)}$ с циклическим префиксом; задержка от фильтрации сигнала $u_l^{(2)}$ попадает в область взятия ДПФ сигнала $u_l^{(1)}$, границы которой показаны штриховыми линиями.

Для фиксированного числа p рассмотрим субполосный сигнал $x_l^{(p)}$ (4.4), состоящий из OFDM-символов $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ длиной N с ЦП $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=0}^{n-1}$ длиной n , $q = 1, \dots, K$. Обозначим

$$w_l^{(p,q)} = g_l * u_l^{(p,q)}, \quad q = 1, \dots, K,$$

где $g_l = h_l^{(p)} * f_l^{(p)}$, $u_l^{(p,q)} = 0$ при $l \geq n + N$.

После фильтрации сигнала $x_l^{(p)}$ с применением фильтра g_l в интервале ДПФ OFDM-символа с номером q , $1 \leq q \leq K$, будут располагаться отсчеты, заданные суммами

$$w_{l+n+N}^{(p,q-1)} + w_l^{(p,q)} + w_{l-n-N}^{(p,q+1)}, \quad l = n + 2L, \dots, n + 2L + N - 1. \quad (4.11)$$

В формуле (4.11) $w_l^{(p,q)} = 0$ для $q = -1$ и $q = K + 1$.

Для восстановления символа QAM-модуляции $d_k^{(p,q)}$, соответствующего поднесущей с номером k , $0 \leq k \leq N - 1$, используется выражение

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = \sum_{l=2L+n}^{2L+n+N-1} (w_{l+n+N}^{(p,q-1)} + w_l^{(p,q)} + w_{l-n-N}^{(p,q+1)}) \exp(-2\pi jk(l - 2L - n) / N). \quad (4.12)$$

Обозначим

$$\varepsilon_{2,k}^{(p,q)} = \sum_{l=2L+n}^{2L+n+N-1} (w_{l+N+n}^{(p,q-1)} + w_{l-N-n}^{(p,q+1)}) \exp(-2\pi jk(l - 2L - n) / N).$$

Учитывая (4.10), из (4.12) получим

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)})d_k^{(p,q)} + \varepsilon_{1,k}^{(p,q)} + \varepsilon_{2,k}^{(p,q)}.$$

Таким образом, если рассматривается сигнал из нескольких OFDM-символов, к ошибке $\varepsilon_{1,k}^{(p,q)}$, возникающей при фильтрации и усечении последовательности отсчетов отдельного символа, добавляется ошибка $\varepsilon_{2,k}^{(p,q)}$, вызванная наличием соседних по времени символов.

4.4.3. Погрешность, возникающая при фильтрации сигналов из других субполос

В общую погрешность метода входит еще одна составляющая, появляющаяся из-за применения субполосного фильтра к сигналам, спектры которых сосредоточены вне данной субполосы.

При отсутствии шума в канале в приемник поступает сумма y_l сигналов $y_l^{(p)} = h_l^{(p)} * x_l^{(p)}$, полученных в результате свертки последовательностей $x_l^{(p)}$ с фильтрами $h_l^{(p)}$, $p = 1, \dots, P$:

$$y_l = \sum_{p=1}^P y_l^{(p)}. \quad (4.13)$$

Поскольку в приемнике выполняется синхронизация, запаздывание при передаче сигналов здесь не учитывается.

Для выделения из (4.13) одного из сигналов $y_l^{(p)}$ выполняется свертка y_l с фильтром $f_l^{(p)}$, имеющим АЧХ $|F_p(\exp(j\omega))|$:

$$y_l^{(p)} \approx f_l^{(p)} * y_l. \quad (4.14)$$

Правая часть (4.14) равна

$$f_l^{(p)} * y_l = g_l * x_l^{(p)} + w_l,$$

где $g_l = h_l^{(p)} * f_l^{(p)}$, а w_l определяется формулой

$$w_l = \sum_{\substack{r=1, \\ r \neq p}}^P f_l^{(r)} * y_l^{(r)}. \quad (4.15)$$

Из последовательности w_l при дальнейшей обработке выбираются наборы отсчетов, т.е. выполняется ее усечение. Для OFDM-символа с номером q , $1 \leq q \leq K$, усеченная последовательность имеет вид

$$\{w_{l_q}, \dots, w_{l_q + N - 1}\}, \quad (4.16)$$

где $l_q = 2L + n + (q - 1)(N + n)$.

При фильтрации в приемнике переходная полоса АЧХ фильтра захватывает небольшую часть эффективного носителя спектра соседнего субполосного сигнала (см. рис. 18а). После усечения w_l получается последовательность (4.16) с плохо локализованным спектром $\tilde{W}(e^{j\omega})$, распространяющимся в субполосу $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ (см. рис. 18б).

Результат восстановления $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ QAM-символа $d_k^{(p,q)}$, соответствующего поднесущей с номером k , определяется выражением

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)})d_k^{(p,q)} + \varepsilon_{1,k}^{(p,q)} + \varepsilon_{2,k}^{(p,q)} + \varepsilon_{3,k}^{(p,q)}, \quad (4.17)$$

где $\varepsilon_{3,k}^{(p,q)}$, $k = 0, \dots, N - 1$ – отсчеты ДПФ последовательности (4.16):

$$\varepsilon_{3,k}^{(p,q)} = \sum_{l=0}^{N-1} w_{l+l_q} \exp(-j2\pi kl / N).$$

Формула (4.17) определяет общий вид восстанавливаемых QAM-символы $d_k^{(p,q)}$ чисел $\tilde{d}_k^{(p,q)}$, получаемых в результате применения метода OFDM с фильтрацией при передаче по идеальному каналу.

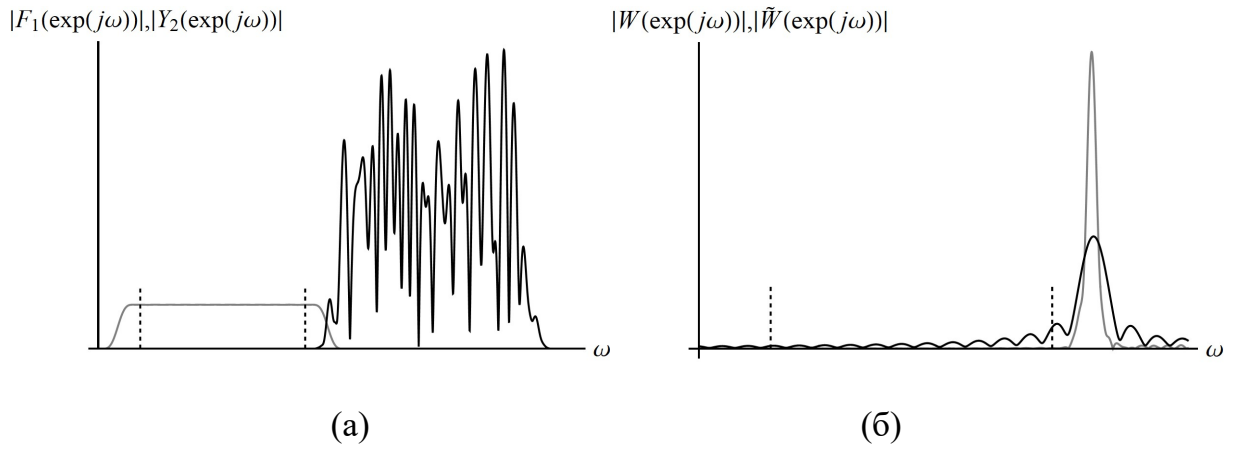


Рисунок 18 – Амплитудно-частотные характеристики: а) $|F_1(\exp(j\omega))|$ (светлая линия), $|Y_2(\exp(j\omega))|$ (темная линия) фильтра $f_l^{(1)}$ и сигнала $y_l^{(2)}$ (пунктир – границы полосы пропускания $|F_1(\exp(j\omega))|$); б) $|W(\exp(j\omega))|$ (светлая линия), $|\tilde{W}(\exp(j\omega))|$ (темная линия) последовательностей (4.15) и (4.16).

4.5. Повышение точности метода OFDM с фильтрацией

Пусть s_l – последовательность, заданная формулой

$$s_l = \begin{cases} u_{n+l}^{(p,q)}, & 0 \leq l \leq N-1, \\ 0, & l > N-1, \end{cases}$$

где $u_n^{(p,q)}, \dots, u_{n+N-1}^{(p,q)}$ – отсчеты OFDM-символа длины N , а p и q – фиксированные числа. Рассмотрим сигнал u_l , образованный суммой

$$u_l = s_l + s_{l-N} + s_{l-2N}.$$

Последовательность $\{u_l\}_{l=0}^{3N-1}$ составлена из трех одинаковых OFDM-символов

$\{s_l\}_{l=0}^{N-1}$:

$$\{u_l\}_{l=0}^{3N-1} = \{s_0, \dots, s_{N-1}, s_0, \dots, s_{N-1}, s_0, \dots, s_{N-1}\}.$$

Предполагая, что $2L+1 \leq N$, применим к последовательности u_l КИХ-фильтр

$h_l^{(p)}$ с ИХ $\{h_l^{(p)}\}_{l=0}^{2L}$.

Обозначим

$$\tilde{s}_l = h_l^{(p)} * s_l.$$

Свертка v_l последовательности u_l с фильтром $h_l^{(p)}$ равна

$$v_l = h_l^{(p)} * u_l = \tilde{s}_l + \tilde{s}_{l-N} + \tilde{s}_{l-2N}. \quad (4.18)$$

Вычислим свертку (4.18) для индексов $l = L + N, \dots, L + 2N - 1$:

$$\begin{aligned} v_l &= \sum_{r=l-N+1}^{2L} h_r^{(p)} s_{l-r} + \sum_{r=0}^{l-N} h_r^{(p)} s_{l-N-r}, \quad l = L + N, \dots, 2L + N - 1; \\ v_l &= \sum_{r=0}^{2L} h_r^{(p)} s_{l-N-r}, \quad l = 2L + N, \dots, 2N - 1; \\ v_l &= \sum_{r=l-2N+1}^{2L} h_r^{(p)} s_{l-N-r} + \sum_{r=0}^{l-2N} h_r^{(p)} s_{l-2N-r}, \quad l = 2N, \dots, L + 2N - 1. \end{aligned}$$

Можно убедиться, что последовательность \tilde{v}_l , равная

$$\tilde{v}_l = v_{L+N+l}, \quad l = 0, \dots, N - 1,$$

представляет собой циклическую свертку сигнала

$$\{s_L, \dots, s_{N-1}, s_0, \dots, s_{L-1}\}$$

с последовательностью

$$\{h_0^{(p)}, \dots, h_{2L-1}^{(p)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2L}\}.$$

Кроме того, справедливо

$$\begin{aligned} v_l &= v_{l+N}, \quad l = N, \dots, L + N - 1, \\ v_l &= v_{l-N}, \quad l = L + 2N, \dots, 2L + 2N - 1. \end{aligned}$$

Рассматривая линейную свертку

$$w_l = f_l^{(p)} * v_l,$$

можно получить аналогичный результат. Сигнал

$$\tilde{w}_l = w_{2L+N+l}, \quad l = 0, \dots, N - 1, \quad (4.19)$$

является циклической сверткой последовательностей

$$\begin{aligned} &\{\tilde{v}_L, \dots, \tilde{v}_{N-1}, \tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_{L-1}\}, \\ &\{f_0^{(p)}, \dots, f_{2L-1}^{(p)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2L}\}. \end{aligned}$$

Формула для ДПФ \tilde{W}_k последовательности (4.19) вытекает из свойств циклической свертки:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_k &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{w}_l \exp(-j2\pi lk / N) = \\ &= \exp(2\pi jkL / N) F_p(\exp(j2\pi k / N)) \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{v}_l \exp(-j2\pi lk / N) = \\ &= \exp(4\pi jkL / N) F_p(\exp(j2\pi k / N)) H_p(\exp(j2\pi k / N)) \sum_{l=0}^{N-1} s_l \exp(-j2\pi lk / N) = \\ &= \left| H_p(\exp(j2\pi k / N)) \right|^2 \sum_{l=0}^{N-1} s_l \exp(-j2\pi lk / N).\end{aligned}$$

Легко показать, что такое же соотношение будет справедливо для свертки

$$w_l = h_l^{(p)} * f_l^{(p)} * u_l,$$

где сигнал u_l равен

$$u_l = \begin{cases} s_{l+N-2L} + s_{l-2L} + s_{l-N-2L}, & l = 0, \dots, N + 4L - 1, \\ 0, & l > N + 4L - 1. \end{cases}$$

Последовательность $\{u_l\}_{l=0}^{N+4L-1}$ в этом случае образована добавлением к OFDM-символу $\{s_l\}_{l=0}^{N-1}$ ЦП длиной $2L$ и циклического продолжения длиной $2L$

$$\{u_l\}_{l=0}^{N+4L-1} = \{s_{N-2L}, \dots, s_{N-1}, s_0, \dots, s_{N-1}, s_0, \dots, s_{2L-1}\}.$$

Сформулируем полученный результат в форме утверждения.

Утверждение 4.1. Пусть $\{s_l\}_{l=0}^{N-1}$ – OFDM-символ, состоящий из N отсчетов и имеющий ДПФ

$$\sum_{l=0}^{N-1} s_l \exp(-2j\pi kl / N) = d_k, \quad k = 0, \dots, N - 1,$$

$\{h_l\}_{l=0}^{2L}$, $\{f_l\}_{l=0}^{2L}$ – ИХ фильтров длиной $2L + 1 \leq N$, имеющих частотные характеристики $H(\exp(j\omega))$ и $F(\exp(j\omega))$ соответственно, причем

$$H(\exp(j\omega))F(\exp(j\omega)) = \exp(-2jL\omega) \left| H(\exp(j\omega)) \right|^2.$$

Тогда результатом применения к последовательности

$$u_l = \begin{cases} s_{l+N-2L}, & l = 0, \dots, 2L-1, \\ s_{l-2L}, & l = 2L, \dots, 2L+N-1, \\ s_{l-N-2L}, & l = 2L+N, \dots, 4L+N-1, \\ 0, & l > 4L+N-1 \end{cases}$$

фильтров h_l и f_l будет последовательность $w_l = h_l * f_l * u_l$, отсчеты которой при $l = 2L, \dots, 2L+N-1$ обладают следующим свойством:

$$\sum_{l=0}^{N-1} w_{2L+l} \exp(-2j\pi kl / N) = d_k |H(\exp(j2\pi k / N))|^2.$$

Рассмотрим теперь для фиксированного числа p сигнал $x_l^{(p)}$, равный

$$x_l^{(p)} = \sum_{q=1}^K u_{l-l_q}^{(p,q)},$$

где $l_q = (N+4L)(q-1)$, $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=2L}^{2L+N-1}$ – OFDM-символ длиной N , $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=0}^{2L-1}$ – префикс символа длиной $2L$, $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=2L+N}^{4L+N-1}$ – циклическое продолжение символа из $2L$ отсчетов и

$$u_l^{(p,q)} = 0, \quad l > 4L+N-1, \\ u_l^{(p,q)} = 0, \quad l < 0.$$

Осуществляя свертку сигнала $x_l^{(p)}$ с фильтрами $h_l^{(p)}$, $f_l^{(p)}$, получим последовательность

$$w_l = h_l^{(p)} * f_l^{(p)} * x_l^{(p)}.$$

Символы QAM-модуляции для q -го OFDM символа $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=2L}^{2L+N-1}$ восстанавливаются по формуле

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = \sum_{l=0}^{N-1} w_{l+2L+l_q} \exp(-j2\pi kl / N).$$

Связь между числами $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ и исходными QAM-символами

$$d_k^{(p,q)} = \sum_{l=2L}^{2L+N-1} u_l^{(p,q)} \exp(-j2\pi kl / N)$$

задается соотношением

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = \left| H_p(\exp(j2\pi k / N)) \right|^2 d_k^{(p,q)}.$$

Если фильтр $h_l^{(p)}$ имеет полосу пропускания

$$[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}] \text{ и } 2\pi k / N \in [\omega_{p,1}, \omega_{p,2}],$$

то в соответствии с (4.8) имеем

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)}) d_k^{(p,q)}.$$

Добавление к OFDM-символу циклического продолжения длиной $2L$ и расширение ЦП до $2L$ отсчетов позволило полностью исключить возникающую при фильтрации одного символа погрешность $\varepsilon_{1,k}^{(p,q)}$, рассмотренную в разд. 4.4.1. Отсчеты ЦП и циклического продолжения, располагающиеся между символами, препятствуют появлению погрешности $\varepsilon_{2,k}^{(p,q)}$, обусловленной фильтрацией соседних по времени символов (разд. 4.4.2).

При дополнении каждого символа префиксом и продолжением из $n < 2L$ отсчетов погрешности вида $\varepsilon_{1,k}^{(p,q)}$, $\varepsilon_{2,k}^{(p,q)}$ подавляются частично.

Пример 4.1. Рассмотрим применение стандартного и модифицированного методов OFDM с фильтрацией для передачи данных. В примере имеющаяся полоса частот разделена на три субполосы, каждой из которых соответствует свой набор из M поднесущих. Между соседними субполосами располагается g защитных частот.

Используемые в схеме субполосные фильтры получены из трех различных КИХ-фильтров низких частот, синтезированных методом оконного взвешивания идеальной характеристики [1]. Для построения фильтров применялись некоторые из весовых функций, использованных в других работах о методе OFDM с фильтрацией: Хэмминга $w_1(x)$, Ханна $w_2(x)$ и Блэкмана $w_3(x)$ [27,28,46].

Функции $w_1(x)$, $w_2(x)$, $w_3(x)$ определяются выражениями [7]

$$w_1(x) = \begin{cases} \frac{21}{46} \cos(2\pi x) + \frac{25}{46}, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(2\pi x) + \frac{1}{2}, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$w_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{50} (25 \cos(2\pi x) + 4 \cos(4\pi x) + 21), & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Все ФНЧ имеют частоту среза $\omega_c = (M + g)\pi / N$, где N – размер ОДПФ. Для эффективного восстановления QAM-символов граничные частоты полос пропускания и подавления ω_0 и ω_1 должны удовлетворять неравенствам

$$\omega_0 \geq \omega_c - (g + 1)\pi / N, \quad \omega_1 \leq \omega_c + (g + 1)\pi / N.$$

Для используемых в примере фильтров были вычислены отклонения АЧХ $|H(\exp(j\omega))|$ в полосах $[0, \omega_c - (g + 1)\pi / N]$, $[\omega_c + (g + 1)\pi / N, \pi]$:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \max \left| |H(\exp(j\omega))| - 1 \right|, \quad \omega \in [0, \omega_c - (g + 1)\pi / N], \\ \delta_1 &= \max |H(\exp(j\omega))|, \quad \omega \in [\omega_c + (g + 1)\pi / N, \pi]. \end{aligned}$$

Характеристики используемой схемы передачи данных приведены в таблице 8, параметры фильтров – в таблице 9.

В первой части численного эксперимента предложенный в работе метод сравнивался со стандартным. В модифицированном алгоритме к каждому OFDM-символу, помимо ЦП длиной n , добавлялась справа последовательность из n первых отсчетов символа.

Таблица 8 – Характеристики схемы передачи данных

Ширина канала, МГц	5
Расстояние между поднесущими, кГц	15
Количество субполос	3
Число M поднесущих в субполосе	72
Число защитных частот g	8
Размер ОДПФ N	512
Схемы модуляции	QAM 256, QAM 1024, QAM 4096
Длина фильтров $2L+1$	301, 401, 501

Таблица 9 – Параметры фильтров для $L = 150$

Окно	δ_0	δ_1
w_1	0.0016	0.0016
w_2	0.0019	0.0019
w_3	0.0004	0.0004

Для фильтрации сигналов были использованы фильтры на основе оконных функций $w_k(x)$, $k = 1, 2, 3$. Длина ИХ фильтров равна $2L + 1 = 301$. Помимо ЦП размером $n = 300$, обеспечивающего выполнение утверждения 1, рассматривались ЦП из меньшего числа отсчетов, вплоть до $n = 36$, что соответствует стандартной длине префикса для применяемой схемы. Выполнялось моделирование асинхронной передачи сигналов – принято, что сигнал, соответствующий субполосе 2, запаздывает на $n + 10$ отсчетов относительно субполосных сигналов 1 и 3. Чтобы иметь возможность оценить

погрешность, вносимую в восстановленные QAM-символы в процессе реализации метода, была рассмотрена передача по идеальному каналу без помех.

В стандартном методе передачи OFDM-сигналов с фильтрацией использовали ЦП из 36 отсчетов. Помимо фильтров длиной $2L + 1 = 301$ применяли фильтры с $2L + 1 = 401, 501$. Увеличение порядка фильтра уменьшает ширину переходной полосы и неравномерность АЧХ в полосах пропускания и подавления. Для полученных после работы модифицированного и стандартного алгоритмов восстановленных QAM-символов \tilde{d}_k были вычислены абсолютная и среднеквадратическая погрешности:

$$e_1 = \max_{0 \leq k \leq 3M-1} |\tilde{d}_k - d_k|, \quad (4.20)$$

$$e_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{3M-1} |\tilde{d}_k - d_k|^2 / (3M)}. \quad (4.21)$$

Результаты применения при передаче данных модифицированной схемы OFDM с фильтрацией приведены в таблице 10.

Таблица 10 – Абсолютная и среднеквадратическая погрешности e_1 , e_2 восстановления QAM-символов, полученные при применении модифицированного метода OFDM с фильтрацией

w_k	QAM 256				QAM 1024				QAM 4096			
	$n=36$	75	150	300	36	75	150	300	36	75	150	300
Погрешность e_1												
w_1	0.211	0.110	0.075	0.055	0.581	0.248	0.095	0.106	0.886	0.601	0.243	0.277
w_2	0.244	0.124	0.065	0.074	0.626	0.263	0.127	0.151	0.903	0.576	0.289	0.258
w_3	0.204	0.097	0.068	0.078	0.518	0.200	0.107	0.132	0.901	0.312	0.349	0.335
Погрешность e_2												
w_1	0.044	0.024	0.016	0.015	0.116	0.050	0.027	0.028	0.203	0.106	0.063	0.060
w_2	0.043	0.023	0.012	0.011	0.118	0.050	0.020	0.022	0.203	0.105	0.048	0.046
w_3	0.040	0.018	0.015	0.012	0.109	0.038	0.019	0.023	0.197	0.072	0.051	0.049

Наименьшие погрешности e_1 и e_2 получены при добавлении к OFDM-символам слева и справа периодических продолжений, состоящих из $n = 150$ и $n = 300$ отсчетов. Для $n = 150, 300$ погрешности сопоставимы. Далее при уменьшении n ошибки e_1 и e_2 возрастают. Модифицированный метод позволил осуществить эффективную передачу данных даже при периодическом продолжении OFDM-символа длиной в стандартный ЦП $n = 36$ для всех рассмотренных схем QAM-модуляции, в том числе для схемы высокого порядка QAM 4096, где среднеквадратическая погрешность составила $e_2 \approx 0.2$.

Ошибки e_1 , e_2 , полученные при использовании стандартного метода с фильтрацией, приведены в таблице 11.

Таблица 11 – Абсолютная и среднеквадратическая погрешности e_1 , e_2 восстановления QAM-символов, полученные при применении стандартного метода OFDM с фильтрацией

w_k	QAM 256			QAM 1024			QAM 4096		
	$L=150$	200	250	150	200	250	150	200	250
Погрешность e_1									
w_1	0.822	0.793	0.754	1.566	1.483	1.514	2.506	2.501	2.456
w_2	0.840	0.794	0.768	1.520	1.513	1.505	2.918	2.563	2.486
w_3	0.924	0.834	0.796	1.651	1.518	1.508	2.656	2.440	2.426
Погрешность e_2									
w_1	0.291	0.286	0.284	0.722	0.711	0.706	0.976	0.960	0.955
w_2	0.291	0.287	0.284	0.724	0.713	0.706	0.976	0.963	0.952
w_3	0.297	0.290	0.287	0.744	0.723	0.713	1.010	0.976	0.963

Метод достаточно хорошо работает для схемы QAM 256. При повышении порядка схемы модуляции погрешности e_1 , e_2 возрастают. Для схемы QAM 4096

получены погрешности $e_2 \approx 1$ и $e_1 > 2.5$. При таких значениях e_1 и e_2 теряется возможность безошибочного восстановления данных при переходе от чисел \tilde{d}_k к последовательности бит.

В следующей части эксперимента была рассмотрена передача данных при наличии в канале АГБШ. Наборы чисел \tilde{d}_k преобразовывались в последовательности из нулей и единиц. Для полученных последовательностей вычислено число ошибочно восстановленных бит. В эксперименте рассматривались двоичные последовательности из N_b бит, $N_b > 10^4$.

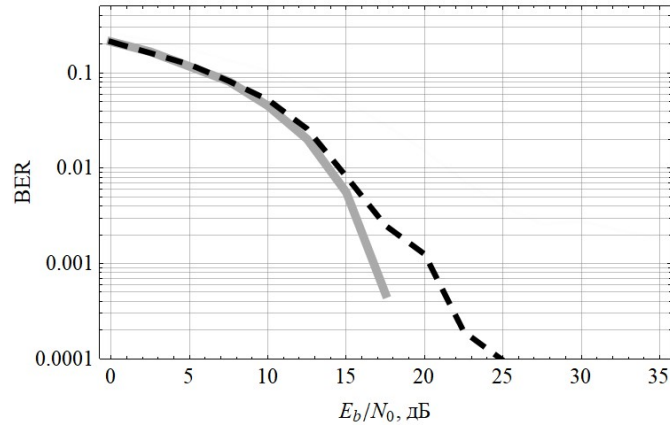
Значения коэффициента ошибок на бит (bit error ratio, BER) вычислялись для различных значений отношения энергии бита к спектральной плотности шума E_b / N_0 . Величина E_b / N_0 связана с отношением сигнал/шум (С/Ш) формулой [2]

$$\text{С/Ш} = \frac{E_b}{N_0} \frac{1}{BT_b},$$

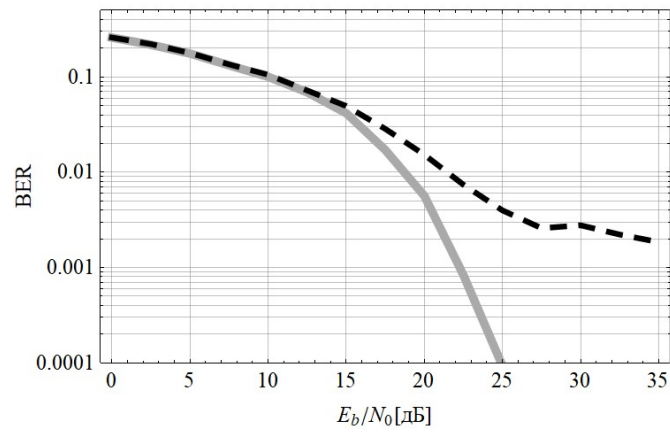
где B – ширина полосы частот входного шума, T_b – длительность бита.

Графики величины BER, полученные при применении стандартного и модифицированного методов для схем QAM 256, QAM 1024, QAM 4096 показаны на рис. 4. В обоих методах использовались КИХ-фильтры на основе окна Хэмминга $w_1(x)$. Длина фильтров составляет $2L + 1 = 301$, размер ЦП равен $n = 36$.

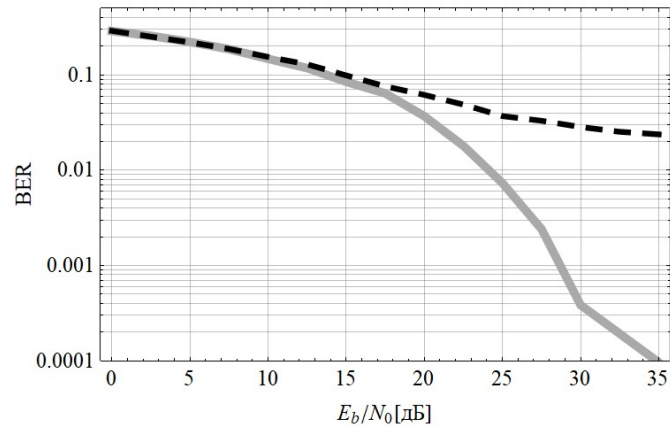
Для всех схем модуляции модифицированный метод при $E_b / N_0 > 15$ дБ позволил получить меньшее количество ошибок. Новый метод эффективно работает для схем высокого порядка QAM 1024 и QAM 4096. Для стандартного алгоритма в сочетании со схемами QAM 1024, QAM 4096 число ошибок остается высоким при уменьшении уровня шума.



(а)



(б)



(в)

Рисунок 19 – Зависимости величины BER от отношения E_b / N_0 для схем модуляции QAM 256 (а), QAM 1024 (б), QAM 4096 (в), полученные при использовании стандартного (пунктирная линия) и модифицированного (светлая линия) алгоритмов OFDM с фильтрацией.

4.6. Оконные фильтры и фильтры на основе атомарных функций в модифицированном методе OFDM с фильтрацией

Применение в методе OFDM с фильтрацией цифровых КИХ-фильтров на основе весовых оконных функций обусловлено легкостью их построения. Алгоритм взвешивания идеальной характеристики, в отличие от алгоритмов оптимизации и частотной выборки, позволяет найти коэффициенты фильтра в явном виде без использования специальных численных методов. Такой же простотой отличается и способ вычисления коэффициентов построенных в разд. 2 КИХ-фильтров на основе атомарных функций.

Согласно результатам разд. 4.4.1 и 4.5, одним из факторов, определяющих погрешность восстановления символов QAM-модуляции при применении модифицированного метода OFDM с фильтрацией, является отклонение АЧХ субполосного фильтра в определенных точках его полосы пропускания.

Для получения субполосных КИХ-фильтров выполняется преобразование коэффициентов ФНЧ, осуществляющее сдвиг АЧХ низкочастотного фильтра. В случае, когда субполосе соответствует M поднесущих частот и g защитных частот, субполосный фильтр получается преобразованием ФНЧ с частотой среза

$$\omega_c = (M + g)\pi / N,$$

где N – размер ОДПФ последовательности QAM-символов. Граничные частоты ω_0 и ω_1 полос пропускания и подавления ФНЧ должны удовлетворять условию

$$\omega_1 - \omega_0 \leq 2(g + 1)\pi / N. \quad (4.22)$$

Для небольшого числа защитных частот переходная полоса фильтра должна быть достаточно узкой. Переходная полоса оконных фильтров сужается при повышении размера ИХ. Для оконных фильтров недостаточно высоких порядков условие (4.22) не выполняется. В этом случае отклонение АЧХ фильтра на отрезке $[0, \omega_c - (g + 1)\pi / N]$ плохо влияет на качество восстановления QAM-символов.

Преимуществом предложенных в разд. 2.3 атомарных КИХ-фильтров перед оконными фильтрами является возможность задания переходной полосы. Для ФНЧ (2.12), имеющего граничные частоты полос пропускания и подавления ω_0 и ω_1 , равные

$$\omega_0 = \omega_c - (g + 1)\pi / N, \quad \omega_1 = \omega_c + (g + 1)\pi / N,$$

коэффициенты h_l задаются выражениями

$$h_l = \frac{\omega_c}{\pi} H_{S,a}^* \left(a\omega_c (l - L) / S \right), \quad 0 \leq l \leq 2L, \quad (4.23)$$

где параметр a равен

$$a = \frac{1}{S} \frac{N\omega_c}{(g + 1)\pi},$$

а функция $H_{S,a}^*(\omega)$ определяется формулой (2.11).

Для КИХ-фильтра, имеющего порядок $2L + 1$ и АЧХ $|H^{(L)}(\exp(j\omega))|$, отклонение $\delta(L)$ на отрезке $[0, \omega_c - (g + 1)\pi / N]$ равно

$$\delta(L) = \max_{\omega \in [0, \omega_c - (g+1)\pi/N]} \left| |H^{(L)}(\exp(j\omega))| - 1 \right|.$$

При уменьшении числа защитных частот g величина $\delta(L)$ затухает медленнее. На рисунке 20 приведен пример графиков отклонений АЧХ оконных и атомарных фильтров при $N = 512$, $M = 72$, $g = 2, 4, 8$.

Пример 4.2. Рассмотрим применение оконных и атомарных фильтров в модифицированном методе OFDM с фильтрацией. Как и в эксперименте разд. 4.5, использовалась схема передачи данных со следующими параметрами: ширина канала 5 МГц, расстояние между поднесущими 15 кГц, размер ОДПФ $N = 512$. Выделенная полоса частот разделена на 3 субполосы, каждой из которых соответствует 72 поднесущих. Количество защитных частот было уменьшено до $g = 2$. Поскольку при снижении числа g замедляется затухание отклонений АЧХ фильтров в полосе $[0, \omega_c - (g + 1)\pi / N]$ (рисунок 20), выбрана схема модуляции QAM 64, имеющая более низкий порядок по сравнению со схемами в таблице 8.

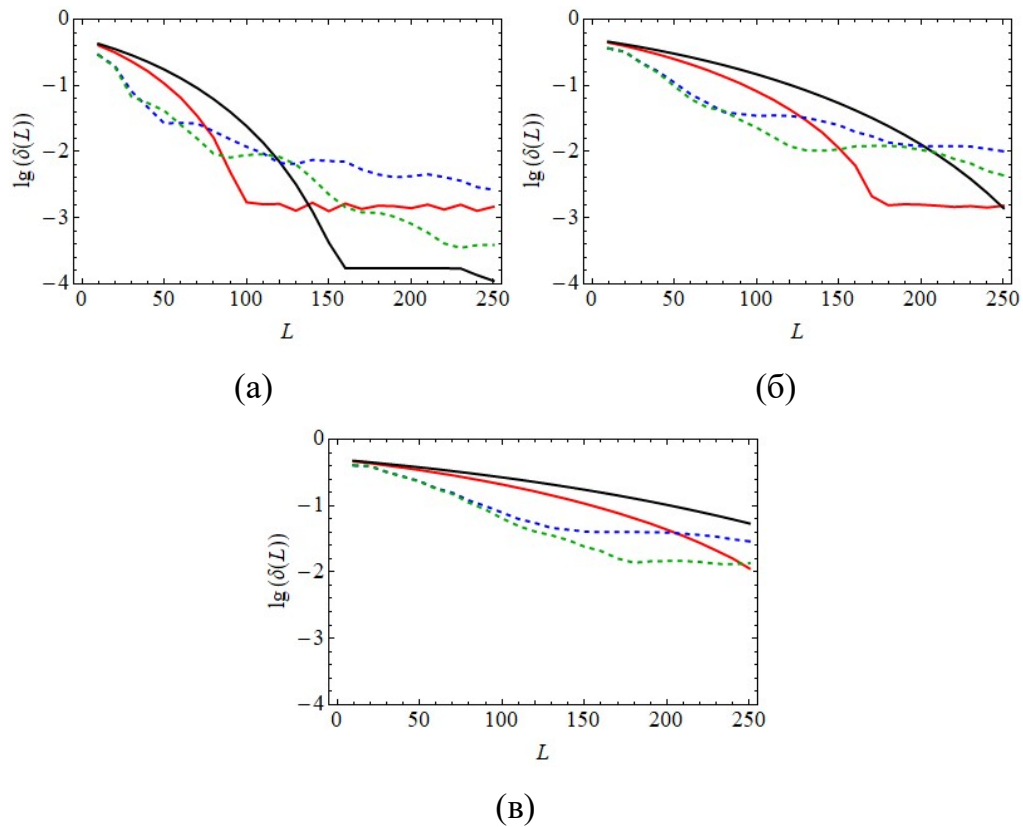


Рисунок 20 – Десятичный логарифм отклонения $\delta(L)$ АЧХ фильтра Хэмминга (красная кривая), фильтра Блэкмана (черная кривая), фильтра (4.23) для $S = 1$ (синяя пунктирная кривая), фильтра (4.23) для $S = 8$ (зеленая пунктирная кривая) при $g = 8$ (а), $g = 4$ (б), $g = 2$ (в).

Длина циклического префикса и циклического продолжения в модифицированном методе OFDM с фильтрацией положена равной $n = 36$.

Коэффициенты ИХ атомарных фильтров вычислялись по формуле (4.23) для различных значений параметра $S = 1, 2, 5, 8, 12, 20, 40, 60$. Для построения оконных фильтров использовались весовые функции Дирихле $w_1(x)$, Бартлетта $w_2(x)$, Гаусса $w_3(x)$, Хэмминга $w_4(x)$, Хэннинга $w_5(x)$, Блэкмана $w_6(x)$, Блэкмана-Хэрриса $w_7(x)$ и Блэкмана-Наталла $w_8(x)$. Выражения для окон Хэмминга, Хэннинга и Блэкмана приведены в разд. 4.6.

Весовые функции $w_k(x)$ для $k = 1, 2, 3$ и $k = 7, 8$ задаются равенствами

$$w_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad w_2(x) = \begin{cases} 1 - 2|x|, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$w_3(x) = \begin{cases} \exp(-(\alpha x)^2 / 2), & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$w_7(x) = \begin{cases} \sum_{m=0}^3 b_m \cos(2\pi x), & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$w_8(x) = \begin{cases} \sum_{m=0}^3 c_m \cos(2\pi x), & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где α – параметр, b_m и c_m , $m = 0, \dots, 3$ – коэффициенты, равные $b_0 = 0.3588$, $b_1 = 0.4883$, $b_2 = 0.1413$, $b_3 = 0.0117$, $c_0 = 0.3636$, $c_1 = 0.4892$, $c_2 = 0.1366$, $c_3 = 0.0106$. В эксперименте принято $\alpha = 3$.

Полученная при восстановлении QAM-символов абсолютная погрешность e_1 (4.20) приводится в таблице 12, среднеквадратическая погрешность e_2 (4.21) – в таблице 13.

В таблице 12 для всех $L \geq 100$ при фиксированном L наименьшую погрешность обеспечили атомарные фильтры для $S = 12$ или $S = 20$, в табл. 3 – фильтры (4.23) при $S = 5, 8, 12, 20$. Лучшие результаты среди оконных фильтров получены для оконного фильтра Гаусса. Преимущество применения атомарных фильтров более заметно для небольших чисел L , при $L \geq 200$ абсолютные погрешности для фильтра на основе окна $w_3(x)$ и атомарного фильтра при $S = 12, 20$ принимают сопоставимые значения.

Таблица 12 – Абсолютная погрешность e_1 восстановления QAM-символов, полученная при использовании в модифицированном методе OFDM с фильтрацией оконных фильтров на основе весовых функций $w_k(x)$, $k = 1, \dots, 8$, и фильтров (4.23).

Оконные фильтры на основе окон $w_k(x)$							
k	$L=100$	125	150	175	200	225	250
1	1.676	1.417	1.603	1.756	1.647	1.202	0.898
2	4.229	3.467	2.815	2.284	1.888	1.607	1.420
3	2.566	1.575	1.023	0.633	0.445	0.506	0.476
4	3.808	2.960	2.214	1.606	1.139	0.869	0.650
5	4.083	3.259	2.508	1.858	1.325	1.012	0.763
6	4.652	3.948	3.283	2.676	2.141	1.687	1.315
7	5.079	4.466	3.874	3.314	2.797	2.331	1.923
8	5.046	4.426	3.828	3.265	2.746	2.282	1.876
Фильтры (4.23) для различных значений параметра S							
S	$L=100$	125	150	175	200	225	250
1	1.711	1.328	1.187	1.156	1.162	1.152	1.127
2	1.637	1.268	1.106	1.062	1.062	1.054	1.031
5	1.468	1.123	0.907	0.830	0.811	0.808	0.793
8	1.399	1.015	0.757	0.652	0.616	0.619	0.613
12	1.332	0.992	0.690	0.479	0.430	0.469	0.479
20	1.321	1.093	0.746	0.707	0.664	0.528	0.433
40	1.452	1.212	0.973	1.076	1.013	0.784	0.586
60	1.508	1.263	1.125	1.240	1.167	0.892	0.642

Таблица 13 – Среднеквадратическая погрешность e_2 восстановления QAM-символов, полученная при использовании в модифицированном методе OFDM с фильтрацией оконных фильтров на основе весовых функций $w_k(x)$, $k = 1, \dots, 8$, и фильтров (4.23).

Оконные фильтры на основе окон $w_k(x)$							
k	$L=100$	125	150	175	200	225	250
1	0.279	0.273	0.236	0.216	0.211	0.165	0.141
2	0.635	0.507	0.414	0.345	0.294	0.257	0.229
3	0.295	0.196	0.125	0.088	0.078	0.072	0.070
4	0.467	0.343	0.253	0.186	0.137	0.104	0.083
5	0.509	0.381	0.286	0.213	0.159	0.119	0.092
6	0.627	0.492	0.389	0.308	0.245	0.194	0.154
7	0.732	0.590	0.481	0.395	0.324	0.267	0.220
8	0.723	0.582	0.474	0.388	0.318	0.261	0.215
Фильтры (4.23) для различных значений параметра S							
S	$L=100$	125	150	175	200	225	250
1	0.236	0.177	0.142	0.137	0.137	0.134	0.128
2	0.234	0.174	0.133	0.125	0.125	0.122	0.118
5	0.232	0.171	0.117	0.100	0.096	0.096	0.094
8	0.234	0.175	0.113	0.089	0.081	0.080	0.080
12	0.236	0.182	0.117	0.088	0.075	0.070	0.069
20	0.243	0.196	0.133	0.102	0.087	0.070	0.065
40	0.253	0.220	0.164	0.135	0.121	0.093	0.079
60	0.259	0.232	0.180	0.152	0.141	0.108	0.090

Аналогичные результаты получены при построении графиков коэффициента ошибок на бит BER, которые показаны на рисунке 21. Для $L = 125, 150$ атомарный фильтр (4.23) при $S = 12$ позволяет получить существенно меньшее число ошибок по сравнению с оконными фильтрами. При

увеличении числа L преимущество фильтра (4.23) при $S = 12$ перед фильтром на основе окна $w_3(x)$ становится менее заметным.

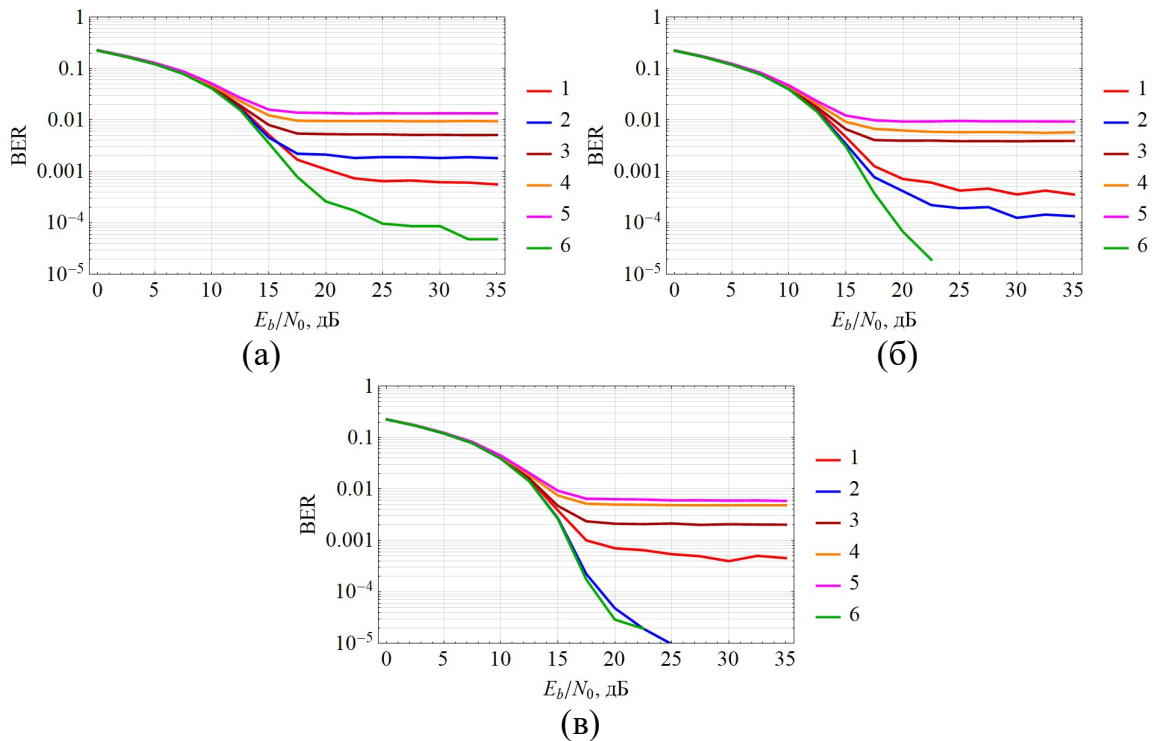


Рисунок 21 – Зависимости коэффициента BER от отношения E_b / N_0 , полученные при применении различных КИХ-фильтров порядка $2L + 1$ для $L = 125$ (а), $L = 150$ (б), $L = 175$ (в): оконных фильтров на основе функций $w_1(x)$ (кривая 1), $w_3(x)$ (кривая 2), $w_4(x)$ (кривая 3), $w_6(x)$ (кривая 4), $w_7(x)$ (кривая 5) и фильтра (4.23) при $S = 12$ (кривая 6).

Выводы к главе 4

Проанализирован алгоритм передачи данных на основе ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией. Показано, что при применении метода OFDM с фильтрацией возникают погрешности трех различных видов.

1. Погрешность, вызываемая фильтрацией OFDM-символа с циклическим префиксом и усечением полученной последовательности;
2. Погрешность из-за фильтрации соседних по времени символов;

3. Погрешность, появляющаяся при применении субполосного фильтра к сигналам из других субполос.

Для подавления погрешностей, указанных в п.1 и п.2, разработан модифицированный алгоритм, основанный на свойствах циклической свертки. Выполнено экспериментальное сравнение эффективности предложенного и стандартного алгоритмов. Модифицированный метод OFDM с фильтрацией позволил получить QAM-символы с меньшей погрешностью и обеспечил качественное восстановление данных для схем высокого порядка QAM 1024 и QAM 4096.

Во втором численном эксперименте рассмотрена схема передачи данных с небольшим количеством защитных частот. В модифицированном методе OFDM с фильтрацией, помимо оконных фильтров, применялись КИХ-фильтры с АЧХ, аппроксимирующими суммы сдвигов атомарных функций $h_a(x)$. При небольших размерах ИХ некоторые из использованных фильтров на основе атомарных функций позволили получить лучшее качество восстановления данных по сравнению с оконными фильтрами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщение ряда отсчетов спектрами атомарных функций обладает важным преимуществом по сравнению с классическим рядом – возможностью с большей точностью восстанавливать сигнал по усеченной выборке отсчетов. В главе 1 впервые построены оценки ошибки усечения для разложения Кравченко-Котельникова. Из полученных формул следует, что погрешность усечения при замене бесконечного ряда конечной суммой из $2N + 1$ слагаемых при $N \rightarrow \infty$ затухает быстрее, чем $O(N^{-r})$, где r — произвольное положительное число. Выведена также оценка ошибки усечения для полезного в практических приложениях случая, когда базисными функциями ряда являются произведения конечного числа сомножителей. Представленные формулы позволят более эффективно применять ряд для решения задач цифровой обработки сигналов и изображений.

Быстрая сходимость ряда Кравченко-Котельникова позволяет предположить перспективность его использования в качестве теоретической основы методов фильтрации сигналов. В исследовании рассмотрена возможность синтеза аналоговых и цифровых фильтров с АЧХ, аппроксимирующими атомарные функции $h_a(x)$. В главе 2 построены новые цифровые КИХ-фильтры с АЧХ на основе функций $h_a(x)$. Метод определения коэффициентов ИХ позволяет синтезировать фильтры с заданными спецификацией полосами пропускания и подавления. Доказаны теоремы об оценках отклонений АЧХ новых фильтров. Предложенный алгоритм синтеза КИХ-фильтров сравним по простоте реализации с методом оконного взвешивания, при этом применение новых фильтров в некоторых случаях дает лучшие результаты по сравнению с оконными фильтрами.

Разработка метода синтеза аналоговых фильтров с АЧХ на основе атомарных функций, которой посвящена глава 3, оказалась сложной задачей. Для ее решения создан и теоретически обоснован алгоритм аппроксимации финитных функций с быстро сходящимся рядом Фурье неотрицательными рациональными

дробями. На основе приближений, получаемых с помощью данного алгоритма, построены аналоговые фильтры с АЧХ, аппроксимирующими функции $h_a(x)$. Приведен пример моделирования ЦАП, в котором продемонстрирована малая чувствительность фильтра на основе функции $h_3(\omega)$ к отбрасыванию отсчетов восстанавливаемого сигнала. Новые аналоговые фильтры использованы в качестве прототипов для построения цифровых БИХ-фильтров с АЧХ, приближающимися по форме к атомарным функциям $h_a(\omega)$. Синтез выполнялся с помощью алгоритмов инвариантной ИХ и билинейного преобразования. Построенные БИХ-фильтры, как и аналоговые фильтры на основе атомарных функций, позволили выполнить качественное восстановление сигнала по неполной выборке отсчетов.

Проведенные в главах 2,3 численные эксперименты показали эффективность применения фильтров на основе атомарных функций в алгоритмах МОС и ЦАП, которые часто используются в методах обработки сигналов в системах беспроводной связи и телевизионного вещания.

В главе 4 рассмотрен метод OFDM с фильтрацией, предназначенный для передачи данных по сетям мобильной связи. Проанализирована образующаяся при применении метода погрешность восстановления QAM-символов. Для снижения погрешности предложен модифицированный алгоритм OFDM с фильтрацией. При проведении численного эксперимента модифицированный метод обеспечил качественное восстановление данных для схем высокого порядка QAM 1024 и QAM 4096. Во втором численном эксперименте выбрана схема передачи данных с малым количеством защитных частот. Модифицированный алгоритм OFDM с фильтрацией применен в сочетании с оконными фильтрами и фильтрами с АЧХ, аппроксимирующими суммы сдвигов атомарных функций. При небольших размерах ИХ некоторые из использованных фильтров на основе атомарных функций позволили получить лучшее качество восстановления данных по сравнению с оконными фильтрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айфичер, Э.С. Цифровая обработка сигналов / Э.С. Айфичер, Б.У. Джервис. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2008. – 989 с.
2. Бакулин, М.Г. Технология OFDM / М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, А.М. Шлома, А.П. Шумов – М.: Горячая линия–Телеком, 2017. – 351 с.
3. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков. – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
4. Витязев, В.В. Многоскоростная обработка сигналов в системах телекоммуникаций / В.В. Витязев // Электросвязь. – 2013. – № 11. – С. 49-56.
5. Витязев, В.В. Многоскоростная обработка сигналов / В.В. Витязев. – М.: Горячая линия–Телеком, 2018. – 336 с.
6. Гадзиковский, В.И. Методы проектирования цифровых фильтров / В.И. Гадзиковский. – М.: Горячая линия–Телеком, 2007. – 413 с.
7. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016. – 211 с.
8. Демьянов, В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
9. Джерри, А. Дж. Теорема отсчётов Шеннона, её различные обобщения и приложения. Обзор / А. Дж. Джерри // ТИИЭР. – 1977. – Т. 65. – № 11. – С. 53—89.
10. Зелкин, Е.Г. Интерполяция сигналов с финитным спектром с помощью преобразований Фурье атомарных функций и ее применение в задачах синтеза антенн / Е.Г. Зелкин, В.Ф. Кравченко, М.А. Басараб // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47. – № 4. – С. 461-468.
11. Катунин, Г.П. Телекоммуникационные системы и сети. Т. 2 – Радиосвязь, радиовещание, телевидение. / Г. П. Катунин, Г. В. Мамчев, В. Н. Попантонопуло, В. П. Шувалов – М: Горячая линия–Телеком, 2013. – 672 с.

12. Кравченко, В.Ф. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях / В.Ф. Кравченко, В.Л. Рвачев. – М.: Физматлит, 2006. – 416 с.
13. Кравченко, В.Ф. Атомарные функции и N-мерная обобщенная теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона / В.Ф. Кравченко, А.Р. Сафин // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2008. – Т. 13. – №12. – С. 31-44.
14. Кравченко, В.Ф. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники / В.Ф. Кравченко, О.В. Кравченко; под ред. В.Ф. Кравченко. – М.: Техносфера, 2018. – 694 с.
15. Кравченко, В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям / В.Ф. Кравченко. – М.: Радиотехника, 2003. – 510 с.
16. Кравченко, В.Ф. Новые конструкции одномерной и двумерной обобщенных теорем Кравченко-Котельникова на основе атомарной функции $up(t)$ / В.Ф. Кравченко, А.В. Юрин // Радиотехника и электроника. – 2014. – Т. 58. – № 9. – С. 971-976.
17. Кравченко, В.Ф. Помехоустойчивый прием сигналов с ортогональным частотным мультиплексированием и обработкой весовыми функциями Кравченко / Кравченко В.Ф., Назаров Л.Е., Пустовойт В.И. // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2020. – Т. 495. – С. 95-99.
18. Кравченко, В.Ф. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиофизики. Часть I / В.Ф. Кравченко, О.В. Кравченко, И.В. Пустовойт, Д.В. Чуриков // Радиотехника и электроника. – 2014. – Т. 59. – № 10. – С. 949-978.
19. Кравченко, В.Ф. Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами / В.Ф. Кравченко, Д.В. Чуриков; под ред. В.Ф. Кравченко. – М.: Техносфера, 2018. – 180 с.

20. Кравченко, В.Ф. Цифровая обработка сигналов на основе обобщённых теорем отсчётов Кравченко — Котельникова — Левитана / В.Ф. Кравченко, В.И. Пустовойт, Д.В. Чуриков // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57. – № 9. – С. 1039-1048.
21. Лэм, Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация / Г. Лэм. – М.: Мир, 1982. – 592 с.
22. Ромашов, В.В. Математические модели шумовых характеристик цифро-аналоговых преобразователей / В.В. Ромашов, Л.В. Ромашова, И.Д. Грошков, Н.А. Сочнева // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. – 2021. – №2. – С. 50-56.
23. Свиньин, С.Ф. Фinitные базисные функции в задачах формирования выборок сигналов конечной протяженности / С.Ф. Свиньин, А.И. Попов // Тр. СПИИРАН. – 2015. – Т. 43. – С. 50-67.
24. Хэмминг, Р.В. Теория кодирования и информации / Р.В. Хэмминг. – М.: Радио и связь, 1987. – 174 с.
25. Ченг, Ю. Развитие беспроводных систем на основе быстродействующих ЦАП / Ю. Ченг, А. Толедано // Схемотехника и конструирование. – 2013. – № 4. – С. 65-68.
26. Якименко, К.А. Влияние джиттера опорной частоты на спектральные характеристики синтезаторов частот на основе быстродействующих цифро-аналоговых преобразователей / К.А. Якименко // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. – 2023. – №1. – С. 61-69.
27. Abdoli, J. Filtered OFDM: A New Waveform for Future Wireless Systems / J. Abdoli, M. Jia, J. Ma. // Proc. 2015 IEEE 16th Int. Workshop on Signal Proc. Advances in Wireless Comm. (SPAWC) in Stockholm. – 2015. – P. 66-70.
28. Ali, D.M. An Experimental Study of F-OFDM Spectrum Efficiency for 5G Applications / D.M. Ali, Z.Z. Yahya // Intern. J. Microwave and Optical Technol. – 2022. – Vol. 17. – № 1. – P. 1-9.
29. Arslan, H. Wireless communication signals: a laboratory-based approach / H. Arslan. – Hoboken: Wiley, 2021. – 438 p.

30. Benedetto, J.J. Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications / J.J. Benedetto, P.J.S.G. Ferreira. – Boston: Birkhauser, 2001. – 417 p.
31. Big Data in Astronomy: Scientific Data Processing for Advanced Radio Telescopes / Eds.: Linghe Kong, Tian Huang, Yongxin Zhu, Shenghua Yu. – Elsevier, 2020. – 438 p.
32. Budunova, K.A. Application of atomic and R-functions in numerical methods for inversion of the Radon transform / K.A. Budunova, Y.Y. Konovalov, O.V. Kravchenko // Proc. Progress in Electromagnetics Research Symp. (PIERS). St Petersburg 2017. – N.Y.: IEEE, 2017. – P. 1641-1649.
33. Budunova, K.A. Atomic Functions $h_a(x)$ in Digital to Analog Conversion / K.A. Budunova, V.F. Kravchenko // Proc. of 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW), Kharkiv, Ukraine. – 2020. – P. 414-417.
34. Bull, D. Intelligent Image and Video Compression: Communicating Pictures / D. Bull, F. Zhang. – Academic Press, 2021. – 608 p.
35. Corless, R.M. On the LambertW function / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare et al. // Adv. Comp. Maths. – 1996. – V. 5. – P. 329-359.
36. Eldar, Y.C. Sampling Theory: Beyond Bandlimited Systems / Y.C. Eldar. – Cambridge University Press, 2015. – 800 p.
37. Glover, I. Digital Communications / I. Glover, P. Grant. – Pearson Education Ltd, 2004. – 1073 p.
38. Marks II, R. J. Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory / R.J. Marks II. – New York: Springer-Verlag, 1991. – 324 p.
39. Mohamad, M. An analysis of out-of-band emission and in-band interference for precoded and classical OFDM systems /M. Mohamad, R. Nilsson, J.v.d. Beek. // Proc. 21th European Wireless Conf. Budapest. – 2015. doi: 10.13140/RG.2.2.27153.53604
40. Niven, I. Irrational Numbers. The Carus Mathematical Monographs № 11 / I. Niven. – Buffalo, N.Y.: The Mathematical Association of America, 2005. – 176 p.
41. Piper, H. Best asymptotic bounds for truncation error in sampling expansions of

- band-limited signals / H. Piper // IEEE Trans. – 1975. – V.IT-15. – № 4. – P. 687-690.
42. Shikin, E.V. Handbook on Splines for the User / E.V. Shikin, A.I. Plis. – Boca Raton, N.Y.: CRC Press, 1995. – 221 p.
43. Tharwat, M.M. Sampling theories of boundary value problems with several internal points of discontinuity / M.M. Tharwat. // Boundary Value Problems. – 2016. – № 4. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13661-015-0515-1>
44. Vaidyanathan, P.P. Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks and applications: a tutorial / P.P. Vaidyanathan // Proc. IEEE. – 1990. – Vol. 78. – P. 56-93.
45. Zayani, R. WOLA-OFDM: A Potential Candidate for Asynchronous 5G / R. Zayani, Y. Medjahdi, H. Shaiek, D. Roviras. – Proc. 2016 IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps) in Washington. – 2016. DOI: [10.1109/GLOCOMW.2016.7849087](https://doi.org/10.1109/GLOCOMW.2016.7849087)
46. Zhang, X. Filtered-OFDM - Enabler for Flexible Waveform in the 5th Generation Cellular Networks / X. Zhang, M. Jia, L. Chen et al. // Proc. 2015 IEEE Global Communications Conf. (GLOBECOM) in San Diego. – 2015. DOI: [10.1109/GLOCOM.2015.7417854](https://doi.org/10.1109/GLOCOM.2015.7417854)