

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова
Российской академии наук

На правах рукописи



Родионов Данил Александрович

**Плазменные колебания в латерально
ограниченных двумерных электронных системах:
роль эффектов электромагнитного запаздывания**

–

1.3.8 – Физика конденсированного состояния

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

Загороднев Игорь Витальевич

Москва – 2025

Содержание

Введение	4
Обзор литературы	9
1. Плазменные колебания в бесконечной изотропной ДЭС	9
2. Плазменные колебания в ДЭС в форме диска в квазистатическом пределе	13
3. Краевой магнитоплазмон	16
Глава 1. Плазменные колебания в изотропной ДЭС в форме диска	18
1.1. Вывод основного уравнения и метод его анализа	18
1.2. Плазменные резонансы в “неэкранированной” системе	28
1.3. Плазменные резонансы в экранированной системе	42
1.4. Предел сильного экранирования	56
Глава 2. Плазменные колебания в сильно экранированной ДЭС в форме полосы	60
2.1. Краевой магнитоплазмон	63
2.2. “Объемные” плазмоны	65
Заключение	70
Словарь терминов	72
Список литературы	73
Приложение А. Энергия осесимметричной моды	86
Приложение Б. Базисные функции для плотности тока	91
Приложение В. Коэффициенты разложения	92

Приложение Г. Индуцированное электрическое поле в декартовых координатах	94
---	-----------

Введение

Актуальность темы исследования.

Плазменные колебания, или по-другому плазмоны, в двумерных электронных системах (ДЭС), в которых носители заряда могут свободно перемещаться только в двух пространственных измерениях, изучаются уже более полувека [1–3]. В последнее время плазмоны активно обсуждаются в связи с открытием большого многообразия новых двумерных материалов. Благодаря достаточно низкой двумерной концентрации носителей и в то же время высокому качеству современных ДЭС, частоты высокочастотных плазмонов могут лежать в гига- и терагерцовом диапазонах, что очень привлекательно для приложений. Плазмоны могут использоваться для генераторов и детекторов терагерцового излучения [4–13], а также интересны своими фундаментальными свойствами [14–27].

Теоретический анализ свойств плазменных колебаний обычно начинают с “бесконечных”, т.е. латерально неограниченных, ДЭС [1, 28–31]. В таком случае интересуются дисперсией плазменных колебаний, что позволяет получить качественное представление о частоте и затухании плазмонов. На практике ДЭС имеют край, и учет латеральной ограниченности очень важен, так как не только позволяет найти правило квантования волнового вектора плазменных колебаний, но и приводит к возникновению новых мод, локализованных у края системы и называемых краевыми [32–35]. В большинстве теоретических работ плазменные колебания в латерально ограниченных ДЭС изучались в квазистатическом пределе, когда размер образца много меньше длины волны возбуждающего электромагнитного излучения [32, 35, 36]. Уже в этом случае аналитический анализ плазмонов довольно трудный. Учет же электромагнитного запаздывания еще усложняет задачу [14, 37–40], однако он важен для объяснения ряда новых эффектов, наблюдаемых в латерально ограниченных системах. Так, к примеру, относительно недавно было обна-

ружено увеличение добротности плазмонов в дисках на основе квантовых ям GaAs/AlGaAs при диаметрах сравнимых с длиной волны возбуждающего излучения [41].

Также интерес представляют плазменные колебания в анизотропных системах [13], таких как моно- или несколько слойные материалы из атомов V группы, к которым относится черный фосфор [42, 43], 1T' фаза некоторых дихалькогенидов [44, 45] и трихалькогенидов [46, 47] переходных металлов, а также некоторые квантовые ямы как, например, напряженная высокоподвижная квантовая яма AlAs/AlGaAs [48]. Уже в бесконечных ДЭС наличие анизотропии не только изменяет свойства плазменных колебаний [49, 50], но и может приводить к возникновению плазмонов нового типа [51, 52].

Цели и задачи диссертационной работы:

Теоретическое исследование влияния электромагнитного запаздывания на свойства плазменных колебаний в латерально ограниченных двумерных электронных системах.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Вычисление зависимости положения и ширины резонансов в спектре поглощения внешнего электромагнитного излучения, соответствующих возбуждению фундаментальной и основной осесимметричной плазменной моды, от параметров изотропной двумерной электронной системы в форме диска с динамической проводимостью, описываемой в рамках модели Друде.

2. Исследование влияния плоского металлического идеально проводящего электрода (затвора), находящегося на произвольном расстоянии от двумерной электронной системы, на положение и ширину резонансов в спектре поглощения внешнего электромагнитного излучения при возбуждении фундаментального и основного осесимметричного плазменных резонансов в изотропной двумерной электронной системе с динамической проводимостью в модели Друде.

3. Определение частоты и затухания собственных магнитоплазменных

мод в сильно экранированной двумерной электронной системе в форме полосы с анизотропией эффективных масс, динамическая проводимость которой описывается в рамках анизотропной модели Друде во внешнем постоянном однородном магнитном поле.

Научная новизна. В диссертации изучено проявление эффектов электромагнитного запаздывания в свойствах плазменных колебаний в латерально ограниченных двумерных электронных системах: в изотропном диске, а также в анизотропной полосе.

Теоретическая и практическая значимость.

Получены количественные оценки для частоты и ширины плазменных колебаний в двумерных электронных системах в форме диска и полосы актуальных для эксперимента. В частности, полученные результаты могут быть использованы для интерпретации данных по микроволновой спектроскопии таких систем, а в перспективе для создания генераторов и детекторов терагерцового излучения [6, 7, 9–13, 41, 53–55].

Положения, выносимые на защиту:

1. Ширина плазменных резонансов в спектре поглощения, связанных с возбуждением фундаментальной и осесимметричной моды в двумерной электронной системе в форме диска, динамическая проводимость которой описывается моделью Друде, не является суммой столкновительного и радиационного уширений даже в режиме слабого электромагнитного запаздывания. В режиме сильного электромагнитного запаздывания частота и ширина этих плазменных резонансов стремятся к асимптотическим значениям так, что их добротность порядка единицы.

2. При увеличении расстояния от идеально проводящего металлического затвора до двумерной электронной системы в форме диска радиационная и полная ширина плазменных резонансов сначала уменьшается, а затем осциллирует с затухающей амплитудой. При расстояниях, существенно превышающих длину волны внешнего возбуждающего электромагнитного излучения,

период этих осцилляций определяется отношением скорости света к частоте плазменного резонанса.

3. В двумерной электронной системе в форме полосы с анизотропией эффективной массы дисперсионное уравнение, описывающее краевой магнитоплазмон, содержит только диагональную компоненту тензора удельного сопротивления в случае малого расстояния между двумерной системой и затвором. В рамках анизотропной динамической модели Друде частота краевого магнитоплазмона не зависит от величины перпендикулярного магнитного поля. Квадрат частоты остальных мод является суммой квадрата плазменной частоты в отсутствие магнитного поля и слагаемого пропорционального квадрату циклотронной частоты, в котором коэффициент пропорциональности не зависит от ориентации осей тензора эффективных масс и уменьшается при увеличении роли электромагнитного запаздывания.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность представленных в диссертации результатов подтверждается тем, что они воспроизводимы, корректно описывают известные предельные случаи и при их получении использовались проверенные методы теоретической физики. Полученные теоретические результаты признаны научной общественностью при обсуждениях на российских и международных научных конференциях и научных семинарах, а также подтверждены положительными рецензиями опубликованных научных статей.

Основные результаты диссертации докладывались лично автором на 24th International Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional Systems (31 октября – 5 ноября 2021, онлайн), XV Российской конференции по физике полупроводников (3 – 7 октября 2022, Нижегородская обл.), XXIV, XXV и XXVII международном симпозиуме «Нанозифика и нанозлектроника» (10 – 14 марта 2020, 9 – 12 марта 2021, 13 – 16 марта 2023, г. Нижний Новгород), 12-ой и 13-ой Международной научно-практической конференции по физике и технологии наногетероструктурной СВЧ электроники «Мокеровские чте-

ния» (20 – 21 мая 2021, 25 – 26 мая 2022, г. Москва), VI и VIII Международной конференции «Лазерные, плазменные исследования и технологии» ЛаПлаз-2020 (11 – 14 февраля 2020, 22 – 25 марта 2022, г. Москва), Совещании по теории твердого тела 2023 (17 – 19 мая 2023, г. Санкт-Петербург), XXV Уральской международной зимней школе по физике полупроводников (12 – 17 февраля 2024, Свердловская обл.), Пятой школе молодых ученых "Новые материалы и технологии для систем безопасности"(31 мая – 1 июня 2023, г. Черноголовка).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 23 печатных работах: 5 статей в международных рецензируемых журналах, включенных в систему Web of Science [56–60], 18 публикаций в сборниках трудов и тезисов конференций [61–78].

Личный вклад автора. Автор принимал активное участие в постановке научных задач. Все расчеты выполнены автором лично. Обсуждение полученных результатов и их подготовка к публикации проводились совместно с соавторами.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 2-х глав, заключения, библиографии и 4-х приложений. Работа содержит 95 страниц, 13 рисунков и список литературы из 111 источников.

Обзор литературы

Двумерные электронные системы (ДЭС) – это системы, в которых электроны могут двигаться свободно только в двух направлениях. К таким системам можно отнести тонкие металлические пленки высокого качества, МДП-структуры, квантовые ямы, двумерные материалы и т.п. В диссертационной работе рассматриваются ДЭС с локальной динамической проводимостью в рамках модели Друде. Такая проводимость применима ко многим современным двумерным электронным системам при низких температурах (меньших, чем температура Ферми) пока рассматриваются малые частоты, не допускающие межзонных переходов носителей заряда, а длина волны плазменных возбуждений в системе много больше, чем длина свободного пробега электрона, длины волны Ферми и, если система латерально ограничена, характерной длины неоднородности вблизи края.

Далее, говоря про изотропные ДЭС, будет подразумеваться следующий вид динамической проводимости:

$$\sigma = \frac{n_s e^2 \tau}{m(1 - i\omega\tau)}, \quad (1)$$

где n_s , m , e и τ – поверхностная концентрация, эффективная масса, заряд носителей и их время релаксации импульса соответственно. В случае систем, где спектр носителей заряда является линейным (например, графен), под эффективной массой следует понимать отношение величины химического потенциала к квадрату скорости Ферми.

1. Плазменные колебания в бесконечной изотропной ДЭС

Прежде чем рассматривать латерально ограниченные системы, целесообразно обсудить бесконечные, т.е. латерально неограниченные, ДЭС, поскольку спектры плазмонов в них могут быть легко получены аналитически

и помогут качественно понять некоторые особенности плазмонов в ограниченных системах. Пусть ДЭС расположена на расстоянии d под бесконечным плоским идеально проводящим металлическим электродом. Вокруг ДЭС однородное диэлектрическое окружение с проницаемостью ε . Рассмотрим распространение двумерных плазменных возбуждений в виде плоских волн, т.е. предполагая, что малые отклонения плотности заряда и других величин от их средних значений пропорциональны $\exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r})$, где ω и \mathbf{q} – комплексная плазменная частота и действительный двумерный волновой вектор соответственно, а \mathbf{r} – радиус-вектор в плоскости ДЭС. Действительная часть ω соответствует частоте колебаний плазмона, а мнимая – характеризует темп затухания. Далее, без потери общности, считаем, что действительная часть плазменной частоты имеет положительное значение.

Пионерские работы, предсказывающие существование плазменных колебаний в ДЭС [79, 80] и демонстрирующие их обнаружение [2, 3], были выполнены в квазистатическом пределе, когда скорость света в окружающей среде много больше всех характерных скоростей в системе, т.е. формально $c \rightarrow \infty$. В таком пределе магнитными полями плазмона можно пренебречь, а электрическое поле описывать с помощью скалярного потенциала. Используя уравнение Пуассона, уравнение непрерывности и локальный закон Ома с проводимостью (1), можно показать, что существует продольный (ТМ) плазмон, т.е. электрическое поле в плоскости ДЭС коллинеарно волновому вектору, и его частота есть

$$\omega_{pl}(q) = \sqrt{\frac{2\pi n_s e^2}{\varepsilon m} q (1 - e^{-2qd}) - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} - i\frac{\gamma}{2}, \quad (2)$$

где $\gamma = 1/\tau$ – обратное время релаксации импульса носителей заряда в системе. В случае добротных плазменных колебаний, т.е. при условии $\text{Re } \omega_{pl} \gg |\text{Im } \omega_{pl}|$, γ может быть положена нулем под корнем, и тогда темп затухания плазмонов равен $\gamma/2$ и определяется только временем рассеяния носителей заряда в системе.

В отсутствие металла $d \rightarrow \infty$ действительная часть частоты плазмона имеет корневой закон дисперсии [79]:

$$\operatorname{Re} \omega_{pl}(q) = \sqrt{\frac{2\pi n_s e^2}{\varepsilon m}} q, \quad (3)$$

Наличие металла приводит к уменьшению частоты. Это связано с экранированием взаимодействия Кулона между зарядами внутри ДЭС из-за возникновения зарядов изображения в металле. В случае сильного экранирования, соответствующего расстояниям d много меньшим длины волны плазмон, т.е. $qd \ll 1$, дисперсия оказывается линейной [81]:

$$\operatorname{Re} \omega_{pl}(q) = vq, \quad v = \sqrt{\frac{4\pi n_s e^2 d}{\varepsilon m}} \quad (4)$$

В пределе сильного экранирования плазменные колебания качественно похожи на волны в мелкой воде [4, 82, 83].

При малых волновых векторах согласно (2) групповая скорость плазмона, вообще говоря, может быть больше скорости света, что указывает на необходимость учета в этой области электромагнитного запаздывания. Ниже рассмотрим как конечность скорости света модифицирует частоту и затухание плазменных колебаний в “неэкранированной”, т.е. в отсутствие затвора, ДЭС и в случае сильного экранирования.

Учет электромагнитного запаздывания приводит не только к изменениям свойств ТМ-плазмона, но и к возникновению поперечного (ТЕ) плазмона, у которого вектор электрического поля в плоскости ДЭС перпендикулярен волновому вектору. В системах с динамической проводимостью в модели Друде он является чисто релаксационным, т.е. $\operatorname{Re} \omega \ll |\operatorname{Im} \omega|$. Дисперсионное уравнение ТМ-плазмона имеет вид [84–86]:

$$1 + i \frac{2\pi\sigma\beta}{\varepsilon\omega} (1 - e^{-2\beta d}) = 0, \quad (5)$$

где параметр $\beta = \sqrt{q^2 - \varepsilon\omega^2/c^2}$, обладающий положительной действительной частью $\operatorname{Re} \beta \geq 0$, описывает локализацию электромагнитных полей плазмона вблизи ДЭС в верхнем полупространстве.

В “неэкранированной” ДЭС ($d \rightarrow \infty$) с проводимостью (1) дисперсионное уравнение (5) имеет явный вид

$$\omega + i\gamma - \frac{2\pi n_s e^2}{\varepsilon m \omega} \sqrt{q^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} = 0. \quad (6)$$

В таком виде дисперсионное уравнение впервые было получено и проанализировано в работе [28]. Однако выражение для частоты плазменных колебаний в “чистой” ДЭС, т.е. при $\gamma = 0$, было известно задолго до этого из работы [1]:

$$\omega_{pl-p}^2(q) = \sqrt{\left(\frac{2\pi n_s e^2}{\varepsilon m} q\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi n_s e^2}{\varepsilon m c}\right)^4} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi n_s e^2}{\varepsilon m c}\right)^2, \quad (7)$$

В квазистатическом пределе ($c \rightarrow \infty$) это выражение переходит в (3). При малых волновых векторах дисперсия плазменных колебаний приближается к дисперсии света $\omega_{light}(q) = cq/\sqrt{\varepsilon}$, в связи с чем часто говорят не просто о плазмоне, а о плазмон-поляритоне. Выражение (7) можно переписать в несколько ином виде:

$$\omega_{pl-p}^2(q) = \omega_{pl}^2(q) \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_{pl}(q)}{\omega_{light}(q)}\right)^4} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{pl}(q)}{\omega_{light}(q)}\right)^2} \right], \quad (8)$$

где $\omega_{pl}(q)$ – дисперсия плазмона в квазистатике (3). Такая запись показывает, что удобным параметром для оценки важности электромагнитного запаздывания является отношение частоты плазмона в квазистатическом пределе к частоте света при том же волновом векторе. В случае, когда этот параметр много меньше единицы, реализуется квазистатика.

Отметим, что частота плазменных колебаний (7), являющаяся точным решением (6) при $\gamma = 0$, является действительной величиной. В отсутствие рассеяния носителей заряда плазмон является бездиссипативным. Таким образом, мнимая часть частоты собственных колебаний в бесконечной ДЭС не может дать полную информацию о структуре затухания плазмонов в латерально ограниченной системе, где у них присутствуют радиационные потери.

В пределе сильного экранирования, т.е. $|\beta|d \ll 1$, частота плазмона может быть выписана аналитически [87]:

$$\omega_{pl}(q) = \sqrt{\frac{v^2 q^2}{1 + \varepsilon \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\gamma^2}{4 \left(1 + \varepsilon \frac{v^2}{c^2}\right)^2}} - i \frac{\gamma}{2 \left(1 + \varepsilon \frac{v^2}{c^2}\right)}, \quad (9)$$

где v определена в (4). Для добротных плазменных колебаний действительная часть частоты

$$\text{Re } \omega_{pl}(q) = \frac{v}{\sqrt{1 + \varepsilon \frac{v^2}{c^2}}} q, \quad (10)$$

сохраняет линейную зависимость от длины волнового вектора q , однако теперь групповая скорость меньше, чем в квазистатическом пределе, и не превышает скорости света в среде $c/\sqrt{\varepsilon}$. Хотя учет электромагнитного запаздывания приводит к уменьшению затухания, добротность $\text{Re } \omega_{pl}/|\text{Im } \omega_{pl}|$ по сравнению с квазистатикой понижается. Из равенства (9) видно, что в пределе сильного экранирования степень влияния электромагнитного запаздывания характеризуется отношением $\sqrt{\varepsilon}v/c$ скорости плазмона в квазистатическом пределе к скорости света в среде.

2. Плазменные колебания в ДЭС в форме диска в квазистатическом пределе

Учет границы в системе значительно усложняет анализ плазменных колебаний. Обычно удается получить уравнение на какую либо функцию (возмущение плотности заряда, плотность тока, тангенциальная компонента электрического поля и т.п.) в плоскости ДЭС. Однако оно является интегро-дифференциальным с интегральным ядром, имеющим особенность. Так сегодня его точное аналитическое решение может быть найдено в некоторых случаях только для ДЭС в форме полуплоскости, где задача решается методом Винера-Хопфа [32, 40, 88, 89]. В случае других геометрий приходится прибегать к приближенным методам, к которым можно отнести метод замены

интегрального ядра [33, 90, 91] и вариационный метод [36]. Так же задача может быть решена “полуаналитическим” методом Галеркина (разложение искомой функции по базису) [35, 37, 92] или полностью численно [39].

Перейдем к рассмотрению плазменных колебаний в диске. Учитывая цилиндрическую симметрию системы и изотропность ДЭС, плазменные моды характеризуются *орбитальным* $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и *радиальным* $n_r = 1, 2, \dots$ числами [14, 34, 35, 38]. Число n_r совпадает с количеством нулей функции плотности заряда вдоль радиуса, а число $2|l|$ – с числом нулей вдоль периметра. Таким образом, орбитальное и радиальное число характеризуют “квантование” свойств плазмона по периметру и радиусу диска соответственно. Моды с орбитальным числом $l = 0$ соответствуют осесимметричным колебаниям, в которых заряды и токи движутся только в радиальном направлении. Иногда эти моды также называют темными или “дышащими”, поскольку они имеют нулевой дипольный и ненулевой электрический квадрупольный моменты, и следовательно довольно слабо взаимодействуют с электромагнитным излучением [53, 93]. Всюду ниже, говоря об осесимметричной моде, мы будем понимать моду с $n_r = 1$.

В квазистатическом пределе теоретическое исследование плазменных колебаний проводилось в работах [34, 35]. В этом случае электрическое поле полностью описывается скалярным потенциалом. Для ДЭС в однородном диэлектрическом окружении, пользуясь уравнением Пуассона, материальной связью с локальным законом Ома и уравнением непрерывности, можно выписать уравнение на возмущение l -ой гармоники плотности заряда в диске [35]:

$$-i \frac{\varepsilon \omega R}{2\pi \sigma} \rho_l(\tilde{r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} - \frac{l^2}{\tilde{r}^2} \right) \int_0^1 \left[\int_0^\infty J_l(p\tilde{r}) J_l(p\tilde{r}') dp \right] \rho_l(\tilde{r}') \tilde{r}' d\tilde{r}', \tilde{r} < 1. \quad (11)$$

Здесь \tilde{r} – радиальная координата, отнормированная на радиус диска R . В таком виде уравнение можно интерпретировать как задачу на отыскание соб-

ственных значений интегро-дифференциального оператора, которые обозначим через $-1/\alpha_{l,n_r}$, и соответствующих им собственных функций $\rho_l(\tilde{r})$. Тогда собственная частота ω_{l,n_r} плазменных мод в системе с проводимостью (1) равна

$$-i\frac{\varepsilon\omega R}{2\pi\sigma} = -\frac{1}{\alpha_{l,n_r}} \implies \omega_{l,n_r} = \omega_{pl} \left(\frac{\alpha_{l,n_r}}{R} \right), \quad (12)$$

где $\omega_{pl}(q)$ определена в (2) при $d \rightarrow \infty$. Таким образом частота и затухание плазменных колебаний могут быть получены подходящим квантованием волнового вектора в дисперсии плазменных колебаний в латерально неограниченной ДЭС в квазистатическом пределе. В работе [35] задача решалась разложением искомой функции в ряд по функциям Якоби. Для осесимметричной и фундаментальной ($l = 1, n_r = 1$) моды, обсуждаемых в данной диссертационной работе, числа α_{l,n_r} принимают значения:

$$\alpha_{0,1} = 3.5, \quad \alpha_{1,1} = 1.2 \quad (13)$$

Качественно, эти величины можно оценить следующим образом. Волновой вектор определяется некоторой характерной длиной волны λ , т.е. $q = 2\pi/\lambda$. Для осесимметричной моды длина волны укладывается на диаметре, т.е. $q \approx \pi/R$, а для фундаментальной – на периметре диска, т.е. $q \approx 1/R$.

Система при наличии плоского идеально проводящего металлического затвора под диском на расстоянии d эффективно может быть сведена к взаимодействующую ДЭС и его отражения под металлом на расстоянии $2d$ (метод изображений). В таком случае интегральное ядро в (...) следует заменить, домножив подынтегральное выражение на $1 - e^{-2dp/R}$. Теперь числа α_{l,n_r} будут зависеть от отношения d/R , где рассмотренный выше случай отсутствия металла соответствует пределу $d/R \rightarrow \infty$. При постепенном сближении ДЭС и металла происходит уменьшение плазменной частоты [35]. В пределе сильного экранирования, когда $d/R \ll 1$ интегральное ядро вырождается в дельта-функцию Дирака: заряды взаимодействуют только со своим отображением под металлом. В таком пределе уравнение становится дифференциальным

и может быть решено аналитически. Оказывается, что $\alpha_{l,n_r} = \mu_{l,n_r} d/R$, где μ_{l,n_r} является n_r -ым нулем производной функции Бесселя первого рода l -го порядка, и частота плазмонов есть $\mu_{l,n_r} v/R$.

3. Краевой магнитоплазмон

Одним из дополнительных способов управления частотой плазмона является внешнее магнитное поле. При наличии постоянного однородного магнитного поля, вектор индукции \mathbf{B} которого перпендикулярен плоскости ДЭС, проводимость (1) становится тензором и приобретает вид:

$$\sigma = \frac{n_s e^2 \tau}{m} \begin{pmatrix} \frac{(1-i\omega\tau)}{(1-i\omega\tau)^2 + \omega_c^2 \tau^2} & \frac{-\omega_c \tau}{(1-i\omega\tau)^2 + \omega_c^2 \tau^2} \\ \frac{\omega_c \tau}{(1-i\omega\tau)^2 + \omega_c^2 \tau^2} & \frac{(1-i\omega\tau)}{(1-i\omega\tau)^2 + \omega_c^2 \tau^2} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $\omega_c = eB/mc$ – циклотронная частота носителей заряда. В квазистатическом пределе частота магнитоплазменных колебаний $\omega_{mpl}(q)$ в “чистой” бесконечной ДЭС подчиняется следующему соотношению [81, 84, 94]:

$$\omega_{mpl}^2(q) = \omega_{pl}^2(q) + \omega_c^2, \quad (15)$$

где $\omega_{pl}(q)$ определена в (2) при $\gamma = 0$. В случае сильного экранирования частота магнитоплазмона согласно (4) есть

$$\omega_{mpl}(q) = \sqrt{v^2 q^2 + \omega_c^2}, \quad (16)$$

где скорость v определена в (4).

Учет края ДЭС приводит к возникновению краевых магнитоплазмонов, заряды и токи которых локализованы вблизи края при достаточно больших магнитных полях [32, 33]. Как отмечалось выше, исследование плазменных колебаний в латерально ограниченных системах задача трудная. Однако для ДЭС в форме полуплоскости в некоторых случаях существует аналитическое решение, которое может быть найдено с использованием метода Винера-Хопфа [32, 40]. Используя результаты работы [32] можно показать, в

частности, что в сильно экранированной ДЭС с линейным краем в квазистатическом пределе частота краевого магнитоплазмона равна $v|q_y|$, где q_y – проекция волнового вектора вдоль края.

Глава 1

Плазменные колебания в изотропной ДЭС в форме диска

Обсуждаемые в данной главе результаты изложены в работах [56–58] автора диссертационной работы.

1.1. Вывод основного уравнения и метод его анализа

Один из способов исследования плазменных колебаний – это изучение их проявления в спектрах пропускания, отражения или поглощения внешнего электромагнитного излучения. При возбуждении плазменных колебаний в системе наблюдаются, например, резонансы в спектре поглощения, положения которых соответствуют частоте плазмонов, а ширина – темпу их затухания. Таким образом, первой задачей является вывод уравнения для плотности тока в системе. Из полученного уравнения следует найти плотность тока, с помощью которого определяются Джоулевы потери и, соответственно, восстанавливается спектр поглощения, который далее анализируется.

Рассмотрим диск радиуса R с ДЭС в однородном диэлектрическом окружении с проницаемостью ε (см. Рис. 1.1). Под ДЭС на расстоянии d располагается идеально проводящий плоский металлический затвор. Выберем декартову систему координат (x, y, z) так, что начало координат в центре диска, а ДЭС располагается в плоскости $z = 0$.

Пусть на исследуемую систему падает некоторое внешнее электромагнитное излучение, электрические и магнитные поля которого $\sim e^{-i\omega t}$, где ω – действительная частота колебаний. В таком случае, в рамках линейного отклика ток в системе и возмущение плотности заряда, а так же генерируемые ими электромагнитные поля, тоже будут колебаться на частоте ω , т.е. будут

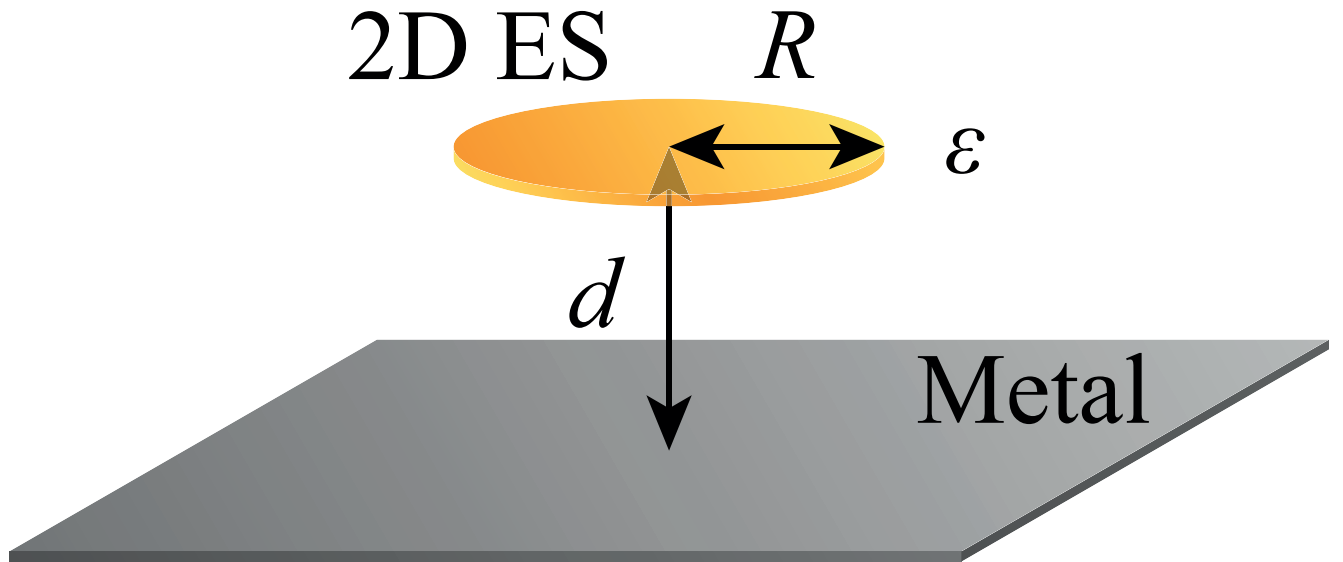


Рис. 1.1. Схематичное изображение исследуемой ДЭС (2D ES). Диск радиуса R расположен над идеально проводящим металлом на расстоянии d . Система находится в однородном диэлектрическом окружении с проницаемостью ϵ .

пропорциональны $e^{-i\omega t}$. В связи с этим для удобства записи всюду ниже временная зависимость будет опускаться, а все операторы дифференцирования по времени заменены на $-i\omega$.

Чтобы получить выражение для индуцированных электромагнитных полей мы воспользуемся уравнениями Максвелла, записанными через потенциалы в СГС:

$$\Delta\varphi(x, y, z) + \epsilon\frac{\omega^2}{c^2}\varphi(x, y, z) = -\frac{4\pi}{\epsilon}\rho(x, y)\delta(z), \quad (1.1)$$

$$\Delta\mathbf{A}(x, y, z) + \epsilon\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{A}(x, y, z) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(x, y)\delta(z), \quad (1.2)$$

где \mathbf{A} и φ – векторный и скалярный потенциалы, \mathbf{j} и ρ – плотность тока и возмущение плотности заряда в ДЭС, Δ – трёхмерный оператор Лапласа, c – скорость света в вакууме, ϵ – диэлектрическая проницаемость окружения. Здесь уравнение на вектор-потенциал двухкомпонентное, поскольку в силу двумерности плотности тока его z -компонента равна нулю, что позволяет положить $A_z(x, y, z) = 0$. Вне диска плотность тока равна нулю. Записанные

выше уравнения верны в калибровке Лоренца:

$$-i\varepsilon\frac{\omega}{c}\varphi(x, y, z) + \operatorname{div} \mathbf{A}(x, y, z) = 0, \quad (1.3)$$

где div – двумерная дивергенция.

Диск обладает круговой симметрией, поэтому удобнее работать в цилиндрических координатах (r, θ, z) , где $x = r \cos \theta$ и $y = r \sin \theta$. Тогда мы можем ввести радиальную и азимутальные компоненты вектора по правилу:

$$\begin{pmatrix} A_r(r, \theta, z) \\ A_\theta(r, \theta, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x(r, \theta, z) \\ A_y(r, \theta, z) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Учитывая, что оператор Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.5)$$

и подставляя представление вектор-потенциала через радиальную и азимутальную компоненты в уравнение на вектор-потенциал (1.2), мы приходим к уравнению

$$\begin{pmatrix} \square - \frac{1}{r^2} & -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \square - \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \mathbf{A}(r, \theta, z) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(r, \theta) \delta(z), \quad (1.6)$$

где введен Фурье-образ по времени от оператора Д'Аламбера $\square = \Delta + \varepsilon\omega^2/c^2$. Здесь вектора \mathbf{A} и \mathbf{j} записаны через радиальную и азимутальную компоненты. Чтобы продвинуться дальше разложим ток и вектор-потенциал в ряд по орбитальным гармоникам $e^{il\theta}$. Тогда для каждой из гармоник мы получаем следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} \square_l - \frac{1}{r^2} & -i\frac{2l}{r^2} \\ i\frac{2l}{r^2} & \square_l - \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \mathbf{A}_l(r, z) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_l(r) \delta(z), \quad (1.7)$$

где \square_l получается из \square заменой $\partial^2/\partial\theta^2 \rightarrow -l^2$. Полученная матрица может быть приведена к диагональному виду с использованием унитарного преобразования S , что позволяет разделить переменные:

$$\begin{pmatrix} \square_{l+1} & 0 \\ 0 & \square_{l-1} \end{pmatrix} \mathbf{A}_S^l(r, z) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_S^l(r) \delta(z), \quad (1.8)$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

где индекс S у вектор потенциала и плотности тока указывает на преобразованные вектора по правилу $\mathbf{a}_S = S^{-1}\mathbf{a}$, где $a_S = (a_1, a_2)^T$. Номер моды l смещен в верхний индекс. Таким образом мы свели эффективно задачу к уравнению Гельмгольца для каждой из компонент преобразованного вектор потенциала.

Следующий шаг к получению уравнения – выразить вектор-потенциал через плотность тока. Для этого мы воспользуемся преобразованием Ганкеля \mathcal{H}_n порядка n , которое вводится для произвольной функции f следующим образом

$$\mathcal{H}_n[f(r)](p) = \int_0^\infty f(r)J_n(pr)rdr, \quad \mathcal{H}_n^{-1}[f(p)](r) = \int_0^\infty f(p)J_n(pr)pdp, \quad (1.10)$$

где \mathcal{H}_n^{-1} – обратное преобразование Ганкеля. Полезным для нас свойством этого преобразования является равенство

$$\mathcal{H}_n \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) f(r) \right] (p) = -p^2 \mathcal{H}_n[f(r)](p). \quad (1.11)$$

Используя преобразование Ганкеля порядка $l+1$ и $l-1$ по координате r к первой и второй компоненте векторного уравнения (1.8) соответственно, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения по z на Ганкель-образы преобразованного вектор-потенциала:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \beta^2 \right) \mathcal{H}_{l+1}[A_1^l(r, z)](p, z) = -\frac{4\pi}{c} \delta(z) \mathcal{H}_{l+1}[j_1^l(r)](p), \quad (1.12)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \beta^2 \right) \mathcal{H}_{l-1}[A_2^l(r, z)](p, z) = -\frac{4\pi}{c} \delta(z) \mathcal{H}_{l-1}[j_2^l(r)](p), \quad (1.13)$$

где введено обозначение $\beta^2 = p^2 - \varepsilon\omega^2/c^2$. Для краткости изложения будем решать первое из полученных уравнений, т.к. на второе все суждения обобщаются тривиально.

Для решения полученного уравнения (1.12) рассмотрим его над плоскостью ДЭС $z = 0$ и под ней. В этих случаях дельта-функция Дирака равна нулю и уравнение становится однородным. Его решениями в каждой из областей является линейная комбинация функций $e^{\pm\beta z}$. Чтобы правильно выбрать коэффициенты в линейной комбинации, нужно учесть граничные условия. В области $z > 0$ при $z \rightarrow \infty$ индуцированное электромагнитное поле должно исчезать или соответствовать уходящей от ДЭС волне. Будем полагать, что при $p > \sqrt{\epsilon}\omega/c$ параметр β принимает положительные значения, а при $p < \sqrt{\epsilon}\omega/c$ он равен $-i\sqrt{|p^2 - \epsilon\omega^2/c^2|}$. Тогда решение, удовлетворяющее граничному условию, оказывается $\propto e^{-\beta z}$. В области же $z < 0$ в плоскости идеально проводящего металла $z = -d$ тангенциальная компонента вектора электрического поля должна быть равна нулю. Чтобы сформулировать это условие на языке вектор-потенциала, воспользуемся следующей логикой. В толще металла, заряды и токи отсутствуют, а потому скалярный и векторный потенциалы всюду равны нулю согласно уравнениям Максвелла (1.1),(1.2). Пользуясь тем, что потенциалы непрерывны, мы можем утверждать, что тангенциальная компонента вектор-потенциала на линии раздела металл-диэлектрик должна быть равна нулю. Это позволяет выбрать решение $\propto \sinh(\beta(z + d))$. Таким образом, используя эти граничные условия и непрерывность вектор потенциала при $z = 0$, мы получаем, что решение может быть записано в следующем виде:

$$\mathcal{H}_{l+1}[A_1^l(r, z)](p, z) = C_1^l(p) \begin{cases} e^{-\beta z} \sinh(\beta d), & z \geq 0, \\ \sinh(\beta(z + d)), & z < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Неизвестный коэффициент $C_1^l(p)$ определяется из условия, продиктованного наличием дельта-функции Дирака $\delta(z)$ в правой части уравнения (1.12), а именно из равенства

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{H}_{l+1}[A_1^l(r, z)](p, z) \Big|_{z=+0} - \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{H}_{l+1}[A_1^l(r, z)](p, z) \Big|_{z=-0} = -\frac{4\pi}{c} \mathcal{H}_{l+1}[j_1^l(r)](p), \quad (1.15)$$

и дается выражением

$$C_1^l(p) = \frac{4\pi}{c} \mathcal{H}_{l+1}[j_1^l(r)](p) \frac{e^{-\beta d}}{\beta}. \quad (1.16)$$

В конечном счете, имеем связь между Ганкель-образами преобразованного вектор-потенциала и плотности тока, которая может быть записана как

$$\mathcal{H}_{l+1}[A_1^l(r, z)](p, z) = \frac{2\pi}{c} \frac{e^{-\beta|z|} - e^{-\beta|z+2d|}}{\beta} \mathcal{H}_{l+1}[j_1^l(r)](p). \quad (1.17)$$

Аналогичную связь можно получить и для компонент из уравнения (1.13).

В итоге, применяя обратное преобразование Ганкеля, мы приходим к интегральной связи:

$$\mathbf{A}_S^l(r, z) = \frac{2\pi}{c} \int_0^R G_l(r, r', z) \mathbf{j}_S^l(r') r' dr', \quad (1.18)$$

$$G_l(r, r', z) = G_l^0(r, r, z) - G_l^0(r, r, z + 2d),$$

$$G_l^0(r, r', z) = \int_0^\infty \frac{p}{\beta} e^{-\beta|z|} \begin{pmatrix} J_{l+1}(pr) J_{l+1}(pr') & 0 \\ 0 & J_{l-1}(pr) J_{l-1}(pr') \end{pmatrix} dp \quad (1.19)$$

Поскольку фактически решалось уравнение Гельмгольца (1.8), то нами найдена функция Грина $G_l(r, r', z)$ для оператора Д'Аламбера. Эта функция строится из суммы запаздывающего потенциала $G_l^0(r, r', z)$ и такого же потенциала, смещенного на расстояние $2d$ под ДЭС. Второе слагаемое имеет противоположный знак и фактически описывает изображение рассматриваемого ДЭС в металле. При $d \rightarrow \infty$ оно стремится к нулю.

Найденный вектор потенциал позволяет установить напряженность индуцированного электрического поля. Из калибровки Лоренца (1.3) находим l -ую гармонику скалярного потенциала

$$\varphi_l(r, z) = -i \frac{c}{\varepsilon \omega} \operatorname{div}_l \mathbf{A}_l(r, z) \quad (1.20)$$

и подставляем его в определение электрического поля через потенциалы

$$\mathbf{E}_l^{\text{ind}}(r, z) = -\operatorname{grad}_l \varphi_l(r, z) + i \frac{\omega}{c} \mathbf{A}_l(r, z). \quad (1.21)$$

Здесь дифференциальные операторы div_l и grad_l есть дивергенция и градиент в полярных координатах, где проведена замена $\partial/\partial\theta \rightarrow il$. Как результат, имеем

$$\mathbf{E}_l^{\text{ind}}(r, z) = i \frac{c}{\varepsilon\omega} \left(\text{grad}_l \text{div}_l + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} I \right) \mathbf{A}_l(r, z), \quad (1.22)$$

где I – единичная матрица размера 2×2 . Переходя в равенстве (1.18) от преобразованных векторов к обычным и подставляя вектор-потенциал в определение электрического поля, получаем в плоскости $z = 0$ связь индуцированного электрического поля и плотности тока в ДЭС:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_l^{\text{ind}}(r) &= i \frac{2\pi}{\varepsilon\omega} \left(\hat{D}_l + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} I \right) \int_0^R S G_l(r, r') S^{-1} \mathbf{j}_l(r') r' dr', \\ \hat{D}_l = \text{grad}_l \text{div}_l &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} & \frac{il}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \\ \frac{il}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) & -\frac{l^2}{r^2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где $\mathbf{E}_l^{\text{ind}}(r) \equiv \mathbf{E}_l^{\text{ind}}(r, 0)$ и $G_l(r, r') \equiv G_l(r, r', 0)$.

В рамках линейного отклика плотность тока подчиняется закону Ома и определяется как произведение тензора её проводимости на суммарное электрическое поле. В таком случае мы можем написать, что $\mathbf{j}(x, y) = \sigma \mathbf{E}^{\text{ext}}(x, y) + \mathbf{E}^{\text{ind}}(x, y)$, где σ – динамическая проводимость, которую мы рассматриваем в модели Друде (1), а \mathbf{E}^{ext} – тангенциальная компонента внешнего электромагнитного излучения. Используя переход к радиальной и азимутальной компонентам согласно (1.4), мы устанавливаем материальную связь для каждой l -ой гармоники

$$\mathbf{j}_l(r) = \sigma \left(\mathbf{E}_l^{\text{ext}}(r) + \mathbf{E}_l^{\text{ind}}(r) \right). \quad (1.24)$$

Совместно уравнения (1.23) и (1.24) являются уравнением на плотность тока в замкнутой форме. Отметим, что это уравнение позволяет изучать отклик на каждую гармонику с номером l независимо.

Обсуждая плазменные колебания в ДЭС с круговой симметрией, на ряду с *орбитальным* числом $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ говорят и о *радиальном* числе

$n_r = 0, 1, 2, \dots$ [14, 34, 35, 38]. Орбитальное число характеризует квантование плазменных колебаний вдоль периметра диска, а радиальное – вдоль радиуса.

Поскольку дальше мы планируем обсуждать эффекты, связанные с наличием электромагнитного запаздывания, то следует уточнить, какой параметр указывает на степень их влияния. В квазистатическом пределе мы предполагаем, что длина волны возбуждающего электромагнитного излучения λ много больше, чем характерный геометрический размер системы. В таком случае обезразмеренная частота $\tilde{\omega} = \sqrt{\varepsilon}\omega R/c = 2\pi\lambda/R$ в пределе $\tilde{\omega} \ll 1$ будет указывать на квазистатический предел. В противном случае будем говорить о влиянии эффектов электромагнитного запаздывания. Приводя все частоты в уравнениях (1.23) и (1.24) к параметру $\tilde{\omega}$, мы получаем основное уравнение этой главы:

$$\mathbf{j}_l(\tilde{r}) = \tilde{\sigma}c\sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}_l^{ext}(r) + i\frac{2\pi\tilde{\sigma}}{\tilde{\omega}}\left(\hat{D}_l + \tilde{\omega}^2I\right)\int_0^1 SG_l(\tilde{r}, \tilde{r}')S^{-1}\mathbf{j}_l(\tilde{r}')\tilde{r}'d\tilde{r}', \quad (1.25)$$

где $\tilde{r} = r/R$ и \tilde{r}' и теперь изменяются в пределе $[0; 1]$. Здесь обезразмеренная “проводимость” $\tilde{\sigma}$ есть

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{c\sqrt{\varepsilon}} = \frac{i}{2\pi}\frac{\tilde{\Gamma}}{\tilde{\omega} + i\tilde{\gamma}}, \quad (1.26)$$

где введены безразмерные параметры $\tilde{\Gamma} = 2\pi n_s e^2 R/mc^2$ и $\tilde{\gamma} = \sqrt{\varepsilon}R/c\tau$. Полученное уравнение является интегро-дифференциальным, а потому требует дополнительно граничного условия. Мы полагаем, что нормальная компонента тока на краю обращается в нуль, т.е. $j_r(1) = 0$. Это условие соответствует тому, что заряд на краю не накапливается.

Обратим внимание, что случай $l = 0$ является в некотором смысле осо-

бенным. Уравнение (1.25) по компонентам имеет следующий вид:

$$j_r(\tilde{r}) = \tilde{\sigma}c\sqrt{\varepsilon}E_r^{ext}(\tilde{r}) + i\frac{2\pi\tilde{\sigma}}{\tilde{\omega}} \left(\frac{\partial^2}{\partial\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}} + \tilde{\omega}^2 \right) \int_0^1 G_0(\tilde{r}, \tilde{r}')j_r(\tilde{r}')\tilde{r}'d\tilde{r}', \quad (1.27)$$

$$j_\theta(\tilde{r}) = \tilde{\sigma}c\sqrt{\varepsilon}E_\theta^{ext}(\tilde{r}) + i2\pi\tilde{\sigma}\tilde{\omega} \int_0^1 G_0(\tilde{r}, \tilde{r}')j_\theta(\tilde{r}')\tilde{r}'d\tilde{r}'. \quad (1.28)$$

Здесь в силу свойств функций Бесселя, а именно $J_{-n}(z) = -J_n(z)$, матрица $G_l(r, r')$ переходит в скаляр. Из полученных уравнений видно, что радиальная E_r и азимутальная E_θ компоненты независимо возбуждают радиальную j_r и азимутальную j_θ компоненты плотности тока соответственно. В отсутствие азимутальной составляющей внешнего электрического поля будет присутствовать только радиальная компонента плотности тока. Плазменные колебания с такой конфигурацией тока мы будем называть осесимметричными.

Свойства плазменных резонансов зависят только от внутренних характеристик ДЭС. Так их положение и ширина, обезразмеренные на частоту $c/R\sqrt{\varepsilon}$, будут определяться только двумя безразмерными параметрами $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\Gamma}$. Первый из этих параметров содержит информацию о рассеянии носителей в ДЭС, характеризующееся временем τ , и назван нами *столкновительным параметром*. В достаточно “чистых” системах, когда частота плазменных колебаний много больше $1/\tau$ ($\tilde{\omega} \gg \tilde{\gamma}$), положение плазменных резонансов определяется только параметром $\tilde{\Gamma}$. В свою очередь, этот параметр фактически равен квадрату отношения частоты плазменных колебаний в бесконечной системе в квазистатическом пределе, определяемой как $\omega_{pl}(q) = \sqrt{2\pi n_s e^2 q / \varepsilon m}$ (3), к частоте света в среде $\omega_{light}(q) = cq/\sqrt{\varepsilon}$ при волновом векторе $q = 1/R$. Параметр $\tilde{\Gamma}$ называется *параметром запаздывания* [41, 53, 95].

Отметим, что ядро $G_l(r, r')$ имеет четность $(-1)^{l+1}$ относительно замены $r \rightarrow -r$ в силу свойств функций Бесселя порядка $l \pm 1$. Так как дифференциальный оператор \hat{D} в уравнении (1.25) сохраняет четность, индуцированное поле и, следовательно, плотность тока должны быть нечетными и четными

функциями по r для гармоник с четным l и нечетным соответственно.

Для решения уравнения (1.25) мы разложим плотность тока по некоторому полному набору базисных функций, удовлетворяющих граничному условию. Полученное разложение подставим в уравнение и скалярно домножим на каждую базисную функцию в разложении. Таким образом получится бесконечная система линейных уравнений на коэффициенты разложения. Затем мы оставляем конечное количество коэффициентов в полученной системе, решаем её и, таким образом, находим аппроксимацию плотности тока. Наконец, мы рассчитываем среднюю за период мощность джоулевых потерь P_{abs} :

$$P_{abs} = \int_0^T \left[\int_0^R \operatorname{Re}(\mathbf{j}_l(r)e^{il\theta-i\omega t}) \cdot \operatorname{Re}(\mathbf{E}_l(r)e^{il\theta-i\omega t}) r dr d\theta \right] \frac{dt}{T}, \quad (1.29)$$

где $\mathbf{E}_l(r)$ – суммарное электрическое поле внутри ДЭС, Re – действительная часть и $T = 2\pi/\omega$ – период колебаний. Вспоминая, что $\mathbf{j}_l(r) = \sigma \mathbf{E}_l(r)$ и переходя к безразмерным параметрам, мы получаем

$$P_{abs}(\tilde{\omega}) = \frac{2\pi^2 \tilde{\gamma} R^2}{\sqrt{\epsilon c \tilde{\Gamma}}} \int_0^1 |\mathbf{j}_l(\tilde{r})|^2 \tilde{r} d\tilde{r}. \quad (1.30)$$

Таким образом, мы сможем найти зависимость мощности поглощения от частоты внешнего излучения. Резонансы, возникающие в спектре поглощения, соответствуют возбуждению плазменных колебаний в системе.

Для поиска аналитических аппроксимаций мы воспользуемся одной базисной функцией. Положение резонанса $\tilde{\omega}_{max}$ определяется как точка локального максимума функции поглощения P_{abs} , т.е. удовлетворяет уравнению $dP_{abs}(\tilde{\omega})/d\tilde{\omega}|_{\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_{max}} = 0$. Чтобы оценить ширину $\Delta\tilde{\omega}$ плазменных резонансов мы воспользуемся аппроксимацией контуром Лоренца:

$$P_L(\tilde{\omega}) = P_{max} \frac{\Delta\tilde{\omega}^2}{(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_{max})^2 + \Delta\tilde{\omega}^2} \quad (1.31)$$

Разложим функции $1/P_{abs}$ по частоте в окрестности положения резонанса $\tilde{\omega}_{max}$ до второго порядка, в котором производная от P_{abs} по частоте равняется

нулю:

$$\frac{1}{P_{abs}(\tilde{\omega})} = \frac{1}{P_{abs}(\tilde{\omega}_{max})} - \frac{P''_{abs}(\tilde{\omega}_{max})}{2P_{abs}(\tilde{\omega}_{max})^2}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_{max})^2 + \dots, \quad (1.32)$$

где $P''_{abs}(\tilde{\omega})$ - вторая производная по частоте. Сравнивая $1/P_L(\tilde{\omega})$ с полученным выражением, получаем формулу для оценки ширины плазменного резонанса:

$$\Delta\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{2P_{abs}(\tilde{\omega}_{max})}{|P''_{abs}(\tilde{\omega}_{max})|}}. \quad (1.33)$$

Ниже приступим к анализу основной осесимметричной моды с числом $l = 0$, $n_r = 1$ и фундаментальной моды $l = 1$, $n_r = 1$. Сначала будет рассмотрен случай отсутствия металла ($d \rightarrow \infty$), а затем и его наличия.

1.2. Плазменные резонансы в “неэкранированной” системе

В своей работе [35] A.L. Fetter показал, что частота плазменных колебаний в диске, окруженном однородным диэлектрическим окружением, в квазистатическом пределе ($\tilde{\omega} \ll 1$) может быть получена подходящим квантованием волнового вектора $q = \alpha_{l,n_r}/R$ в дисперсии плазменных колебаний в бесконечной системе $\omega_{pl} = \sqrt{2\pi n_s e^2 q/m}$. На языке введенных нами безразмерных параметров частота плазменных колебаний выражается как $\tilde{\omega}_{l,n_r} = \sqrt{\alpha_{l,n_r} \tilde{\Gamma}}$. Для интересующих нас осесимметричной и фундаментальной моды правило квантования указано в (13).

1.2.1. Осесимметричная плазменная мода

Начнем анализ с осесимметричной плазменной моды. Для её возбуждения было выбрано внешнее электрическое поле следующего вида:

$$\mathbf{E}^{ext}(\tilde{r}) = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Не будем задаваться вопросом о способе возникновения такого поля, лишь укажем, что оно могло бы быть сконструировано как суперпозиция полей колеблющихся мультиполей.

В качестве разложения для радиальной компоненты плотности тока выберем модифицированный ряд Тейлора в окрестности края и умножим его на \tilde{r} :

$$j_r(\tilde{r}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \tilde{r} (1 - \tilde{r}^2)^n, \quad (1.35)$$

где α_n — неизвестные коэффициенты, а N — количество базисных функций, рассматриваемых в данном случае. Такое разложение содержит только нечетные степени \tilde{r} и удовлетворяет граничному условию на краю диска.

Для получения системы линейных уравнений на коэффициенты α_n последовательно умножим уравнение (1.27) на функцию $\tilde{r} (1 - \tilde{r}^2)^k$ для $k = 1, \dots, N$, а затем проинтегрируем результат с весовой функцией \tilde{r} в пределах $\tilde{r} \in [0, 1]$. Удобство выбора разложения (1.35) связано с тем, что все интегралы берутся аналитически. После этого мы приходим к системе линейных уравнений на неизвестные коэффициенты α_n . Наконец, определив плотность тока, мы рассчитываем спектр мощности поглощения согласно уравнению (1.30) и анализируем резонансы в нем.

В качестве примера на Рис. 1.2 приведен спектр поглощения внешнего излучения при значениях столкновительного параметра и параметра запаздывания $\tilde{\gamma} = \tilde{\Gamma} = 0.01$ с использованием десяти базисных функций разложения. На графике четко видны первые пять резонансов, соответствующих радиальным числам $n_r = 1, 2, \dots, 5$. Резонансы с нечетными значениями n_r выражены сильнее, чем с четными, что связано с выбором возбуждающего поля. Поскольку данные получены при параметре запаздывания $\tilde{\Gamma} \ll 1$, то частоты резонансов $\tilde{\omega} \ll 1$ и мы имеем квазистатический предел. В таком случае, согласно работе [35] частота плазменных колебаний в диске может быть получена подходящим квантованием волнового вектора. У осесимметричной

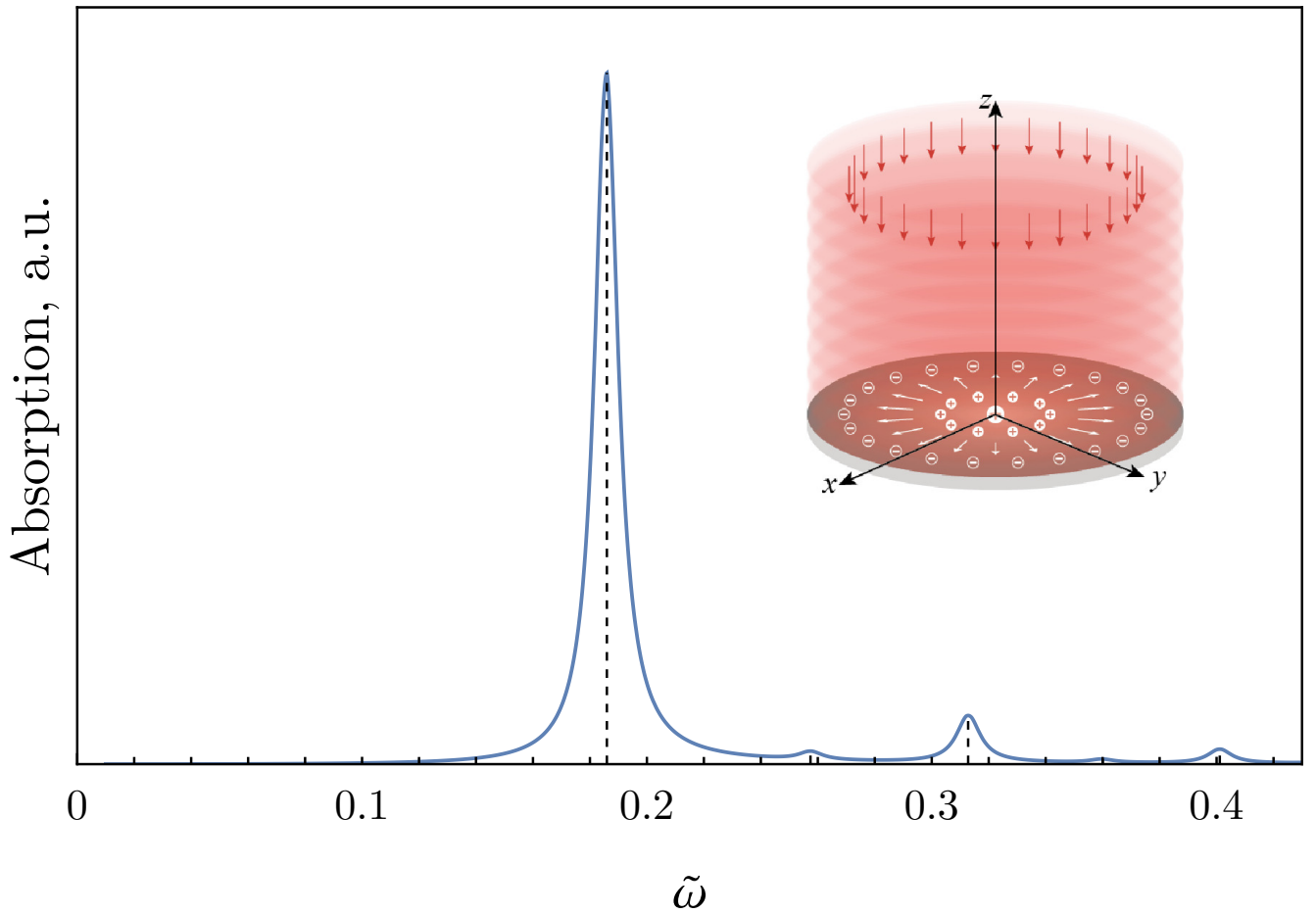


Рис. 1.2. Зависимость мощности поглощения (в условных единицах) осесимметричной плазменной модой от безразмерной частоты падающего излучения $\tilde{\omega} = \sqrt{\epsilon}\omega R/c$. Результаты численного счета приведены для безразмерных столкновительного параметра и параметра запаздывания $\tilde{\gamma} = \tilde{\Gamma} = 0.01$. Рассчитанный спектр содержит пять первых плазменных резонансов $n_r = 1, 2, \dots, 5$. Вставка схематично иллюстрирует возбуждение осесимметричной моды в диске внешним излучением.

моды это квантование происходит вдоль радиуса диска. Если под n_r понимать количество длин полуволн, укладываемых на радиусе, то волновой вектор должен быть пропорционален n_r , а частота соответственно $\sim \sqrt{n_r}$. Таким образом, между частотами осесимметричных плазменных колебаний в квазистатическом пределе должно выполняться соотношение $\tilde{\omega}_{0,n_r}/\tilde{\omega}_{0,1} \approx \sqrt{n_r}$, что и наблюдается на Рис.1.2.

В практически интересном случае, когда плазменный резонанс хорошо разрешим, т.е. $\tilde{\omega}_{0,1} \gg \tilde{\gamma}$, его положение вовсе не зависит от столкновительного параметра $\tilde{\gamma}$ и, соответственно, его частота имеет универсальную зависи-

мость от параметра запаздывания $\tilde{\Gamma}$, которая представлена сплошной кривой на Рис.1.3. Для сравнения пунктирной кривой отмечена дисперсия плазмона (7), учитывающая конечность скорости света, где проведено феноменологическое квантование волнового вектора по правилу $q = 3.5/R$. Как и обсуждалось выше, в области малого параметра запаздывания две кривые совпадают. Для больших значений $\tilde{\Gamma}$, когда дисперсия плазмона приближается к дисперсии света $\omega_{light}(q) = cq/\sqrt{\epsilon}$, резонансная частота стремится к асимптотическому значению $\tilde{\omega}_{0,1} \approx 3.5$, что также соответствует данному правилу квантования. При промежуточных значениях параметра запаздывания хотя и есть расхождение между двумя кривыми, на практике этим отклонением можно пренебречь. Таким образом, простое феноменологическое квантование является хорошей аппроксимацией частоты основного осесимметричного плазменного колебания.

Что же касается ширины плазменного резонанса, то её зависимость от параметра запаздывания, вообще говоря, существенно зависит от столкновительного параметра и приведена на Рис. 1.5. В случае $\tilde{\gamma} = 0$ ширина резонанса определяется исключительно радиационными потерями и явно увеличивается с ростом $\tilde{\Gamma}$. При конечном времени релаксации импульса носителей при малых значениях параметра запаздывания сначала наблюдается уменьшение ширины. Для наглядности сужения на Рис. 1.4 представлены спектры поглощения, смещенные на частоту резонанса, при $\tilde{\Gamma} = 0.5, 2, 4$. При больших параметрах запаздывания ширина резонанса достигает асимптотического значения 2.3, которое не зависит от параметра $\tilde{\gamma}$ и таким образом определяется исключительно радиационным вкладом. Серым цветом на Рис. 1.5 отмечена область, где частота резонанса меньше его ширины, т.е. $\tilde{\omega}_{0,1} < \Delta\tilde{\omega}_{0,1}$. В этом случае резонанс сильно асимметричен по частоте и имеет добротность менее единицы.

Если частота плазменного резонанса может быть аппроксимирована дисперсией плазменных колебаний в соответствующем бесконечном ДЭС (7), ес-

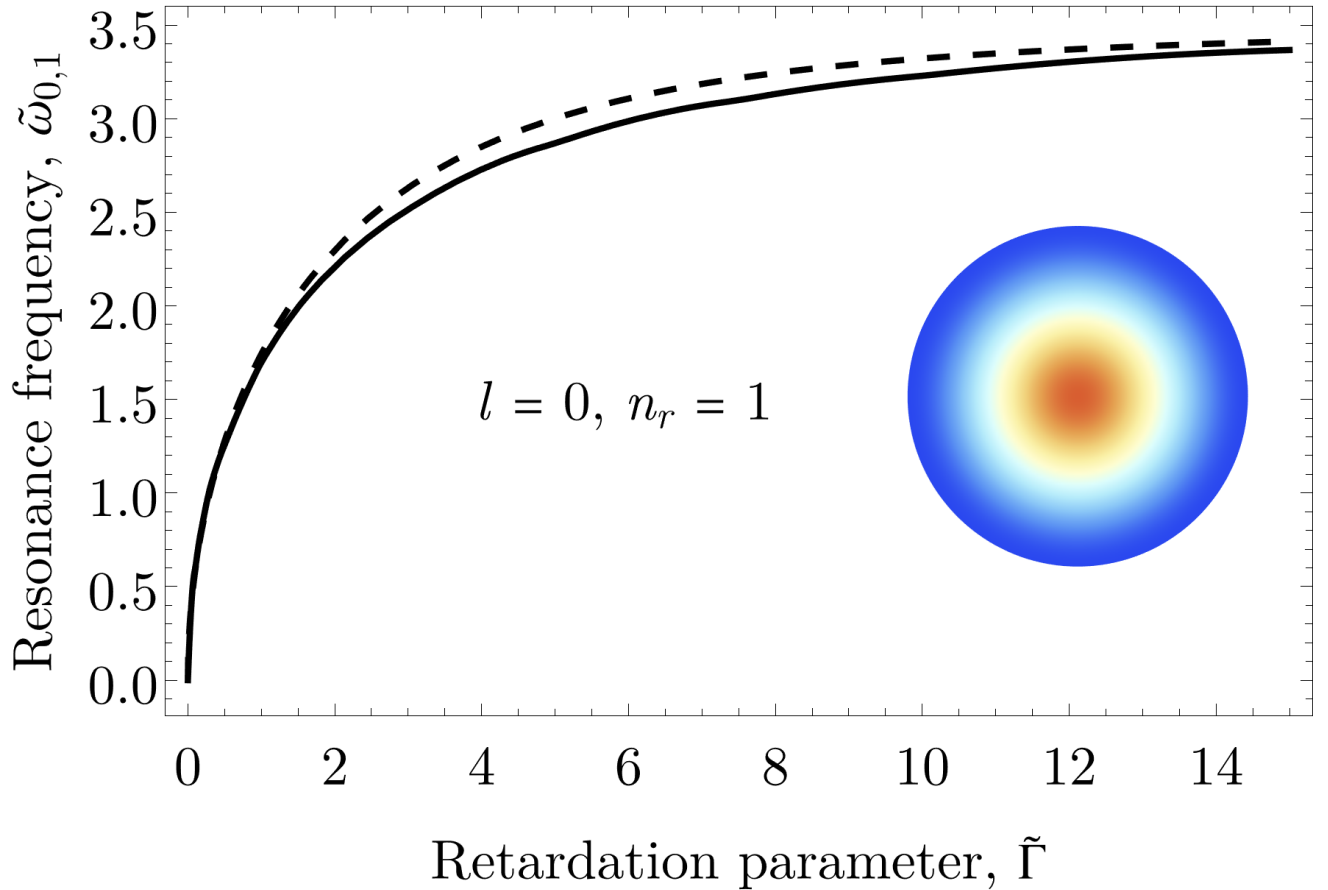


Рис. 1.3. Зависимость обезразмеренной частоты основного осесимметричного резонанса $\tilde{\omega}_{0,1} = \sqrt{\epsilon}\omega_{0,1}R/c$ от параметра запаздывания $\tilde{\Gamma}$ при $\tilde{\gamma} = 0$ (сплошная кривая). Пунктирная линия соответствует дисперсии (7) при волновом векторе $q = 3.5/R$. Вставка схематично изображает плотность заряда рассматриваемой моды.

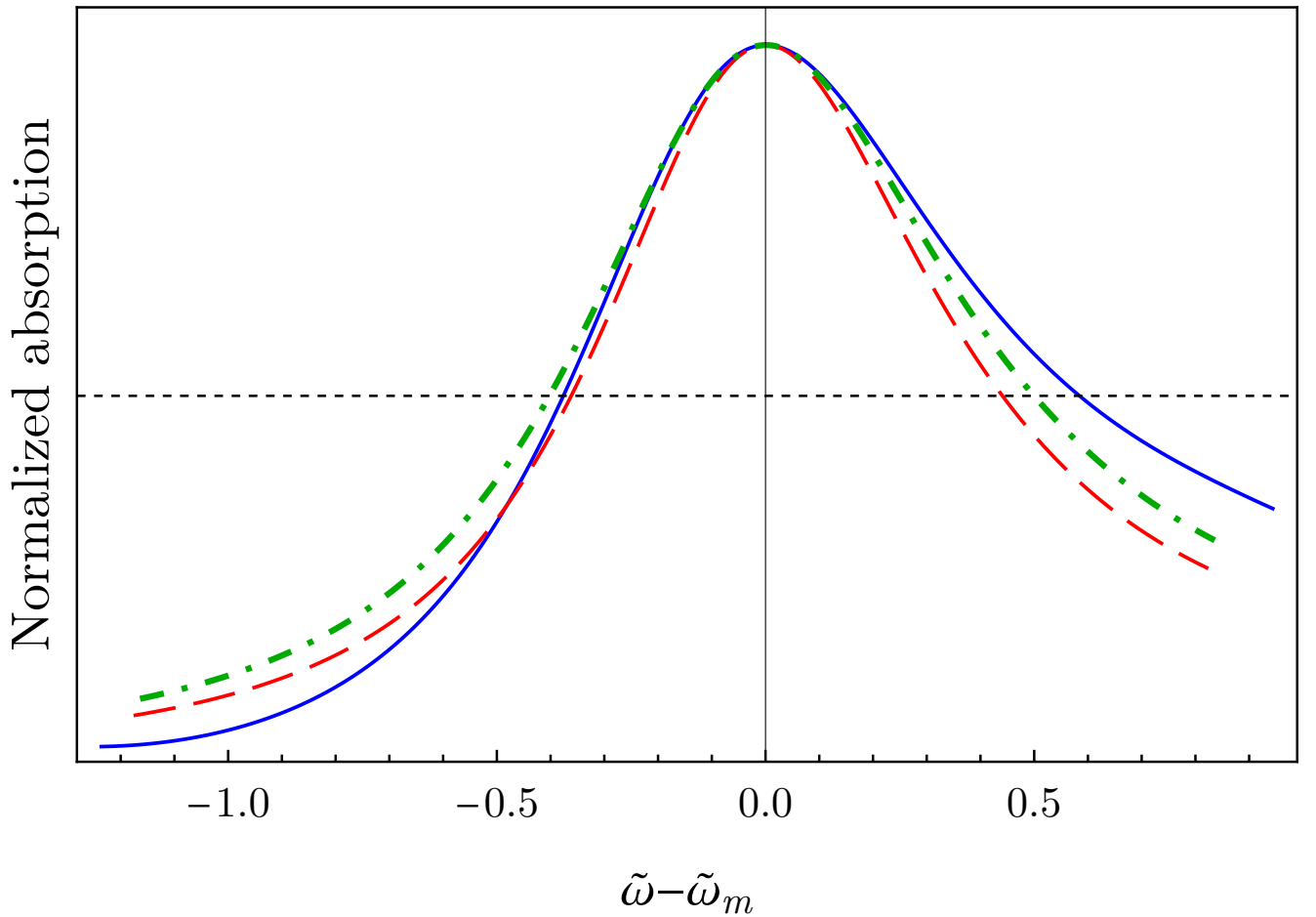


Рис. 1.4. Сравнение основных осесимметричных резонансов ($n_r = 1$) для $\tilde{\gamma} = 1$ и различных параметров запаздывания: $\tilde{\Gamma} = 0.5$ (сплошная линия), $\tilde{\Gamma} = 2$ (пунктирная линия) и $\tilde{\Gamma} = 4$ (штрих-пунктирная линия). Пики смещены на резонансную частоту $\tilde{\omega}_m$ и отнормированы так, что значения в максимуме равны.

ли положить волновой вектор равным $3.5/R$, то для ширины резонанса это, вообще говоря, не так. На вставке к рисунку (1.5) приведена зависимость ширины резонанса, полученной из мнимой части дисперсии (6) таким же квантованием волнового вектора. Начиная с некоторого параметра запаздывания существенный вклад вносят радиационные потери, которые приводят к увеличению ширины.

1.2.2. Аналитические аппроксимации

Перейдем к поиску аналитической аппроксимации положения и ширины плазменного резонанса. Для этого рассмотрим случай $N = 1$, что соответ-

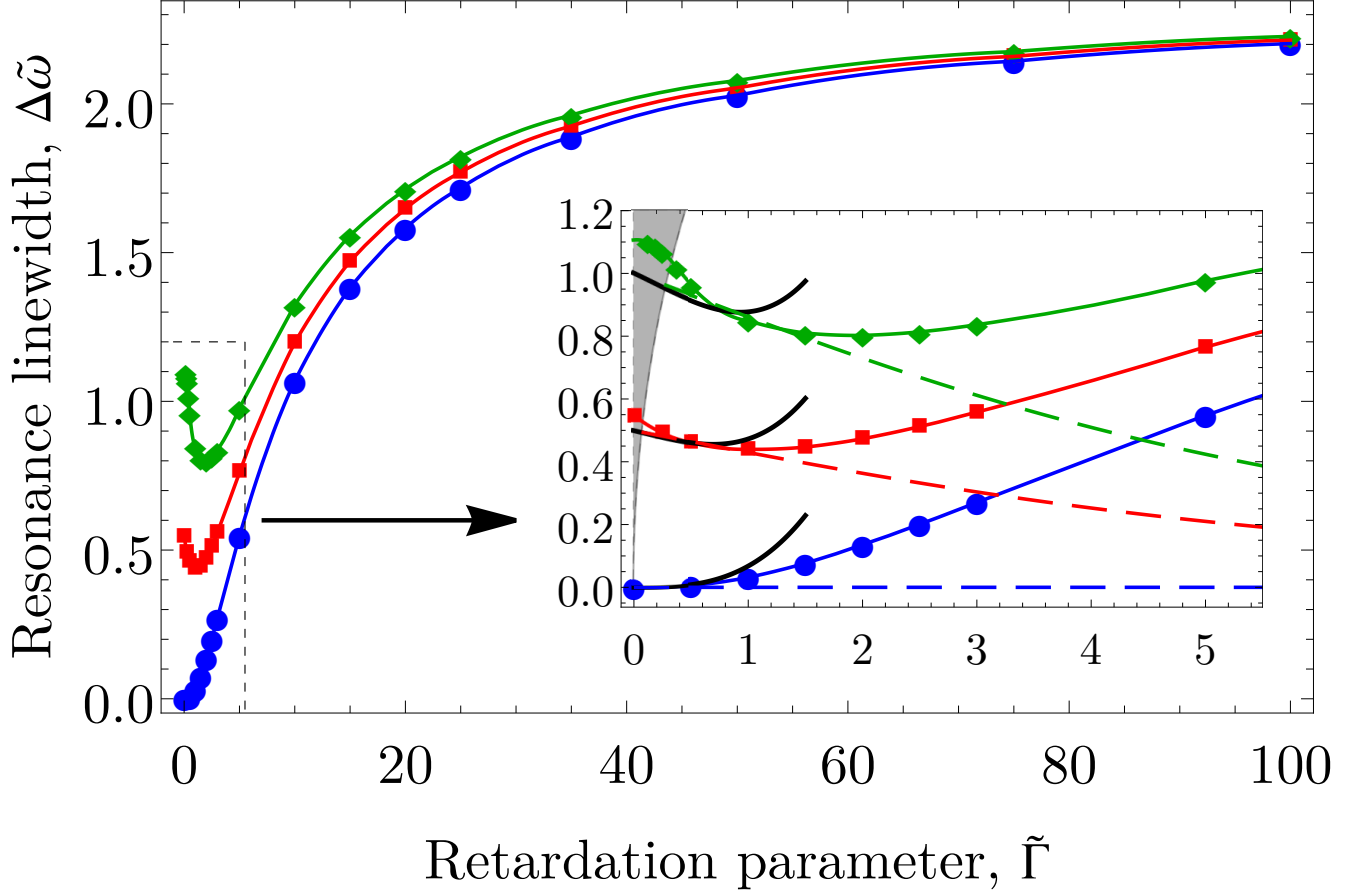


Рис. 1.5. Зависимость обезразмеренной ширины резонанса $\Delta\tilde{\omega}_{0,1} = \sqrt{\varepsilon}\Delta\omega_{0,1}R/c$ от параметра запаздывания $\tilde{\Gamma}$, рассчитанная для осесимметричного плазменного резонанса ($l = 0$, $n_r = 1$). Точками формы круга, квадрата и ромба отмечены численные результаты, соответствующие случаю $\tilde{\gamma} = 0$, $\tilde{\gamma} = 0.5$ и $\tilde{\gamma} = 1$ соответственно. Сплошные линии синего, красного и зеленого цвета являются интерполяцией этих точек. На вставке увеличена область малых параметров запаздывания. Пунктирные линии синего, красного и зеленого цвета соответствуют удвоенному модулю мнимой части частоты из дисперсии (6), где $q = 3.5/R$. Сплошные черные линии соответствуют аналитической аппроксимации (1.40). Серым цветом отмечена область сверхбыстрого затухания плазменных колебаний, т.е. $\Delta\tilde{\omega} > \tilde{\omega}_m$.

ствует плотности тока

$$j_r(\tilde{r}) = \alpha_1 \tilde{r}(1 - \tilde{r}^2). \quad (1.36)$$

Тогда коэффициент разложения дается следующим выражением:

$$\alpha_1 = \frac{i24c\tilde{\Gamma}E_0}{15\pi \left[\tilde{\omega} + i\tilde{\gamma} - \frac{24\tilde{\Gamma}}{\tilde{\omega}} f(\tilde{\omega}) \right]}. \quad (1.37)$$

Поскольку мощность поглощения пропорциональна $|\alpha_1|^2$, то резонанс определяется минимумом знаменателя $|\alpha_1|$. В пределе $\tilde{\omega} \ll 1$ мы имеем разложение

$$f(\tilde{\omega}) = \frac{16}{35\pi} - \frac{64\tilde{\omega}^2}{2835\pi} - \frac{256\tilde{\omega}^4}{155925\pi} - i\frac{\tilde{\omega}^5}{4320} + \dots \quad (1.38)$$

Оставляя первые три члена в выражении и пренебрегая столкновительным параметром, определяем положение максимума поглощения как разложение по параметру запаздывания в пределе $\tilde{\Gamma} \ll 1$:

$$\tilde{\omega}_{0,1} = 1.87\sqrt{\tilde{\Gamma}} \left(1 - 0.086\tilde{\Gamma} - 0.011\tilde{\Gamma}^2 + \dots \right). \quad (1.39)$$

В нижайшем порядке по $\tilde{\Gamma}$ (квазистатический предел) это выражение идеально совпадает с численным решением и аппроксимирует ранее полученный результат [35, 39].

Для оценки ширины плазменного резонанса воспользуемся аппроксимацией контуром Лоренца и рассмотрим случай $\tilde{\gamma} \ll \tilde{\Gamma}$. Тогда разложение выражения (1.33) при частоте резонанса $\tilde{\omega}_{0,1}$ (1.39) по параметру запаздывания имеет следующий вид:

$$\Delta\tilde{\omega}_{0,1} = \tilde{\gamma} \left(1 - 0.172\tilde{\Gamma} - 0.058\tilde{\Gamma}^2 + 0.04\tilde{\Gamma}^3 \right) + 0.068\tilde{\Gamma}^3 + \dots \quad (1.40)$$

Кроме вклада пропорционального столкновительному параметру $\tilde{\gamma}$ полученное выражение включает слагаемое $\propto \tilde{\Gamma}^3$, зависящее только от параметра запаздывания и, соответственно, описывающее радиационное уширение плазменного резонанса. Таким образом, учет конечности скорости света приводит не только к возникновению радиационного вклада, но и модифицирует

столкновительный вклад. Тем самым, уширение плазменных резонансов не складывается просто из $\tilde{\gamma}$ и радиационных потерь, как это бывает для циклотронных резонансов [96] или плазменных резонансов в массиве дисков [97]. Сплошными черными линиями на Рис. 1.5 отмечена аналитика (1.40), которая хорошо описывает зависимость в области малых параметров запаздывания в пределе $\tilde{\gamma} \ll \tilde{\Gamma}$.

1.2.3. Качественное объяснение ширины плазменного резонанса

Далее обсудим качественно результат, приведенный в (1.40), и так же объясним именно квадратичную зависимость по параметру запаздывания у радиационного вклада. Предположим, что каким либо образом возбуждена осесимметричная мода и затем она предоставлена сама себе. В таком случае плазменная мода как неидеальная колеблющаяся система на частоте $\omega_{0,1}$ (1.39), будет терять энергию на временах порядка $1/\Delta\omega_{0,1}$. В случае высокочастотных колебаний темп затухания может быть оценен как отношение средней мощности потерь в системе к запасенной в ней полной энергии:

$$\Delta\omega_{0,1} = \frac{P_J + P_{rad}}{W_{kin} + W_{em}}, \quad (1.41)$$

где P_J и P_{rad} – средняя мощность джоулевых и радиационных потерь соответственно, а W_{kin} и W_{em} – кинетическая и электромагнитная энергия плазменной моды [98]. Выбрав для тока разложение (1.35) как и раньше ограничимся одной базисной функцией. Далее выразим все величины, входящие в (1.41), через коэффициент разложения α_1 и оценим темп затухания.

Средняя мощность джоулевых потерь может быть посчитана по формуле (1.30):

$$P_J = \tilde{\gamma} \frac{\pi^2 R^2}{12\sqrt{\epsilon c \tilde{\Gamma}}} |\alpha_1|^2. \quad (1.42)$$

Поскольку мода осесимметричная, то её дипольный электрический и магнитный моменты равны нулю, и основные радиационные потери связаны с

квадрупольным излучением, мощность которых есть [99]:

$$P_{rad}(t) = \frac{\sqrt{\varepsilon^3}}{180c^5} \text{Tr} \left[\text{Re} \left(i\omega^3 Q e^{-i\omega t} \right)^2 \right], \quad (1.43)$$

где Q – электрический квадрупольный момент (тензор 2-го ранга), Tr – след матрицы. Средняя за период мощность квадрупольного излучения тогда может быть найдена как

$$P_{rad} = \frac{\sqrt{\varepsilon^3}}{180c^5} \cdot \frac{1}{2} \omega_{0,1}^6 \text{Tr} [QQ^*], \quad (1.44)$$

где * указывает на комплексное сопряжение. Из уравнения непрерывности определяем плотность тока осесимметричной моды

$$\rho(\tilde{r}) = -\frac{2i}{\omega_{0,1}R} (1 - 2\tilde{r}^2) \alpha_1 \quad (1.45)$$

Квадрупольный момент согласно определению есть

$$Q = R^4 \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} 3\tilde{r}^2 \cos^2 \theta - \tilde{r}^2 - \tilde{z}^2 & 3\tilde{r}^2 \cos \theta \sin \theta & 3\tilde{r}\tilde{z} \cos \theta \\ 3\tilde{r}^2 \sin \theta \cos \theta & 3\tilde{r}^2 \sin^2 \theta - \tilde{r}^2 - \tilde{z}^2 & 3\tilde{r}\tilde{z} \sin \theta \\ 3\tilde{r}\tilde{z} \cos \theta & 3\tilde{r}\tilde{z} \sin \theta & 2\tilde{z}^2 - \tilde{r}^2 \end{pmatrix} \cdot \rho(\tilde{r})\delta(\tilde{z})\tilde{r}d\tilde{r}d\tilde{z}d\theta, \quad (1.46)$$

где интеграл по всему пространству записан в цилиндрических координатах, и соответственно равен

$$Q = i \frac{\pi R^3 \alpha_1}{6\omega_{0,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Таким образом, средняя мощность радиационных потерь осесимметричной моды, приходящихся на квадрупольное излучение, в безразмерных параметрах есть

$$P_{rad} = 0.00556 \frac{\pi^2 R^2 \tilde{\omega}_{0,1}^4}{12\sqrt{\varepsilon}c} |\alpha_1|^2. \quad (1.48)$$

Так как мы рассматриваем случай высокочастотных колебаний, то потерями в системе на масштабе периода можно пренебречь и считать, что полная энергия почти сохраняется. В частности она может быть оценена как сумма средних за период значений кинетической и электромагнитной энергии. Кинетическая энергия моды будет равна

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \int_0^1 n_s \frac{m}{2} \left| \frac{j_r(\tilde{r})}{en_s} \right|^2 2\pi R^2 \tilde{r} d\tilde{r} = \frac{\pi^2 R^3}{24\tilde{\Gamma}c^2} |\alpha_1|^2. \quad (1.49)$$

Электромагнитная энергия есть

$$W_{em} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon |\mathbf{E}(r, z)|^2 + |\mathbf{H}(r, z)|^2}{4\pi} 2\pi r dr dz. \quad (1.50)$$

Здесь $\mathbf{E}(r, z)$ и $\mathbf{H}(r, z)$ – электромагнитные поля осесимметричной моды, определенные во всем пространстве. Явный вид полей и расчет электромагнитной энергии приведены в Приложении А. В конечном итоге, электромагнитная энергия в разложении по малости параметра запаздывания имеет вид:

$$W_{em} = \frac{\pi^2 R^3}{12\tilde{\Gamma}c^2} \left[\left(\frac{1}{2} + 0.172\tilde{\Gamma} + 0.0876\tilde{\Gamma}^2 - 0.0578\tilde{\Gamma}^3 + \dots \right) |\alpha_1|^2 \right]. \quad (1.51)$$

Используя (1.41) и полученные выражения для мощности потерь и запасенной энергии, получаем выражение для темпа затухания в нижайших порядках по параметру запаздывания:

$$\Delta\tilde{\omega} = \tilde{\gamma} \left(1 - 0.172\tilde{\Gamma} - 0.058\tilde{\Gamma}^2 + 0.082\tilde{\Gamma}^3 \right) + 0.068\tilde{\Gamma}^3 + \dots \quad (1.52)$$

Это выражение почти совпадает с полученным из анализа поглощения (1.40). Расхождение в коэффициенте перед членом $\tilde{\gamma}\tilde{\Gamma}^3$, вероятно, связано с тем, что частота плазменной моды $\tilde{\omega}_{0,1}$ рассматривалась в чистом пределе $\tilde{\gamma}$, и может быть устранено, если учесть первый порядок по столкновительному параметру в выражении (1.39).

1.2.4. Фундаментальная плазменная мода

Перейдем к анализу свойств фундаментального резонанса, соответствующего возбуждению плазменной моды с числами $l = 1$ и $n_r = 1$.

В качестве внешнего излучения рассмотрим циркулярно поляризованную монохроматическую электромагнитную плоскую волну, падающую нормально на электронную систему, с электрическим полем в плоскости диска $\mathbf{E}^{ext} = E_0(1, i)^T e^{i\theta}$. В случае $l = 1$ уравнение (1.25) не может быть сведено к уравнению на одну из компонент плотности тока, поэтому необходимо составить набор из вектор-функций. В качестве стартовой точки были выбраны функции, хорошо описывающие квазистатический предел, т.е. так, что $\mathbf{j} \propto \nabla\varphi$. В этом случае радиальная j_r компонента, выбранная в виде полиномов и удовлетворяющая граничному условию, и азимутальная j_θ компонента являются связанными по правилу $j_\theta = il \int j_r(r') dr' / r$. Вводя скалярное произведение как $\langle \mathbf{f}(r) | \mathbf{g}(r) \rangle = \int_0^R \mathbf{f}^*(r) \cdot \mathbf{g}(r) 2\pi r dr$, можно воспользоваться методом Грама-Шмидта и прийти к ортонормированному набору базисных функций \mathbf{j}_n , приведенных в Приложении Б.

Для решения задачи повторим действия, описанные для осесимметричной моды. Подставим разложение плотности тока $\mathbf{j}(r) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbf{f}_n(r)$ в (1.25), где α_n – коэффициенты разложения, а N – количество базисных функций, и последовательно умножим его скалярно на каждую из базисных функций [100, 101]. Решая полученную систему уравнений для коэффициентов α_n , находим плотность тока.

Зависимость положения и ширины резонанса от параметра запаздывания $\tilde{\Gamma}$ показана на Рис. 1.6 и 1.7 соответственно, где расчеты были выполнены для случая $N = 5$. Полученные кривые качественно имеют такую же зависимость, как и в случае осесимметричной моды. На Рис. 1.6 пунктиром также отмечена дисперсия (7), где проведено квантование $q = 1.2/R$. Видно, что и в этом случае квантование вектора является хорошей аппроксимацией.

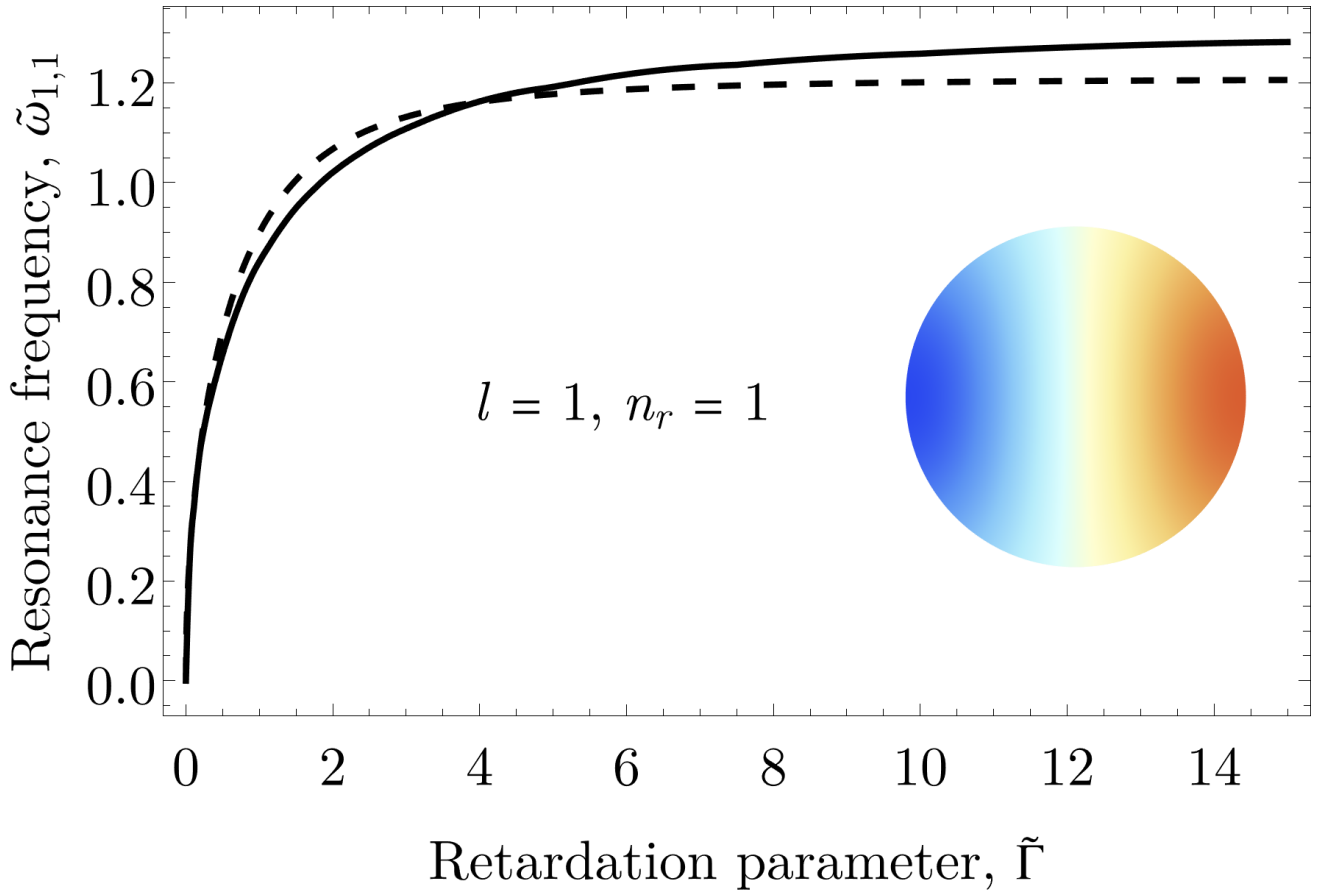


Рис. 1.6. Зависимость обезразмеренной частоты фундаментального резонанса $\tilde{\omega}_{1,1} = \sqrt{\epsilon}\omega_{1,1}R/c$ от параметра запаздывания $\tilde{\Gamma}$ при $\tilde{\gamma} = 0$ (сплошная кривая). Пунктирная линия соответствует дисперсии (7) при волновом векторе $q = 1.2/R$. Вставка схематично изображает плотность заряда рассматриваемой моды.

Отметим, что для численного счета были выбраны функции хорошо описывающие лишь квазистатический предел $\tilde{\Gamma} \ll 1$, поэтому, возможно, полученные асимптотические значения для положения $\tilde{\omega}_{1,1} \approx 1.24$ и ширины $\Delta\tilde{\omega}_{1,1} \approx 1.05$ в пределе $\tilde{\Gamma} \rightarrow \infty$, когда существенно запаздывание, несколько отклонены от истинных.

Для получения аналитических выражений рассмотрим случай $N = 1$. Анализируя полученный коэффициент α_1 , мы приходим к приближенной аналитике для резонансной частоты

$$\tilde{\omega}_{1,1} = 1.07\sqrt{\tilde{\Gamma}} \left(1 - 0.293\tilde{\Gamma} + \dots\right), \quad (1.53)$$

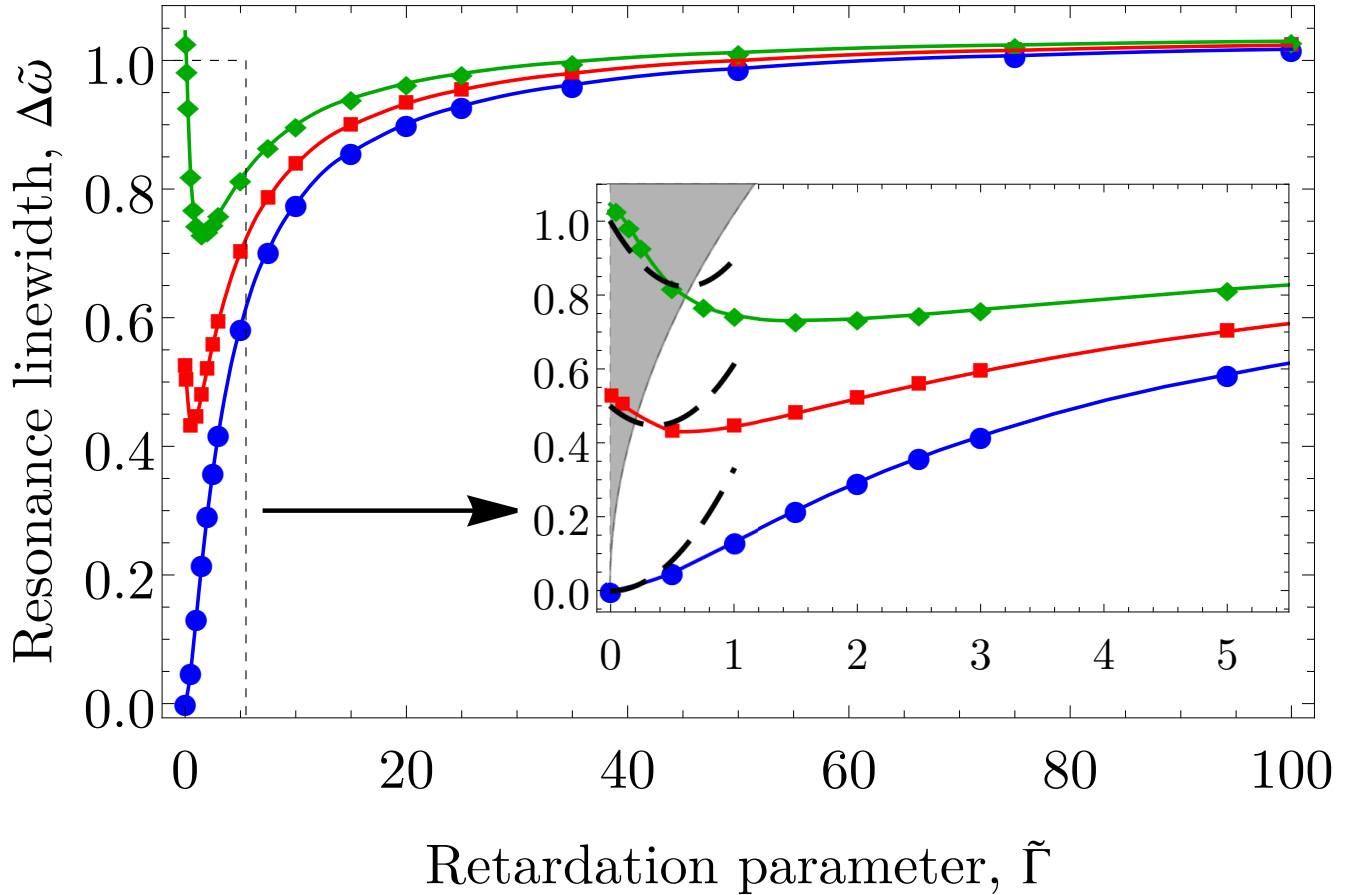


Рис. 1.7. Зависимость обезразмеренной ширины резонанса $\Delta\tilde{\omega} = \sqrt{\varepsilon}\Delta\omega R/c$ от параметра запаздывания $\tilde{\Gamma}$, рассчитанная для фундаментального плазменного резонанса ($l = 1, n_r = 1$). Точками формы круга, квадрата и ромба отмечены численные результаты, соответствующие случаю $\tilde{\gamma} = 0, \tilde{\gamma} = 0.5$ и $\tilde{\gamma} = 1$ соответственно. Сплошные линии синего, красного и зеленого цвета являются интерполяцией этих точек. На вставке увеличена область малых параметров запаздывания. Сплошные линии соответствуют аналитической аппроксимации (1.54). Серым цветом отмечена область сверхбыстрого затухания плазменных колебаний, т.е. $\Delta\tilde{\omega} > \tilde{\omega}_m$.

и ширины резонансной линии

$$\Delta\tilde{\omega}_{1,1} = \tilde{\gamma} \left(1 - 0.586\tilde{\Gamma} + 0.150\tilde{\Gamma}^2 \right) + 0.333\tilde{\Gamma}^2 + \dots \quad (1.54)$$

В квазистатическом пределе частота снова хорошо согласуется с полученной ранее [35, 39]. Качественное различие между шириной линии мод с $l = 0$ и $l = 1$ заключается в том, что последняя обладает ненулевым электрическим дипольным моментом и, как следствие, в выражении (1.54) радиационное уширение главным образом определяется дипольным излучением $\propto \tilde{\Gamma}^2$.

Таким образом, как и в случае осесимметричной моды, ширина линии (1.54) не является просто суммой столкновительных и радиационных уширений и в целом не может быть получена путем феноменологического “квантования” волнового вектора плазмона в дисперсионном уравнении для плазменной волны в бесконечных двумерных электронных системах [28, 41].

1.3. Плазменные резонансы в экранированной системе

1.3.1. Осесимметричная плазменная мода

Как и в предыдущем разделе начнем рассмотрение свойств плазменных колебаний с осесимметричной моды с числами $l = 1$ и $n_r = 1$. Приведенные ниже результаты получены в работе [58].

В качестве возбуждающего осесимметричный резонанс излучения рассмотрим электромагнитное поле от точечного диполя, помещенного на расстоянии h над центром диска, причем его дипольный момент направлен вдоль оси z [102]. Таким образом, он создает только радиальную компоненту электрического поля в плоскости диска, которая задается выражением

$$E_r^{dip}(\tilde{r}, \tilde{h}) = \frac{d_0}{R^3} \left(-\frac{3\tilde{h}\tilde{r}}{\tilde{\rho}^5} + \frac{3i\tilde{h}\tilde{r}\tilde{\omega}}{\tilde{\rho}^4} + \frac{\tilde{h}\tilde{r}\tilde{\omega}^2}{\tilde{\rho}^3} \right) e^{i\tilde{\omega}\tilde{\rho}},$$

где $\tilde{h} = h/R$, $\tilde{\rho} = \sqrt{\tilde{r}^2 + \tilde{h}^2}$, и d_0 – величина дипольного момента. Как и раньше знак тильды обозначает безразмерные параметры (например, $\tilde{r} = r/R$).

Из-за наличия металла кроме поля диполя возникает и его отражение, поэтому суммарное внешнее электрическое поле есть

$$E_r^{ext}(\tilde{r}) = E_r^{dip}(\tilde{r}, \tilde{h}) + E_r^{dip}(\tilde{r}, -2\tilde{d} - \tilde{h}). \quad (1.55)$$

Чтобы найти отклик системы на внешнее возбуждение, мы раскладываем плотность тока как и прежде по набору функций (1.36). Подставляем это разложение в уравнение (1.27), последовательно умножаем полученное выражение на каждую из базисных функций и интегрируем его по радиусу \tilde{r} с использованием весовой функции \tilde{r} в диапазоне $(0; 1)$. Решая систему уравнений на коэффициенты разложения α_n , находим плотность тока, а затем, согласно уравнению (1.30), мощность поглощения. Делим ее на среднюю мощность излучения диполя P_{dip} , падающего на диск, и находим коэффициент поглощения $A = P_{abs}/P_{dip}$. Поскольку положение и ширина плазменного резонанса являются внутренними характеристиками электронной системы, они не зависят от расстояния до диполя и мы можем разместить диск в дальней зоне диполя для упрощения. В таком случае, средняя мощность излучения, падающая на диск, равна [99]

$$P_{dip} = \frac{1}{16} \frac{\varepsilon^2 \omega^4 d_0^2}{c^3} \left(\frac{R}{h} \right)^4 = \frac{1}{16} \tilde{\omega}^2 \frac{cd_0^2}{h^4}, \quad h \gg R. \quad (1.56)$$

Численная схема с подробностями доступна в открытом доступе ¹.

В качестве примера на Рис. 1.8 показаны спектры поглощения, рассчитанные для различных столкновительных параметров с использованием первых пяти базисных функций ($N = 5$) при $\tilde{\Gamma} = 1$ и $d = R$. Показано два первых резонанса с $n_r = 1, 2$. Коэффициент поглощения в резонансе больше единицы, поскольку диск собирает падающее излучение из пространственной области, выходящей за пределы его геометрической площади. Так в работах [103, 104] показано, что для дипольных мод эффективная площадь (сечение поглощения) произвольного малого резонатора может достигать значе-

¹ Код Wolfram Mathematica доступен по ссылке <https://github.com/danilrodionov/gated-disk.git>

ния порядка λ^2 , где λ — длина волны падающего излучения, которая может превышать радиус диска. При этом поглощение достигает максимума, когда радиационные потери сравниваются со столкновительными. Это происходит при различных значениях параметров системы для резонансов с различными радиальными числами.

Ниже в этом разделе мы сосредоточимся только на основном резонансе с $n_r = 1$. Из зависимости коэффициента поглощения от частоты мы находим резонансную частоту $\tilde{\omega}_{0,1}$, взятую в максимуме первого пика поглощения, и полную ширину $\Delta\tilde{\omega}_{0,1}$, вычисленную на половине от пикового значения. На Рис. 1.9 показано, как характеристики резонанса зависят от расстояния между диском и затвором. Частота монотонно возрастает и переходит от режима сильного экранирования ($d \ll R$) к случаю неэкранированной ДЭС ($d \gg R$), где она уже не зависит от d . Ширина резонанса сначала незначительно уменьшается при малых значениях d , а затем начинает увеличиваться, так как доминирующим вкладом в уширение линии резонанса становится излучение. Для заданных параметров на Рис. 1.9 переход происходит при $d \sim R$. При больших значениях d ширина линии имеет осциллирующее поведение из-за конструктивной или деструктивной интерференции между полями от ДЭС и их отражения от металла. Отметим, что для $d > R$ частота резонанса практически постоянна, тогда как колебания его ширины остаются заметными даже тогда, когда расстояние в несколько раз превышает радиус диска. Наконец, при $d \rightarrow \infty$ ширина резонанса достигает асимптотического значения, соответствующего неэкранированному диску.

1.3.2. Аналитические аппроксимации

Чтобы подкрепить вышеописанные результаты, найдем также аналитические приближения, полученные с использованием только одной первой базисной функцией (1.36). В таком случае, коэффициент α_1 дается следующим

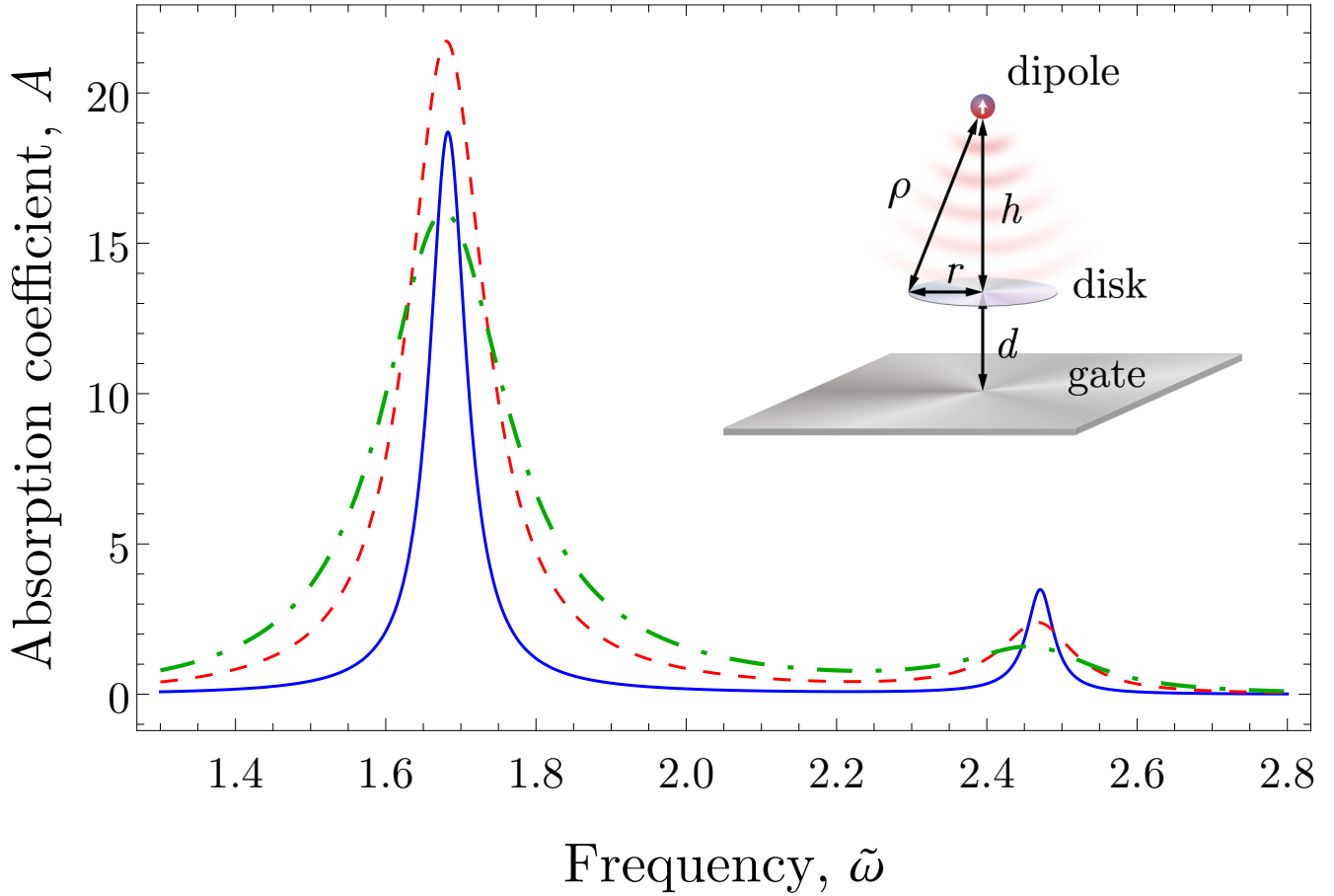


Рис. 1.8. Зависимость коэффициента поглощения A от безразмерной частоты $\tilde{\omega} = \sqrt{\epsilon}\omega R/c$. Расстояние между диском и затвором d равно радиусу диска. Излучающий диполь удален на расстояние $h = 100R$, т.е. диск расположен в дальнеполевой зоне излучения. Дипольный момент направлен перпендикулярно плоскости ДЭС и затвора. Поле такого диполя возбуждает осесимметричные резонансы. На рисунке изображены резонансы с радиальными числами $n_r = 1, 2$. Параметр запаздывания $\tilde{\Gamma} = 1$. Три кривые соответствуют различным значениям столкновительного параметра: $\tilde{\gamma} = 0.02$ (синяя сплошная), $\tilde{\gamma} = 0.1$ (красная пунктирная) и $\tilde{\gamma} = 0.2$ (зеленая штрих-пунктирная).

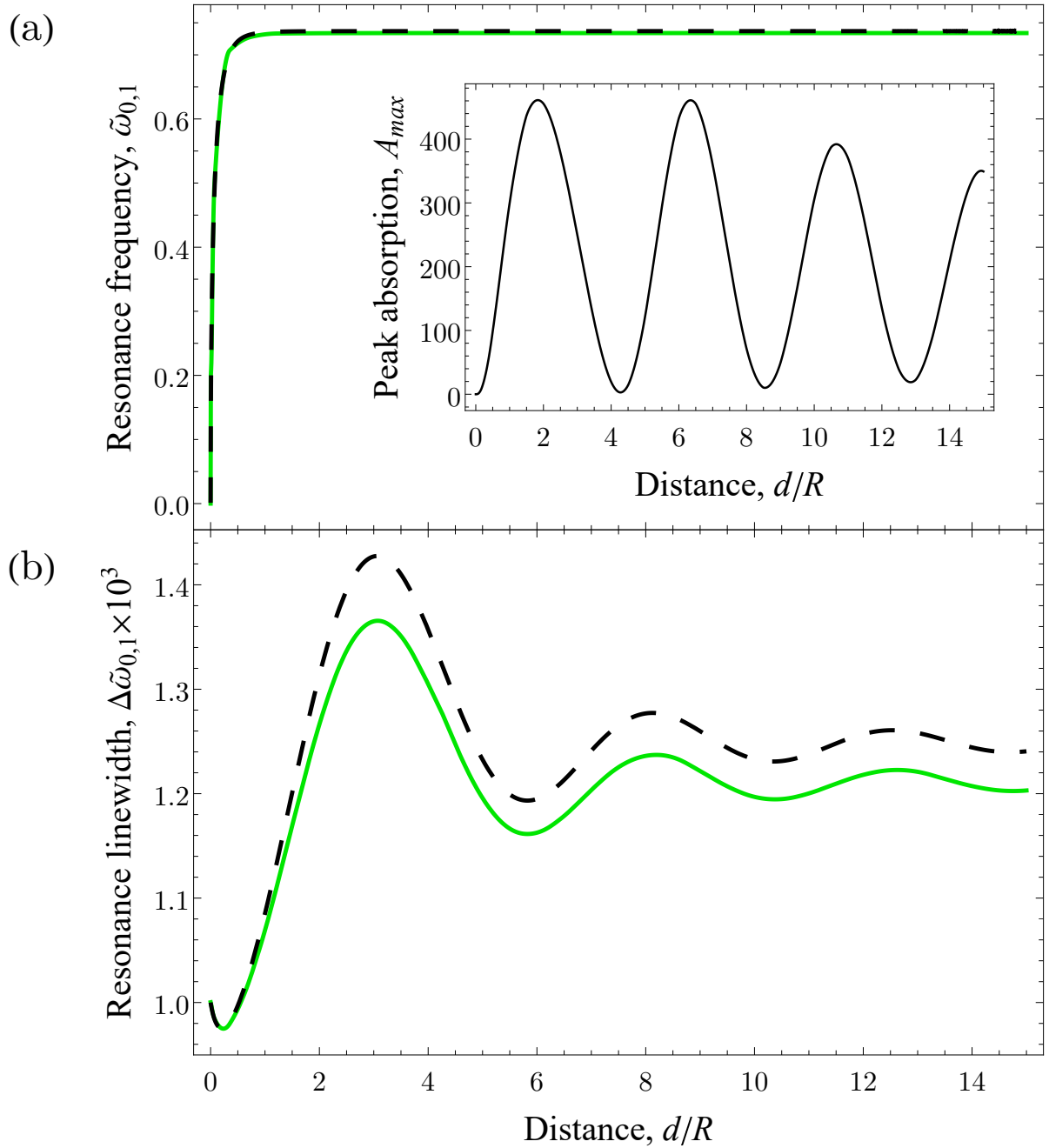


Рис. 1.9. Зависимость обезразмеренных частоты осесимметричного резонанса $\tilde{\omega}_{0,1}$ (a) и его ширины $\Delta\tilde{\omega}_{0,1}$ (b) от расстояния d между диском радиуса R и металлом. Результат приведен для параметра запаздывания $\tilde{\Gamma} = 0.16$ (вблизи квазистатического предела) и столкновительного параметра $\tilde{\gamma} = 0.001$. Сплошная и штрих-пунктирная линии отображают соответственно численный счет и аналитическую аппроксимацию, полученную с использованием одной базисной функции (1.59). Вставка представляет зависимость коэффициента поглощения на резонансной частоте от расстояния d при $\varepsilon = 1$.

выражением

$$\alpha_1 = \frac{12\tilde{\Gamma}c \int_0^1 \tilde{r}d\tilde{r}E_r^{ext}(\tilde{r})\tilde{r}(1-\tilde{r}^2)}{\pi \left[\tilde{\omega} + i\tilde{\gamma} - \frac{24\tilde{\Gamma}}{\tilde{\omega}} f(\tilde{\omega}, \tilde{d}) \right]}, \quad (1.57)$$

Здесь функция $f(\tilde{\omega})$ определяется как

$$f(\tilde{\omega}) = \int_0^\infty \sqrt{p^2 - \tilde{\omega}^2} \left(1 - e^{-2\sqrt{p^2 - \tilde{\omega}^2}\tilde{d}} \right) F^2(p) p dp,$$

где $F(p)$ – образ Ганкеля от плотности тока

$$F(p) = \int_0^1 J_1(p\tilde{r})\tilde{r} (1 - \tilde{r}^2) \tilde{r} d\tilde{r} = \frac{2J_3(p)}{p^2}.$$

Раскладывая функцию $f(\tilde{\omega})$ в ряд по параметру $\tilde{\omega}$, сохраняя члены с производением $\tilde{\omega}\tilde{d}$, получаем

$$f(\tilde{\omega}, \tilde{d}) \approx \frac{16a_0(\tilde{d})}{35\pi} - \frac{64a_2(\tilde{d})}{2835\pi}\tilde{\omega}^2 - \frac{256a_4(\tilde{d})}{155925\pi}\tilde{\omega}^4 - i\frac{a_5(\tilde{\omega}\tilde{d})}{4320}\tilde{\omega}^5, \quad (1.58)$$

где коэффициенты a_j ($j = 0, 2, 4, 5$) приведены в Приложении В и стремятся к единице в отсутствие металла ($\tilde{d} \rightarrow \infty$). Коэффициенты a_0 , a_2 и a_4 монотонно возрастают с ростом \tilde{d} , а коэффициент a_5 является осциллирующей функцией параметра $\tilde{\omega}\tilde{d}$.

Мощность поглощения пропорциональна квадрату плотности тока, то есть $|\alpha_1|^2$. Числитель коэффициента определяется внешним полем, поэтому он слабо и плавно зависит от частоты, тогда как знаменатель существенно, определяя резонанс. Оставляя во внимании только знаменатель, получаем аналитические выражения для положения резонанса

$$\tilde{\omega}_{0,1} = 1.87\sqrt{a_0(\tilde{d})\tilde{\Gamma}} \left(1 - 0.086a_2(\tilde{d})\tilde{\Gamma} - 0.011 \left[2.04a_0(\tilde{d})a_4(\tilde{d}) - 1.04a_2^2(\tilde{d}) \right] \tilde{\Gamma}^2 \right) + \dots, \quad (1.59)$$

и ширины линии

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\omega}_{0,1} = \tilde{\gamma} \left[1 - 0.172a_2(\tilde{d})\tilde{\Gamma} - 0.058 \left(1.51a_0(\tilde{d})a_4(\tilde{d}) - 0.51a_2^2(\tilde{d}) \right) \Gamma^2 + \right. \\ \left. 0.032a_2(\tilde{d}) \left(1.11a_0(\tilde{d})a_4(\tilde{d}) - 0.11a_2^2(\tilde{d}) \right) \tilde{\Gamma}^3 \right] + \\ + 0.068a_0^2(\tilde{d})\text{Re} \left(a_5(\tilde{\omega}_{0,1}\tilde{d}) \right) \tilde{\Gamma}^3 + \dots \quad (1.60) \end{aligned}$$

в пределе $\tilde{\gamma} \ll \tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\Gamma} \ll 1$. Полученные зависимости представлены на Рис. 1.9 как пунктирные линии и находятся в хорошем соответствии с численным счетом, основанном на пяти базисных функциях ($N = 5$).

1.3.3. Анализ предельных случаев

Перейдем к рассмотрению некоторых предельных случаев. В случае сильно удаленного металла $d \gg R$ резонансная частота и ширина линии могут быть аппроксимированы как

$$\tilde{\omega}_{0,1} = 1.87\sqrt{\tilde{\Gamma}} \left(1 - 0.086\tilde{\Gamma} - 0.011\tilde{\Gamma}^2 \right) + \dots, \quad (1.61)$$

$$\Delta\tilde{\omega}_{0,1} = \Delta\tilde{\omega}_{0,1}^\infty + 1.02 \frac{\sin 2\tilde{\omega}_{0,1}\tilde{d}}{\left(2\tilde{\omega}_{0,1}\tilde{d} \right)^2} \tilde{\Gamma}^3 + \dots \quad (1.62)$$

Здесь $\Delta\tilde{\omega}_{0,1}^\infty$ – это ширина резонанса в отсутствие металла (1.40), которая не зависит от d . Выражение для частоты резонанса (1.62) полностью совпадает с полученным ранее (1.39) и не содержит в рассматриваемом порядке по $\tilde{\Gamma}$ осциллирующего члена в отличие от выражения для ширины. Второй член в уравнении (1.62) определяется квадрупольным излучением, амплитуда которого теперь зависит от интерференции электромагнитных полей, создаваемых ДЭС и его изображением под металлом. Для больших значений d это слагаемое имеет форму затухающих колебаний с периодом, определенным параметром $\omega_{0,1}d/c$, который почти постоянен при $d > R$ (см. Рис. 1.9). В “чистом” пределе, когда $\tilde{\gamma} = 0$, величина первого максимума примерно в 1.7 раза больше, чем асимптотическое значение $\Delta\tilde{\omega}_{0,1}^\infty$.

В пределе близко расположенного металла $d \ll R$ выражения для частоты и ширины резонанса приобретают следующий вид:

$$\tilde{\omega}_{0,1} \approx 4\sqrt{2\tilde{\Gamma}\tilde{d}} \left(1 - \tilde{d}\tilde{\Gamma} + \frac{3}{2}\tilde{\Gamma}^2\tilde{d}^2 + \dots \right), \quad (1.63)$$

$$\Delta\tilde{\omega}_{0,1} \approx \tilde{\gamma} \left(1 - 2\tilde{\Gamma}\tilde{d} + 4\tilde{\Gamma}^2\tilde{d}^2 + \dots \right) + 156\tilde{d}^5\tilde{\Gamma}^4 + \dots \quad (1.64)$$

Как и прежде слагаемое, независящее от $\tilde{\gamma}$ в (1.64) соответствует радиационным потерям в системе. Фактически этот член представляет собой излучение октуполя системы ($\propto \tilde{\Gamma}^4$), т.к. из-за наличия близко расположенного металла квадрупольное излучение ($\propto \tilde{\Gamma}^3$) подавляется.

1.3.4. Фундаментальная плазменная мода

Ниже перейдем к анализу фундаментального резонанса с числами $n_r = 1$ и $l = 1$. В качестве возбуждающего поля выберем циркулярно поляризованную плоскую волну и учтем её отражение от металла:

$$\mathbf{E}^{ext}(\tilde{r}) = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \sin(\tilde{\omega}\tilde{d}) \quad (1.65)$$

При анализе фундаментального резонанса в предыдущем разделе был использован базис из функций, приведенных в Приложении Б. Однако они описывают хорошо лишь квазистатический предел. В этом разделе рассматривается разложение для плотности тока, преобразованного с помощью S (1.9). Как и прежде в разложении используются полиномы, так как они могут быть аналитически проинтегрированы с функциями Бесселя в ядре интеграла. Таким образом, мы выбираем следующий ряд для плотности тока:

$$\mathbf{j}_S(\tilde{r}) = \alpha_1 \begin{pmatrix} \tilde{r}^2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} \alpha_{2n}\tilde{r}^{2n} \\ \alpha_{2n+1} \end{pmatrix} (1 - \tilde{r}^2)^n, \quad (1.66)$$

где α_n – коэффициенты разложения, которые необходимо вычислить. Отметим, что выбранное разложение учитывает лишь граничное условие на краю

диска и в отличие от набора функций из Приложения Б может быть использован для получения результатов за пределами квазистатического предела. Затем последовательно умножаем уравнение для плотности тока, преобразованное с помощью S , на каждую базисную функцию из набора (1.66) и интегрируем его по r с весовой функцией r . После этого решаем линейную систему и получаем плотность тока, необходимую для расчета резонансной частоты и ширины линии.

Как и прежде для получения аналитических аппроксимаций рассмотрим случай одной базисной функции в разложении $N = 0$. Тогда первый коэффициент разложения есть

$$\alpha_1 = \frac{-3\tilde{\Gamma}cE_0 \sin \tilde{\omega}\tilde{d}}{8\pi \left[\tilde{\omega} + i\tilde{\gamma} - \frac{3\tilde{\Gamma}}{4\tilde{\omega}}f(\tilde{\omega}, \tilde{d}) \right]}. \quad (1.67)$$

Функция $f(\tilde{\omega}, \tilde{d})$ задается формулой

$$f(\tilde{\omega}, \tilde{d}) = \int_0^{\infty} \frac{p}{\sqrt{p^2 - \tilde{\omega}^2}} \left(1 - e^{-2\sqrt{p^2 - \tilde{\omega}^2}\tilde{d}} \right) \left[p^2 (F_1(p) + F_2(p))^2 - 2\tilde{\omega}^2 (F_1^2(p) + F_2^2(p)) \right] dp, \quad (1.68)$$

где

$$F_1(p) = \int_0^1 J_2(p\tilde{r})\tilde{r}^2 d\tilde{r} = \frac{J_3(p)}{p}, \quad F_2(p) = \int_0^1 J_0(p\tilde{r})\tilde{r} d\tilde{r} = \frac{J_1(p)}{p} \quad (1.69)$$

являются преобразованием Ганкеля компонентов плотности тока. Разложение $f(\tilde{\omega})$ при малой частоте $\tilde{\omega} \ll 1$ при условии, что произведение $\tilde{\omega}\tilde{d}$ произвольно, имеет вид

$$f(\tilde{\omega}) = \frac{64a_0(\tilde{d})}{15\pi} - \frac{656a_2(\tilde{d})}{315\pi}\tilde{\omega}^2 - i\frac{a_3(\tilde{\omega}\tilde{d})}{3}\tilde{\omega}^3 + \dots$$

Коэффициенты приведены в Приложении В. Они стремятся к единице в отсутствие металла ($\tilde{d} \rightarrow \infty$). Коэффициенты a_0 , a_2 являются монотонно возрастающими функциями расстояния до затвора. Коэффициент a_3 является осциллирующей функцией параметра $\tilde{\omega}\tilde{d}$.

Согласно уравнению (1.30), мощность поглощения пропорциональна $|\alpha_1|^2$. В случае, когда частота плазменных колебаний $\tilde{\omega}_{0,1}$ вдали от частоты $\pi n/\tilde{d}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), а ширина резонанса $\Delta\tilde{\omega}_{0,1}$ много меньше полупериода осцилляций $\pi/2\tilde{d}$, числитель $\sin^2 \tilde{\omega}\tilde{d}$ является плавной функцией частоты и свойства плазменных колебаний определяется исключительно знаменателем $|\alpha_1|^2$. В таком случае для высокочастотных плазменных колебаний в пределе малого параметра запаздывания $\tilde{\gamma} \ll \tilde{\Gamma} \ll 1$ аппроксимация дается следующими выражениями:

$$\tilde{\omega}_{1,1} = 1.01\sqrt{a_0(\tilde{d})\tilde{\Gamma}} \left(1 - 0.25a_2(\tilde{d})\tilde{\Gamma} + \dots \right), \quad (1.70)$$

$$\Delta\tilde{\omega}_{1,1} = \tilde{\gamma} \left(1 - 0.5a_2(\tilde{d})\tilde{\Gamma} + 0.15a_2^2(\tilde{d})\tilde{\Gamma}^2 \right) + 0.25a_0(\tilde{d})\operatorname{Re} \left(a_3(\tilde{\omega}_{1,1}\tilde{d}) \right) \tilde{\Gamma}^2 + \dots \quad (1.71)$$

На Рис. 1.10 показана зависимость частоты и ширины фундаментального резонанса от расстояния между затвором и ДЭС. Численные расчеты (сплошные кривые) основаны на использовании одиннадцати базисных функций (т.е. $N = 5$). Данные представлены для параметра запаздывания $\tilde{\Gamma} = 0.16$ и столкновительного параметра $\tilde{\gamma} = 0.001$. Для сравнения также представлены аналитические аппроксимации (пунктирные кривые), полученные с использованием одной базисной функции (1.70) и (1.71). Аналитические и численные зависимости показывают хорошее соответствие за исключением областей, выделенных серым цветом, где линия резонанса сильно искажается из-за исчезновения внешнего излучения при деструктивной интерференции (1.65). Когда резонансная частота приближается к нулям синуса, то есть частотам $n\pi c/\sqrt{\epsilon}d$, где n – натуральное число, линия поглощения становится асимметричной, что не сильно влияет на положение резонанса, но значительно увеличивает его ширину. Это увеличение хорошо видно на Рис. 1.11b возле серых областей. Центры серых областей (пунктирные вертикальные линии) соответствуют нулям синуса, то есть расстояниям $d_n = n\pi c/\sqrt{\epsilon}\omega_{0,1}$. Границы этих областей определяются неравенством $|\omega_{0,1} - n\pi c/\sqrt{\epsilon}d| < \Delta\omega_{0,1}/2$, где ширина линии $\Delta\omega_{0,1}$ берется при расстоянии d_n . Внутри серых областей

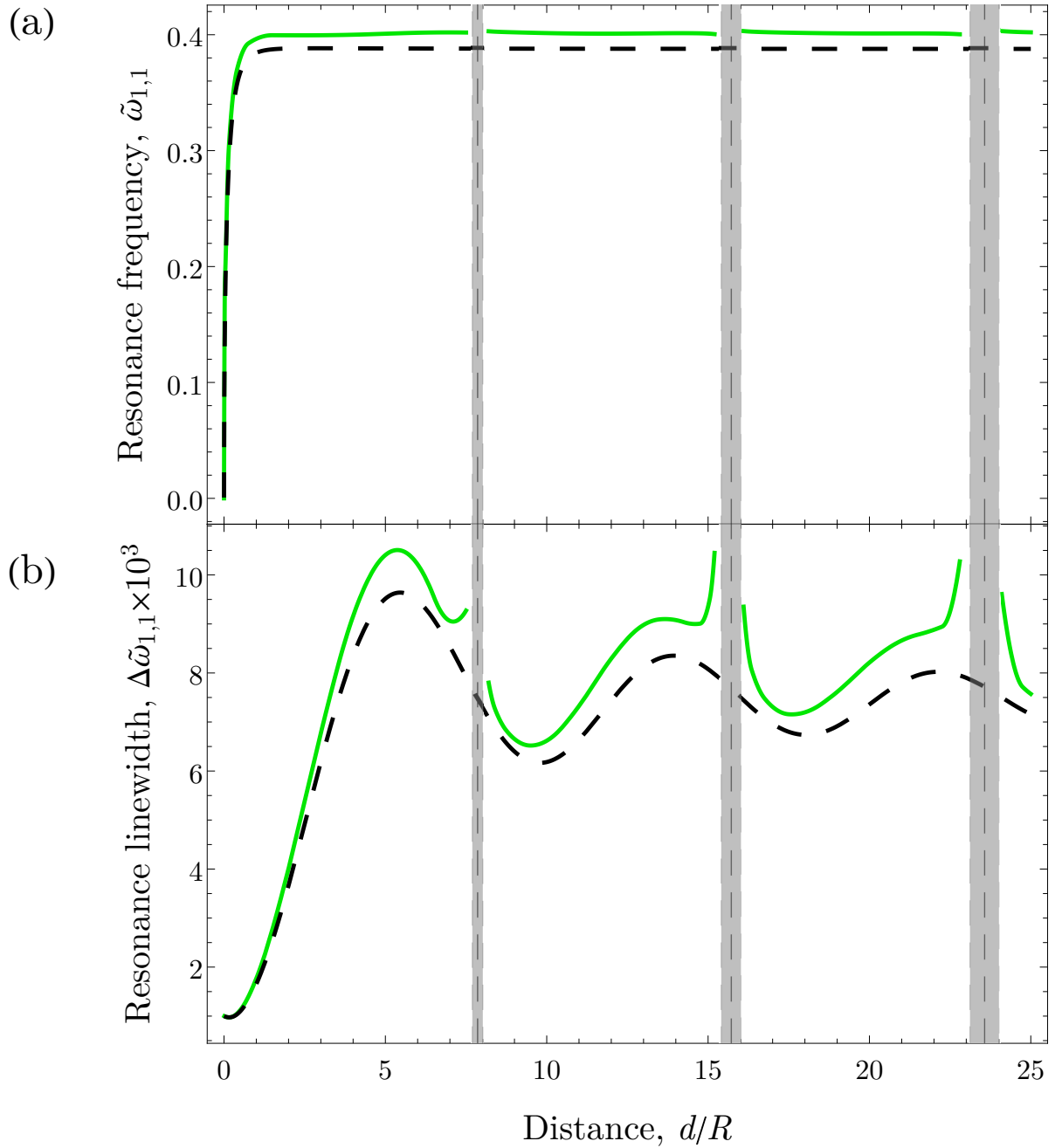


Рис. 1.10. Зависимость обезразмеренных частоты фундаментального резонанса $\tilde{\omega}_{0,1}$ (a) и его ширины $\Delta\tilde{\omega}_{0,1}$ (b) от расстояния d между диском радиуса R и металлом. Результат приведен для параметра запаздывания $\tilde{\Gamma} = 0.16$ (вблизи квазистатического предела) и столкновительного параметра $\tilde{\gamma} = 0.001$. Сплошная и пунктирная линии соответствуют численному счёту и аналитическим аппроксимациям (1.70) и (1.71). Серым отмечена область, где плазменный резонанс существенно искажается из-за деструктивной интерференции во внешнем возбуждающем поле (1.65). Вертикальные пунктиры – расстояние, при котором внешнее поле обращается в нуль.

линия резонанса настолько сильно отклоняется от контура Лоренца под влиянием синуса, что делится на два пика. Поскольку этот эффект обусловлен особенностями схемы возбуждения и не связан с характеристиками плазменных волн, мы не приводим никаких численных данных в серой области. Однако в реальных системах данный эффект может быть сильно подавлен благодаря неидеальной проводимости металла, поглощению в диэлектрической среде между диском и металлом или отсутствием плоского фронта у возбуждающего электромагнитного излучения. Так, на пример, при возбуждении осесимметричного резонанса мы использовали излучение диполя в дальней зоне, где оно является расходящимся, что устраняло этот эффект. С ростом потерь в системе ширина серой области увеличивается, что показано на Рис. 1.11, где $\tilde{\gamma} = 0.02$ и $\tilde{\Gamma} = 0.1$. В этом случае осцилляции ширины резонанса оказываются довольно искаженными, хотя поведение частоты сохраняется.

1.3.5. Анализ предельных случаев

Ниже перейдем к анализу выражений для частоты (1.70) и ширины (1.71) фундаментального резонанса в различных пределах. Сперва рассмотрим случай $d \gg R$, когда металл находится далеко от диска. Тогда характеристики резонанса можно аппроксимировать следующим образом:

$$\tilde{\omega}_{1,1} = 1.01\sqrt{\tilde{\Gamma}} \left(1 - 0.25\tilde{\Gamma} + \dots \right), \quad (1.72)$$

$$\Delta\tilde{\omega}_{1,1} = \Delta\tilde{\omega}_{1,1}^{\infty} - 0.19\tilde{\Gamma}^2 \frac{\sin 2\tilde{\omega}_{1,1}\tilde{d}}{\tilde{\omega}_{1,1}\tilde{d}} + \dots \quad (1.73)$$

Здесь $\Delta\tilde{\omega}_{1,1}^{\infty}$ – это ширина линии резонанса в отсутствие металла, которое может быть оценено взятием предела в уравнении (1.71) при $d \rightarrow \infty$. Полученное таким образом выражение для $\Delta\tilde{\omega}_{1,1}^{\infty}$ качественно совпадает с (1.54), хотя коэффициенты перед степенями $\tilde{\Gamma}$ вероятно будут немного отличаться, так как взята другая базисная функция для плотности тока. Второй член в

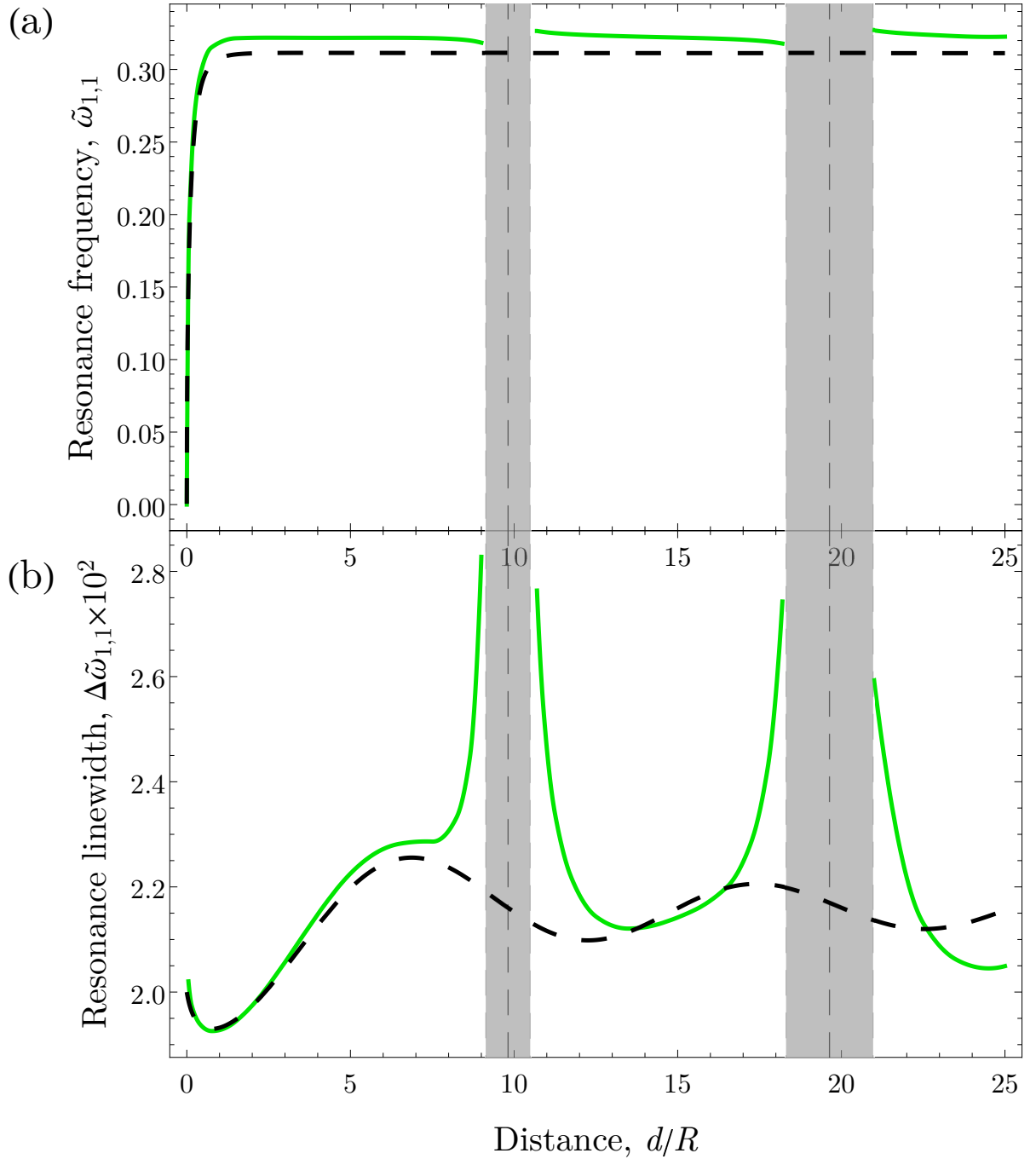


Рис. 1.11. Зависимость безразмерных частоты фундаментального резонанса $\tilde{\omega}_{0,1}$ (a) и его ширины $\Delta\tilde{\omega}_{0,1}$ (b) от расстояния d между диском радиуса R и металлом. Результат приведен для параметра запаздывания $\tilde{\Gamma} = 0.1$ (вблизи квазистатического предела) и столкновительного параметра $\tilde{\gamma} = 0.02$. Сплошная и пунктирная линии соответствуют численному счету и аналитическим аппроксимациям (1.70) и (1.71). Серым отмечена область, где плазменный резонанс существенно искажается из-за деструктивной интерференции во внешнем возбуждающем поле (1.65). Вертикальные пунктиры – расстояние, при котором внешнее поле обращается в нуль.

уравнении (1.73) представляет собой радиационное затухание, обусловленное дипольным излучением моды. Это слагаемое – осциллирующая функция параметра $\tilde{\omega}_{1,1}d$, которую можно объяснить интерференцией между излучением, исходящим от диска, и его отражением от металла. В “чистом” пределе, т.е. $\tilde{\gamma} = 0$, амплитуда первого максимума приблизительно в 1.35 раза больше, чем $\Delta\tilde{\omega}_{1,1}^\infty$. Также следует отметить, что частота в (1.72) почти не зависит от d , приближаясь к асимптотическому значению в пределе отсутствия металла.

Далее рассмотрим предел близко расположенного металла, когда $d \ll R$. Резонансная частота и ширина есть

$$\tilde{\omega}_{1,1} = 1.73\sqrt{2\tilde{\Gamma}d} \left(1 - \tilde{\Gamma}d + \frac{3}{2}\tilde{\Gamma}^2d^2 + \dots \right), \quad (1.74)$$

$$\Delta\tilde{\omega}_{1,1} = \tilde{\gamma} \left(1 - 2\tilde{\Gamma}d + 4\tilde{\Gamma}^2d^2 \right) + 7.2\tilde{\Gamma}^3d^4 + \dots \quad (1.75)$$

Как и в случае осесимметричной моды частота (1.74) зависит исключительно от параметра $2\tilde{\Gamma}d$. Слагаемое $\propto \tilde{\Gamma}^3$ в (1.75) соответствует квадрупольной радиации, тогда как компонента дипольного излучения $\tilde{\Gamma}^2$, подавлена излучением зарядов изображения этой моды под металлом.

Чтобы перевести представленные результаты в практическую плоскость, приведем некоторые оценки достижимых параметров для ДЭС в форме диска. Так для квантовых ям GaAs/AlGaAs с типичной концентрацией двумерных электронов $n_s \sim 2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, эффективной массой 0.066 от массы свободного электрона и радиусом диска $R \sim 0.3 \text{ мкм}$, параметр запаздывания равен $\tilde{\Gamma} \sim 0.16$. В высокоподвижных образцах [41] время релаксации импульса электрона может достигать значений до 10^{-10} с при температурах жидкого гелия, что соответствует значению $\tilde{\gamma} \sim 0.01$ столкновительного параметра, хотя она может быть на порядок уменьшена в “сверхвысококачественных” образцах при более низких температурах [105]. Аналогичные оценки можно сделать и для квантовых ям на основе ZnO или InAs [106, 107]. Таким образом, значения параметров, рассмотренные в нашей работе, применимы к реальным структурам, а собственная ширина линии основных резонансов

регулируется в основном излучением, когда затвор находится на достаточном расстоянии от двумерной электронной системы.

1.4. Предел сильного экранирования

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда расстояние d много меньше всех характерных размеров системы. Этот предел позволяет провести полностью аналитический анализ. Однако, для простоты мы будем исследовать не плазменные резонансы, возбуждаемые внешним излучением, а собственные плазменные колебания. Для их анализа мы воспользуемся уравнением (1.25), где внешнее излучение исключено из рассмотрения и частота плазменных колебаний считается комплексной. Тогда при возбуждении плазменных колебаний действительная часть частоты соответствует положению плазменного резонанса в спектре поглощения, а мнимая – характеризует ширину резонанса.

Для достижимости рассматриваемого предела расстояние между металлом и ДЭС должно быть много меньше не только радиуса диска, но и характерной длины волны плазменных колебаний, которая тем меньше чем выше числа n_r и l у моды. Таким образом, рассматривая низкочастотные моды и учитывая, что $d \ll R$, мы можем разложить член $1 - e^{-2\sqrt{p^2 - \tilde{\omega}^2} \tilde{d}}$ в интегральном ядре $G_l(\tilde{r}, \tilde{r}')$ как $2\sqrt{p^2 - \tilde{\omega}^2} \tilde{d} + \dots$ по малости параметра \tilde{d} . Оно сводит ядро к дельта-функции $2\pi \tilde{d} \cdot \delta(\tilde{r} - \tilde{r}')/\tilde{r}'$, значительно упрощая анализ, поскольку связь между индуцированным полем и током становится локальной и описывается дифференциальным уравнением. Это означает, что заряды внутри диска взаимодействуют со своими изображениями в металле, а не друг с другом. Как будет показано ниже, это приближение исключает излучение. Переходя к току преобразованному с помощью S (1.9), уравнение

приобретает вид:

$$\mathbf{j}_S^l(\tilde{r}) = i \frac{4\pi\tilde{\sigma}\tilde{d}}{\tilde{\omega}} \left(\hat{D}_S^l + \tilde{\omega}^2 I \right) \mathbf{j}_S^l(\tilde{r}'), \quad \hat{D}_S^l = S^{-1} \hat{D}_l S. \quad (1.76)$$

Выполнив замену

$$\mu^2 = \tilde{\omega}^2 + i \frac{\tilde{\omega}c}{4\pi\tilde{\sigma}\tilde{d}} \quad (1.77)$$

мы получаем задачу на собственные значения

$$\hat{D}_S^l \mathbf{j}_S^l(\tilde{r}) = -\mu^2 \mathbf{j}_S^l(\tilde{r}). \quad (1.78)$$

Используя рекуррентные соотношения для функций Бесселя [108], можно показать, что вектор-функция

$$\mathbf{j}_S^l(\tilde{r}) = \begin{pmatrix} J_{l+1}(\mu\tilde{r}) \\ J_{l-1}(\mu\tilde{r}) \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

является собственной функцией полученной задачи (1.78). Здесь параметр μ определяется граничным условием на краю диска $j_r(1) = 1$. Используя свойства функций Бесселя и их производных, граничное условие можно свести к требованию $J'_l(\mu) = 0$, где штрих обозначает первую производную функции Бесселя по её аргументу. Таким образом μ – это n_r -й нуль первой производной функции Бесселя порядка l , который мы обозначаем как μ_{l,n_r} .

Исходя из всего вышеизложенного, частота плазменных колебаний в пределе сильного экранирования есть

$$\tilde{\omega}_{l,n_r} = \sqrt{\mu_{l,n_r}^2 \frac{2\tilde{\Gamma}\tilde{d}}{1+2\tilde{\Gamma}\tilde{d}} - \frac{\tilde{\gamma}^2}{4(1+2\tilde{\Gamma}\tilde{d})^2}} - i \frac{\tilde{\gamma}}{2(1+2\tilde{\Gamma}\tilde{d})}. \quad (1.80)$$

Это выражение, но в отсутствие столкновений $\tilde{\gamma} = 0$, впервые было получено в работе [95]. Обратим внимание, что полученное выражение зависит только от столкновительного параметра и параметра $\tilde{\Gamma}\tilde{d}$, который не зависит от радиуса диска. В случае “чистой” электронной системы, т.е. при $\tilde{\gamma} = 0$, мнимая часть частоты равна нулю и соответственно отсутствует вклад связанный с

излучением плазменной моды. Из-за близко расположенного металла интерференция между излучением от моды и его отражением приводит к нулевому суммарному полю электромагнитной волны.

В случае высокочастотных плазменных колебаний, когда $\text{Re}(\omega_{l,n_r}) \gg |\text{Im}(\omega_{l,n_r})|$, слагаемым пропорциональным $\tilde{\gamma}^2$ под корнем можно пренебречь. При возбуждении этих плазменных колебаний в спектре поглощения будут резонансы, положение и ширина которых даются следующими выражениями:

$$\tilde{\omega}_{l,n_r} = \text{Re}(\omega_{l,n_r}) = \mu_{l,n_r} \sqrt{\frac{2\tilde{\Gamma}\tilde{d}}{1 + 2\tilde{\Gamma}\tilde{d}}}, \quad (1.81)$$

$$\Delta\tilde{\omega}_{l,n_r} = 2|\text{Im}(\omega_{l,n_r})| = \frac{\tilde{\gamma}}{1 + 2\tilde{\Gamma}\tilde{d}}. \quad (1.82)$$

Разложение частоты по малости параметра $\tilde{\Gamma}$ для осесимметричной моды $l = 0$, $n_r = 1$ и для фундаментальной $l = 1$, $n_r = 1$ почти совпадает с полученными аппроксимациями (1.63) и (1.74) соответственно. Единственно отличие в коэффициенте перед $\sqrt{2\tilde{\Gamma}}$: у осесимметричной моды вместо 4 получается $\mu_{0,1} = 3.83$, а у фундаментальной вместо 1.73 – значение $\mu_{1,1} = 1.84$. В случае же ширины слагаемое $\propto \tilde{\gamma}$ в аппроксимациях (1.64) и (1.75) полностью совпадает с разложением ширины (1.82) по параметру $\tilde{\Gamma}\tilde{d}$. Однако аппроксимации (1.64) и (1.75) так же содержат слагаемые соответствующие радиационным потерям в системе. Таким образом, выражение для ширины (1.82) верно пока оно много меньше, чем вклад от радиационных потерь, которые оценены в аппроксимациях.

Выражение для абсолютного значения частоты из (1.81) можно записать в следующем виде:

$$\omega_{l,n_r} = v \frac{\mu_{l,n_r}}{R}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\frac{2\tilde{\Gamma}\tilde{d}}{1 + 2\tilde{\Gamma}\tilde{d}}} = \sqrt{\frac{\frac{4\pi n_s e^2 d}{\epsilon m}}{1 + \frac{4\pi n_s e^2 d}{mc^2}}}. \quad (1.83)$$

Здесь $\mu_{l,n_r}/R$ является квантованным значением волнового вектора в системе и, таким образом, частота соответствует линейной дисперсии света, свойственной плазменным колебаниям в пределе сильного экранирования [81].

В квазистатическом пределе $\tilde{\Gamma} \ll 1$ скорость $v \ll c/\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, в пределе сильного экранирования в качестве параметра запаздывания удобно рассматривать отношение групповой скорости плазмона к скорости света в среде $v\sqrt{\varepsilon}/c = \sqrt{2\tilde{\Gamma}\tilde{d}} = \sqrt{4\pi n_s e^2 d / (mc^2)}$.

Глава 2

Плазменные колебания в сильно экранированной ДЭС в форме полосы

В данной главе будут проанализированы собственные магнитоплазменные колебания в сильно экранированной ДЭС в форме полосы с анизотропией масс носителей заряда и найдены аналитические выражения для их частоты и затухания. Изложенный ниже материал опирается на результаты работ [59, 60] автора диссертационной работы.

Пусть в среде с диэлектрической проницаемостью ε в плоскости $z = 0$ располагается ДЭС в форме полосы с шириной W . Направим ось y вдоль полосы, а ось x поперек как показано на Рис. 2.1. На расстоянии d от полосы в плоскости $z = -d$ находится бесконечная идеально проводящая металлическая пластина (проводимость которой сколь угодно велика). Вдоль оси z направлено внешнее однородное магнитное поле с величиной индукции B . Диагональные компоненты тензора эффективных масс в главных осях равны m_1 и m_2 . Динамическую проводимость ДЭС выберем в анизотропной модели Друде [109], обобщающей вид (14). Время релаксации импульса носителей заряда τ для простоты будем считать не зависящим от энергии и направления. Пусть θ – угол между осью x и главной осью тензора эффективных масс с компонентой m_1 . При произвольной ориентации осей тензора эффективных масс проводимость в системе единиц СГС в выбранных декартовых координатах имеет следующий вид:

$$\sigma = S^T \begin{pmatrix} \frac{(\gamma - i\omega) \frac{n_s e^2}{m_1}}{(\gamma - i\omega)^2 + \omega_c^2} & \frac{-\omega_c \frac{n_s e^2}{\sqrt{m_1 m_2}}}{(\gamma - i\omega)^2 + \omega_c^2} \\ \frac{\omega_c \frac{n_s e^2}{\sqrt{m_1 m_2}}}{(\gamma - i\omega)^2 + \omega_c^2} & \frac{(\gamma - i\omega) \frac{n_s e^2}{m_2}}{(\gamma - i\omega)^2 + \omega_c^2} \end{pmatrix} S, \quad (2.1)$$

где $\omega_c = eB/c\sqrt{m_1 m_2}$ – циклотронная частота, e , n_s – заряд и двумерная концентрация электронов, $\gamma = 1/\tau$ – обратное время релаксации импульса

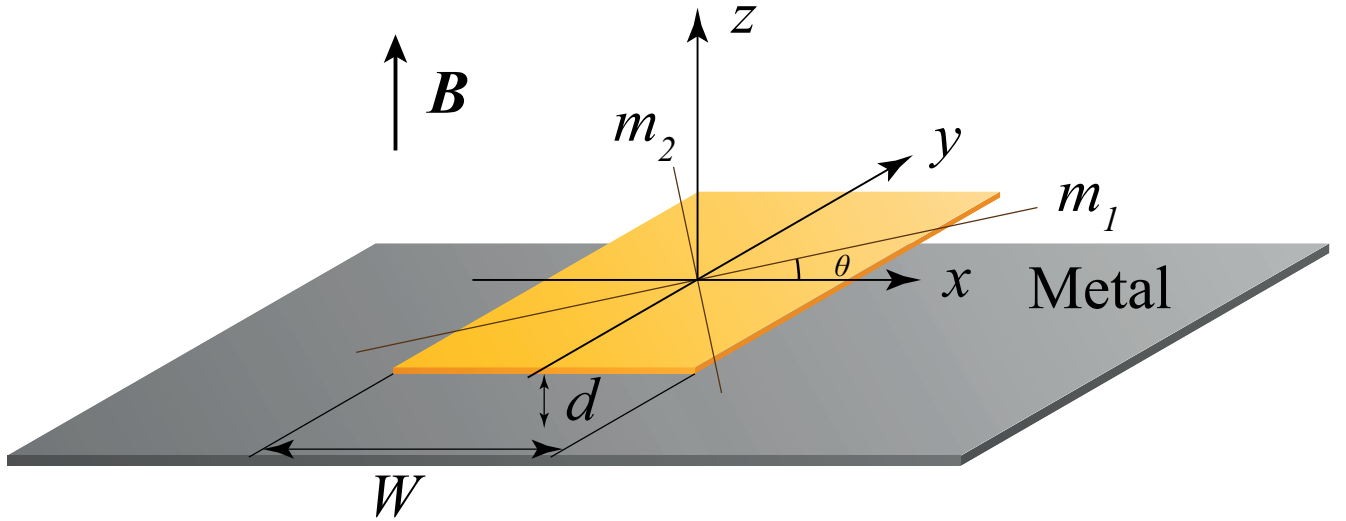


Рис. 2.1. Схематичное изображение исследуемой системы. Двумерная электронная система в форме полосы с шириной W располагается на расстоянии d над металлической пластиной. Система помещена в постоянное однородное магнитное поле, вектор индукции \mathbf{B} которого направлен перпендикулярно полосе. Тензор эффективных масс с главными осями m_1 и m_2 повернут на произвольный угол θ по отношению к краям полосы.

электронов, а матрица поворота S на угол θ имеет стандартный вид:

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Для описания плазменных колебаний с учетом эффектов электромагнитного запаздывания необходимо решать полную систему уравнений Максвелла с локальным законом Ома и проводимостью (2.1) подобно тому как это было сделано в предыдущей главе для диска. В силу симметрии системы электромагнитное поле, плотность тока и возмущение плотности заряда могут быть выбраны как $\propto e^{iq_y y}$, где q_y – действительный волновой вектор вдоль полосы. Пусть также колебания происходят на комплексной частоте ω и все функции от времени $\propto e^{-i\omega t}$. Действительная часть ω описывает частоту плазменных колебаний, а мнимая – их затухание. Систему уравнений Максвелла можно свести к одному интегро-дифференциальному уравнению на плотность тока $\mathbf{j}(x)$ с довольно сложным ядром логарифмического типа,

подобно тому как это делается в случае отсутствия затвора [37]:

$$\mathbf{j}(x) = i \frac{2\pi\sigma}{\omega} \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} & -iq_y \frac{d}{dx} \\ -iq_y \frac{d}{dx} & -q_y^2 + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \end{pmatrix} \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} G(|x - x'|) \mathbf{j}(x') dx', \quad (2.3)$$

где интегральное ядро дается уравнением

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq_x x}}{\sqrt{q_x^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}} \left(1 - e^{-2d\sqrt{q_x^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}} \right) \frac{dq_x}{2\pi} \quad (2.4)$$

Один из способов вывода этой связи приведен в Приложении Г.

Будем считать, что расстояние до затвора d много меньше всех характерных размеров, таких как ширина полосы и длина волны плазмона. Такая ситуация часто встречается в реальных системах [10, 54, 110]. В этом пределе ядро интегро-дифференциального уравнения значительно упрощается и превращается в дельта-функцию Дирака [32, 81, 87]. Такой предел фактически соответствует локальному взаимодействию электронов: из-за близости полосы к затвору электроны в системе взаимодействуют только со своими зарядами изображения в металле. В результате уравнение для тока становится исключительно дифференциальным:

$$\mathbf{j}(x) = i \frac{4\pi d\sigma}{\varepsilon\omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} & iq_y \frac{\partial}{\partial x} \\ iq_y \frac{\partial}{\partial x} & -q_y^2 + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \end{pmatrix} \mathbf{j}(x). \quad (2.5)$$

Это уравнение для фурье компонент было также получено в работе [86].

Прежде чем продолжить, отметим, что плазменные моды помимо волнового вектора q_y , связанного с распространением вдоль полосы, также характеризуются целым числом $n = 0, 1, 2, \dots$, указывающим на квантование их свойств поперек полосы. Напомним также, что в рассматриваемом пределе локального взаимодействия у всех плазменных мод отсутствуют радиационные потери. Физически это связано с тем, что даже для мод, дисперсия которых проходит выше дисперсии света, при малых расстояниях d излучение ДЭС подавляется излучением, отраженным от металла [58]. Поэтому

плазменное затухание в рассматриваемом нами случае определяется столкновительными потерями, т.е. $\text{Im } \omega_n(q_y) \propto \gamma$, и в “чистом” пределе ($\gamma \rightarrow 0$) частота плазмона действительна.

Чтобы найти дисперсионное уравнение для собственных плазменных колебаний и соответствующее распределение плотности тока, необходимо решить уравнение (2.5). Для этого предварительно немного упростим его, домножив на $(i4\pi d/\varepsilon\omega)^{-1}\rho$ и сделав замену:

$$\begin{pmatrix} k_{xx}^2 & k_{xy}^2 \\ k_{yx}^2 & k_{yy}^2 \end{pmatrix} = -i \frac{\varepsilon\omega}{4\pi d} \rho - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} I, \quad (2.6)$$

где $\rho = \sigma^{-1}$ – тензор удельного сопротивления, а I как и прежде – единичная матрица 2×2 . В таком случае уравнение (2.5) по компонентам будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_{xx}^2 \right) j_x(x) + iq_y \frac{\partial}{\partial x} j_y(x) - k_{xy}^2 j_y(x) = 0, \quad (2.7)$$

$$\left(iq_y \frac{\partial}{\partial x} - k_{yx}^2 \right) j_x(x) - (q_y^2 + k_{yy}^2) j_y(x) = 0. \quad (2.8)$$

Компонента $j_y(x)$ из второго уравнения может быть выражена только, если коэффициент перед ней отличен от нуля.

2.1. Краевой магнитоплазмон

Решение системы уравнений (2.7)-(2.8) начнем со случая, когда выполнено условие $q_y^2 + k_{yy}^2 = 0$, которое может быть переписано как

$$\rho_{yy} + i \frac{4\pi d}{\varepsilon\omega} \left(q_y^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0, \quad (2.9)$$

где через $\rho = \sigma^{-1}$ обозначен тензор удельного сопротивления. Решением оставшегося дифференциального уравнения на x -компоненту в (2.8) с граничным условием $j_x(-W/2) = j_x(W/2) = 0$ является $j_x(x) = 0$. При этом

согласно (2.7) компонента тока вдоль полосы оказывается ненулевой и дается выражением

$$j_y(x) = j_y(0)e^{-i\frac{k_{xy}^2}{q_y}x}. \quad (2.10)$$

Полученная мода качественно отличается от остальных, потому что описывает краевой магнитолазмон (КМП), ток которого локализован вблизи одного из краев и направлен строго вдоль полосы. Этой моде мы присвоим целое число $n = 0$.

В дисперсионном уравнении (2.9) магнитное поле может входить только в сопротивление ρ_{yy} . Однако в рамках рассматриваемой модели проводимости эта компонента тензора сопротивления, а значит и частота КМП, не зависит от магнитного поля:

$$\rho_{yy} = \frac{m_1 \cos^2 \theta + m_2 \sin^2 \theta}{n_s e^2} (\gamma - i\omega).$$

Магнитодисперсия может появиться в случае, если диагональная компонента тензора удельного сопротивления по каким-то причинам будет зависеть от магнитного поля. Кроме того, в следующем порядке малости по расстоянию d следует ожидать (слабую) отрицательную магнитодисперсию, как например, это происходит у КМП в полуплоскости в изотропном случае [32].

Решив дисперсионное уравнение (2.9) относительно частоты, получаем:

$$\omega_0(q_y) = \sqrt{v(\theta)^2 q_y^2 - \frac{\gamma^2}{4} \left(1 - \varepsilon \frac{v(\theta)^2}{c^2}\right)^2} - i \frac{\gamma}{2} \left(1 - \varepsilon \frac{v(\theta)^2}{c^2}\right). \quad (2.11)$$

Здесь введены скорости

$$v_i = \sqrt{\frac{\frac{4\pi n e^2 d}{\varepsilon m_i}}{1 + \frac{4\pi n e^2 d}{m_i c^2}}}, \quad i = 1, 2, \quad v(\theta) = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 \cos^2 \theta + v_2^2 \sin^2 \theta}}$$

Отношение скоростей $v_{1,2}$ к скорости света в среде $c/\sqrt{\varepsilon}$ можно интерпретировать как степень влияния эффектов электромагнитного запаздывания: в квазистатическом пределе оно много меньше единицы, а при сильном запаздывании – близко к единице.

При увеличении магнитного поля ток и плотность заряда прижимаются к одному из краев полосы (в зависимости от направления магнитного поля), при этом длина локализации l_{EMP} в чистом пределе согласно (2.10) определяется следующим выражением:

$$l_{EMP} = \left| \operatorname{Re} \left(i \frac{q_y}{k_{xy}^2} \right) \right| = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{1 - \varepsilon \frac{v_1^2}{c^2}} \sqrt{1 - \varepsilon \frac{v_2^2}{c^2}} v(\theta) \omega_c}, \quad \omega_c \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

С увеличением электромагнитного запаздывания, т.е. с увеличением отношения $v_{1,2}/c$, длина локализации увеличивается. В силу рассматриваемого предела локального взаимодействия, подразумевающего малость расстояния d по сравнению с другими характерными размерами в системе, следует ожидать, что полученное выражение (2.12) справедливо при условии $l \gg d$.

Выражение для затухания краевого магнитоплазмона при условии $\operatorname{Re} \omega_n(q_y, \theta) \gg |\operatorname{Im} \omega_n(q_y, \theta)|$ в соответствии с (2.9) имеет простой вид

$$\operatorname{Im} \omega_0(q_y) = -\frac{\gamma}{2} \left(1 - \varepsilon \frac{v(\theta)^2}{c^2} \right). \quad (2.13)$$

Затухание уменьшается с увеличением роли электромагнитного запаздывания, т.к. потери энергии происходят только за счет столкновительного рассеяния электронов в ДЭС, но все больше энергии запасается в бездиссипативных электромагнитных полях, окружающих ДЭС.

2.2. “Объемные” плазмоны

Пусть теперь условие $q_y^2 + k_{yy}^2 = 0$ не выполнено. Тогда, выражая $j_y(x)$ из (2.8)

$$j_y(x) = \frac{(iq_y \frac{\partial}{\partial x} - k_{yx}^2) j_x(x)}{q_y^2 + k_{yy}^2} \quad (2.14)$$

и подставляя в (2.7), получаем дифференциальное уравнение:

$$\left[k_{yy}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - iq_y (k_{xy}^2 + k_{yx}^2) \frac{\partial}{\partial x} + k_{xy}^2 k_{yx}^2 - k_{xx}^2 (q_y^2 + k_{yy}^2) \right] j_x(x) = 0 \quad (2.15)$$

Решением этого уравнения является линейная комбинация плоских волн $e^{iq_x^+ x}$ и $e^{iq_x^- x}$, где

$$q_x^\pm = \frac{q_y (k_{xy}^2 + k_{yx}^2)}{2k_{yy}^2} \pm \sqrt{\frac{q_y^2 (k_{xy}^2 + k_{yx}^2)^2}{4k_{yy}^4} + \frac{k_{xy}^2 k_{yx}^2 - k_{xx}^2 (q_y^2 + k_{yy}^2)}{k_{yy}^2}}. \quad (2.16)$$

Учитывая граничное условие $j_x(-W/2) = j_x(W/2) = 0$, мы получаем систему линейных уравнений на коэффициенты. Условие нетривиального решения соответствует нулевому определителю соответствующей матрицы, что приводит к равенству:

$$q_x^+ - q_x^- = \frac{2\pi n}{W}, \quad (2.17)$$

где n – натуральное число. Полученное выражение является дисперсионным уравнением плазменных мод с натуральным числом n , которые будем называть “объемными”. Их x -компонента плотности тока есть

$$j_x(x) = C e^{-i(q_x^+ + q_x^-)x} \sin\left(n \frac{\pi x}{W} - n \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.18)$$

где C – произвольный коэффициент, а y -компонента восстанавливается из (2.14).

Решая дисперсионное уравнение (2.17), находим частоту “объемных” плазменных колебаний $\omega_n(q_y)$. В случае высокой добротности, т.е. $\text{Re } \omega_n(q_y) \gg |\text{Im } \omega_n(q_y)|$, можно получить следующие выражения для частоты

$$\text{Re } \omega_n(q_y) = \sqrt{q_y^2 v(\theta)^2 + \left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 \frac{v_1^2 v_2^2}{v(\theta)^2} + \omega_c^2 \left(1 - \varepsilon \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \varepsilon \frac{v_2^2}{c^2}\right)}, \quad (2.19)$$

и затухания

$$\text{Im } \omega_n(q_y) = -\frac{\gamma}{2} \left[2 - \varepsilon \frac{v_1^2 + v_2^2}{c^2} - \frac{q_y^2 v(\theta)^2 \left(1 + \varepsilon \frac{v(\theta)^2 - v_1^2 - v_2^2}{c^2}\right)}{(\text{Re } \omega_n(q_y))^2} - \frac{\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 \frac{v_1^2 v_2^2}{v(\theta)^2} \left(1 - \varepsilon \frac{v(\theta)^2}{c^2}\right)}{(\text{Re } \omega_n(q_y))^2} \right], \quad (2.20)$$

Равенство (2.19) показывает, что квадрат частоты этих мод определяется суммой трех вкладов. Первые два связаны с поперечными и продольными

колебаниями плазмона в полосе соответственно, а последний с наличием магнитного поля. В коротковолновом пределе, т.е. когда слагаемое с продольной компонентой волнового вектора q_y вносит основной вклад в частоту, плазменная дисперсия (2.19) становится линейной по волновому вектору, а фазовая и групповая скорости плазмона сравниваются, принимая значение $v(\theta)$. Что касается магнитного вклада в частоту, в изотропных ДЭС учет электромагнитного запаздывания приводит к уменьшению частоты циклотронного резонанса [110, 111]. Этот же результат сохраняется и в анизотропной системе, причем это уменьшение не зависит от угла ориентации тензора эффективных масс θ .

На Рис. (2.2) для примера приведена магнитодисперсия нижайших плазменных мод в квантовой яме на основе напряженного AlAs. Видно, что магнитодисперсия краевой моды плоская, а частота объемных мод стремится к циклотронному резонансу, уменьшенному за счет эффектов электромагнитного запаздывания. Между краевым магнитоплазмоном и первой объемной модой существует щель, как и в изотропном случае, однако, при наличии анизотропии ее величина дополнительно зависит от угла ориентации θ .

Обратим внимание на то, что при наличии анизотропии квантование поперечной компоненты волнового вектора существенно отличается от изотропного случая. При наличии анизотропии в системе существует две волны, бегущих друг на встречу другу с разными волновыми векторами q_x^+ и q_x^- из (2.16). Таким образом нет конкретной проекции волнового вектора, и следовательно частота не может быть получена подходящим “квантованием” поперечной компоненты волнового вектора размерами полосы в дисперсии плазмона в соответствующей бесконечной анизотропной ДЭС.

Теперь обсудим затухание объемных мод. В изотропной системе ($v_1 = v_2 \equiv v$) затухание в отсутствие магнитного поля не зависит ни от номера моды n , ни от продольного волнового вектора q_y и определяется как $\text{Im} \omega_n(\omega_c = 0) = -\gamma(1 - v^2/c^2)/2$. В сильных магнитных полях оно удваи-

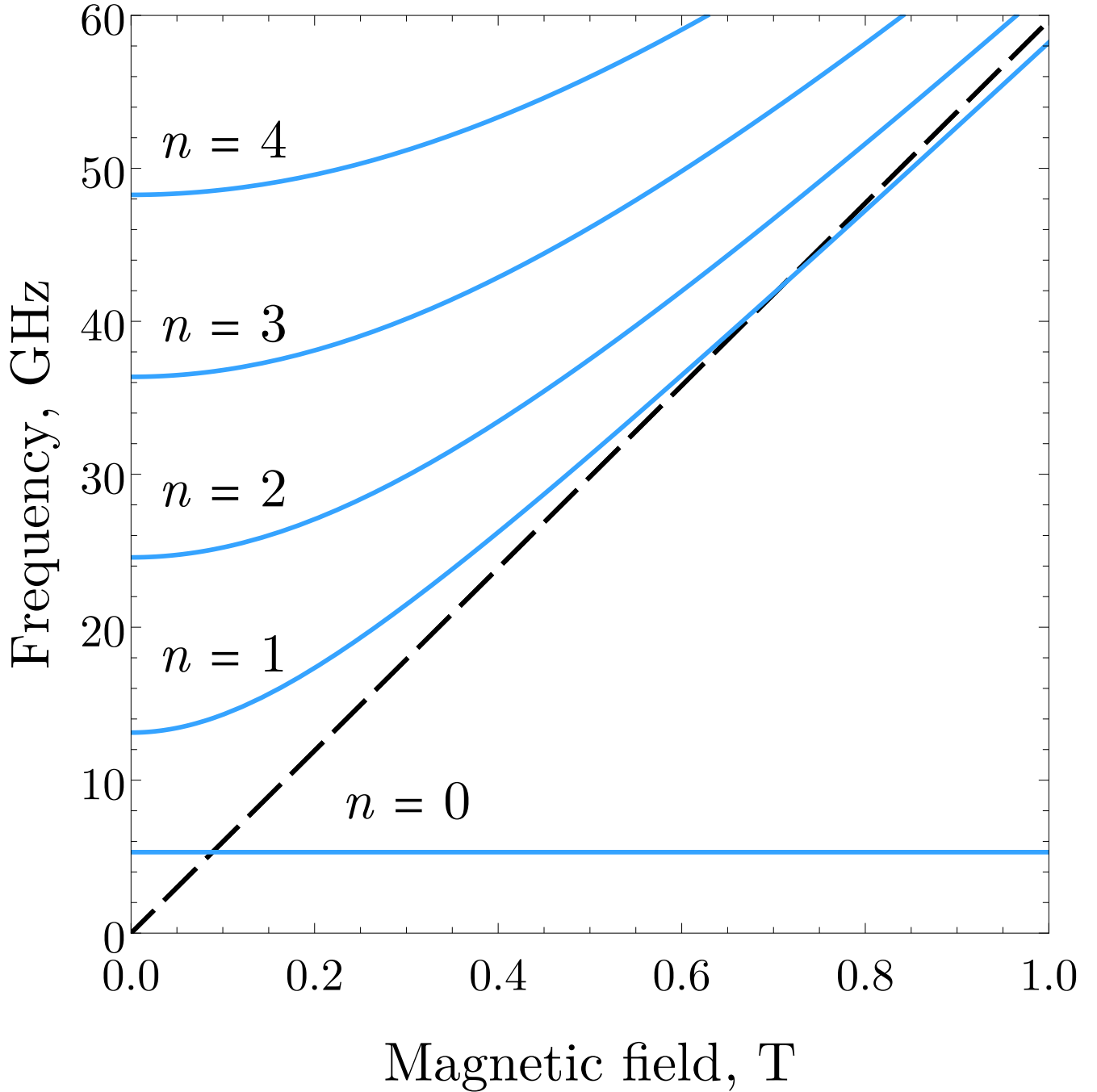


Рис. 2.2. Зависимость частоты плазменных мод от магнитного поля в “чистом” пределе ($\tau \rightarrow \infty$). Сплошные линии соответствуют углу ориентации $\theta = 0$. Пунктирная прямая – циклотронная частота. Массы $m_1 = 0.2m_0$ и $m_2 = 1.1m_0$, где m_0 – масса свободного электрона. Концентрация электронов $n_s = 10^{12} \text{ см}^{-2}$, ширина полосы $W = 1 \text{ мм}$ расстояние до затвора $d = 50 \text{ мкм}$ ($d \ll W$), волновой вектор $q_y = \pi/W$ ($q_y d \ll 1$), диэлектрическая проницаемость AlGaAs $\varepsilon = 12.7$. Отношение скоростей v_1 и v_2 к скорости света в среде есть $\sqrt{\varepsilon}v_1/c = 0.28$ и $\sqrt{\varepsilon}v_2/c = 0.13$, что указывает на проявление эффектов электромагнитного запаздывания.

вается, т.е. $\text{Im } \omega_n(\omega_c \rightarrow \infty) = 2 \text{Im } \omega_n(\omega_c = 0)$. В анизотропной системе мнимая часть частоты в сильном магнитном поле имеет схожий с изотропным случаем вид

$$\text{Im } \omega_n(\omega_c \rightarrow \infty) = -\gamma \left(1 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{2c^2} \right). \quad (2.21)$$

Как можно видеть, затухание магнитоплазмонов вовсе не зависит от угла θ . Обратим внимание на поведение добротности плазменных колебаний $\text{Re } \omega_n(q_y) / |\text{Im } \omega_n(q_y)|$ в сильных магнитных полях. В изотропной системе добротность стремится к значению ω_c/γ , не зависящему от величины электромагнитного запаздывания, в то время как анизотропная система “чувствует” усиление роли эффектов электромагнитного запаздывания, и добротность плазменных колебаний в ней уменьшается.

Заключение

- Таким образом, рассмотрены плазменные колебания в двумерной электронной системе в форме диска с проводимостью в рамках модели Друде. Анализ проведен для фундаментального и осесимметричного плазменных резонансов. Показано, что положение резонансов может быть получено феноменологическим “квантованием” волнового вектора в выражении для частоты плазменных колебаний в бесконечной системе. Ширина резонансов с увеличением роли электромагнитного запаздывания сначала уменьшается, достигая даже значений меньших чем сумма столкновительного и радиационного уширений, а затем возрастает. В режиме сильного электромагнитного запаздывания частота и ширина плазменных резонансов стремятся к асимптотическим значениям.
- Так же рассмотрено влияние расположенного рядом с двумерной электронной системой плоского идеально проводящего металлического затвора на эти плазменные резонансы. Показано, что в случае сильного экранирования у плазменных колебаний отсутствуют радиационные потери из-за деструктивной интерференции между излучением от двумерной электронной системы и его отражением от металла. При отдалении близко расположенного затвора от системы ширина резонансов сначала падает, а затем возрастает и приобретает осциллирующий вид. При слабом электромагнитном запаздывании и при удалении металла на расстояние, существенно превышающее длину волны возбуждающего излучения, частота этих осцилляций оценивается как удвоенное отношение плазменной частоты к скорости света в среде, а их амплитуда стремится к нулю при отдалении металла.
- Исследованы собственные магнитоплазменные колебания в сильно экранированной двумерной электронной системе в форме полосы с анизо-

тропией эффективной массы носителей заряда. Анализ проводился для систем, проводимость которых описывается в рамках модели Друде, учитывающей наличие внешнего магнитного поля. Найдены аналитические выражения для частоты и затухания всех плазменных колебаний в такой системе. Показано, что частота краевого магнитоплазмона, являющегося фундаментальной модой, не зависит от величины магнитного поля. При этом квадрат частоты “объемных” мод состоит из двух слагаемых: квадрата частоты в отсутствие магнитного поля и члена пропорционального квадрату циклотронной частоты, в котором коэффициент не зависит от ориентации осей тензора эффективных масс и уменьшается при увеличении влияния электромагнитного запаздывания.

Словарь терминов

ДЭС — двумерная электронная система,

КМП — краевой магнитоплазмон.

Список литературы

1. Stern F. Polarizability of a two-dimensional electron gas // [Physical Review Letters](#). — 1967. — Vol. 18, no. 14. — P. 546.
2. Grimes C. C. and Adams G. Observation of two-dimensional plasmons and electron-ripplon scattering in a sheet of electrons on liquid helium // [Physical Review Letters](#). — 1976. — Vol. 36, no. 3. — P. 145.
3. Theis T. N., Kotthaus J. P., and Stiles P. J. Two-dimensional magneto-plasmon in the silicon inversion layer // [Solid State Communications](#). — 1977. — Vol. 24, no. 4. — P. 273–277.
4. Dyakonov M. and Shur M. Shallow water analogy for a ballistic field effect transistor: New mechanism of plasma wave generation by dc current // [Phys. Rev. Lett.](#) — 1993. — Vol. 71, no. 15. — P. 2465.
5. Satou A., Khmyrova I., Ryzhii V., and Shur M. S. Plasma and transit-time mechanisms of the terahertz radiation detection in high-electron-mobility transistors // [Semiconductor Science and Technology](#). — 2003. — Vol. 18, no. 6. — P. 460.
6. Knap W., Dyakonov M., Coquillat D., Teppe F., Dyakonova N., Lusakowski J., Karpierz K., Sakowicz M., Valusis G., Seliuta D., et al. Field effect transistors for terahertz detection: Physics and first imaging applications // [Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves](#). — 2009. — Vol. 30, no. 12. — P. 1319–1337.
7. Muravev V. M. and Kukushkin I. V. Plasmonic detector/spectrometer of subterahertz radiation based on two-dimensional electron system with embedded defect // [Applied Physics Letters](#). — 2012. — Vol. 100, no. 8. — P. 082102.
8. Lusakowski J. Plasmon–terahertz photon interaction in high-electron-mobility heterostructures // [Semiconductor Science and Technology](#). — 2016. — Vol. 32, no. 1. — P. 013004.

9. Rumyantsev S., Liu X., Kachorovskii V., and Shur M. Homodyne phase sensitive terahertz spectrometer // [Applied Physics Letters](#). — 2017. — Vol. 111, no. 12. — P. 121105.
10. Bandurin D. A., Svintsov D., Gayduchenko I., Xu S. G., Principi A., Moskotin M., Tretyakov I., Yagodkin D., Zhukov S., Taniguchi T., et al. Resonant terahertz detection using graphene plasmons // [Nature Communications](#). — 2018. — Vol. 9, no. 1. — P. 5392.
11. Svintsov D. Exact solution for driven oscillations in plasmonic field-effect transistors // [Physical Review Applied](#). — 2018. — Vol. 10, no. 2. — P. 024037.
12. Shur M. S. Terahertz plasmonic technology // [IEEE Sensors Journal](#). — 2020. — Vol. 21, no. 11. — P. 12752–12763.
13. Elbanna A., Jiang H., Fu Q., Zhu J.-F., Liu Y., Zhao M., Liu D., Lai S., Chua X. W., Pan J., et al. 2D material infrared photonics and plasmonics // [ACS Nano](#). — 2023. — Vol. 17, no. 5. — P. 4134–4179.
14. Kukushkin I. V., Smet J. H., Mikhailov S. A., Kulakovskii D. V., von Klitzing K., and Wegscheider W. Observation of retardation effects in the spectrum of two-dimensional plasmons // [Physical Review Letters](#). — 2003. — Vol. 90, no. 15. — P. 156801.
15. Xiao S., Zhu X., Li B.-H., and Mortensen N. A. Graphene-plasmon polaritons: From fundamental properties to potential applications // [Frontiers in Physics](#). — 2016. — Vol. 11, no. 2. — P. 1–13.
16. Li Y., Li Z., Chi C., Shan H., Zheng L., and Fang Z. Plasmonics of 2D Nanomaterials: Properties and Applications // [Advanced Science](#). — 2017. — Vol. 4, no. 8. — P. 1600430.
17. Govorov A. O., Kovalev V. M., and Chaplik A. V. Solitons in semiconductor microstructures with a two-dimensional electron gas // [JETP Letters](#). — 1999. — Vol. 70, no. 7. — P. 488.
18. Koshelev K. L., Kachorovskii V. Y., Titov M., and Shur M. S. Plasmonic

- shock waves and solitons in a nanoring // [Physical Review B](#). — 2017. — Vol. 95, no. 3. — P. 035418.
19. Tarasenko S. A. Direct current driven by ac electric field in quantum wells // [Physical Review B](#). — 2011. — Jan. — Vol. 83. — P. 035313.
 20. Budkin G. V. and Tarasenko S. A. Ratchet transport of a two-dimensional electron gas at cyclotron resonance // [Physical Review B](#). — 2016. — Feb. — Vol. 93. — P. 075306.
 21. Zudov M. A., Du R. R., Simmons J. A., and Reno J. L. Shubnikov-de Haas-like oscillations in millimeterwave photoconductivity in a high-mobility two-dimensional electron gas // [Physical Review B](#). — 2001. — Oct. — Vol. 64. — P. 201311.
 22. Ye P. D., Engel L. W., Tsui D. C., Simmons J. A., Wendt J. R., Vawter G. A., and Reno J. L. Giant microwave photoresistance of two-dimensional electron gas // [Applied Physics Letters](#). — 2001. — Vol. 79, no. 14. — P. 2193–2195.
 23. Mani R. G., Smet J. H., von Klitzing K., Narayanamurti V., Johnson W. B., and Umansky V. Zero-resistance states induced by electromagnetic-wave excitation in GaAs/AlGaAs heterostructures // [Nature](#). — 2002. — Vol. 420, no. 6916. — P. 646–650.
 24. Dmitriev I. A., Mirlin A. D., Polyakov D. G., and Zudov M. A. Nonequilibrium phenomena in high Landau levels // [Reviews of Modern Physics](#). — 2012. — Nov. — Vol. 84. — P. 1709–1763.
 25. Otteneder M., Dmitriev I. A., Candussio S., Savchenko M. L., Kozlov D. A., Bel'kov V. V., Kvon Z. D., Mikhailov N. N., Dvoretzky S. A., and Ganichev S. D. Sign-alternating photoconductivity and magnetoresistance oscillations induced by terahertz radiation in HgTe quantum wells // [Physical Review B](#). — 2018. — Dec. — Vol. 98. — P. 245304.
 26. Savchenko M. L., Shuvaev A., Dmitriev I. A., Ganichev S. D., Kvon Z. D., and Pimenov A. Demonstration of high sensitivity of microwave-induced

- resistance oscillations to circular polarization // [Physical Review B](#). — 2022. — Oct. — Vol. 106. — P. L161408.
27. Durnev M. V. and Tarasenko S. A. Second harmonic generation at the edge of a two-dimensional electron gas // [Physical Review B](#). — 2022. — Sep. — Vol. 106. — P. 125426.
28. Falko V. I. and Khmel'nitskii D. E. What if a film conductivity exceeds the speed of light // *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*. — 1989. — Vol. 95. — P. 1988–1992. — Access mode: http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_068_06_1150.pdf.
29. Govorov A. O. and Chaplik A. V. Retardation effects in the relaxation of a two-dimensional electron plasma // *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*. — 1989. — Vol. 95. — P. 1976–1979. — Access mode: http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_068_06_1143.pdf.
30. Volkov V. A. and Zabolotnykh A. A. Undamped relativistic magnetoplasmons in lossy two-dimensional electron systems // [Physical Review B](#). — 2016. — Oct. — Vol. 94. — P. 165408.
31. Mikhailov S. A. and Ziegler K. New Electromagnetic Mode in Graphene // [Physical Review Letters](#). — 2007. — Jul. — Vol. 99. — P. 016803.
32. Volkov V. A. and Mikhailov S. A. Edge magnetoplasmons: low frequency weakly damped excitations in inhomogeneous two-dimensional electron systems // *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*. — 1988. — Vol. 94. — P. 217–241. — Access mode: http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_067_08_1639.pdf.
33. Fetter A. L. Edge magnetoplasmons in a bounded two-dimensional electron fluid // [Physical Review B](#). — 1985. — Vol. 32, no. 12. — P. 7676.
34. Glattli D. C., Andrei E. Y., Deville G., Poitrenaud J., and Williams F. I. B. Dynamical Hall Effect in a Two-Dimensional Classical Plasma // [Physical Review Letters](#). — 1985. — Apr. — Vol. 54. — P. 1710–1713.
35. Fetter A. L. Magnetoplasmons in a two-dimensional electron fluid: Disk

- geometry // [Physical Review B](#). — 1986. — Vol. 33, no. 8. — P. 5221.
36. Rudin S. and Dyakonov M. Edge and strip plasmons in a two-dimensional electron fluid // [Physical Review B](#). — 1997. — Vol. 55, no. 7. — P. 4684.
37. Mikhailov S. A. and Savostianova N. A. Microwave response of a two-dimensional electron stripe // [Physical Review B](#). — 2005. — Vol. 71, no. 3. — P. 035320.
38. Balaban M. V., Sauleau R., Benson T. M., and Nosich A. I. Dual integral equations technique in electromagnetic wave scattering by a thin disk // [Progress In Electromagnetics Research](#). — 2009. — Vol. 16. — P. 107–126.
39. Forestiere C., Gravina G., Miano G., Pascale M., and Tricarico R. Electromagnetic modes and resonances of two-dimensional bodies // [Physical Review B](#). — 2019. — Vol. 99, no. 15. — P. 155423.
40. Margetis D. Edge plasmon-polaritons on isotropic semi-infinite conducting sheets // [Journal of Mathematical Physics](#). — 2020. — Vol. 61, no. 6.
41. Gusikhin P. A., Muravev V. M., Zagitova A. A., and Kukushkin I. V. Drastic Reduction of Plasmon Damping in Two-Dimensional Electron Disks // [Physical Review Letters](#). — 2018. — Vol. 121. — P. 176804.
42. Qiao J., Kong X., Hu Z.-X., Yang F., and Ji W. High-mobility transport anisotropy and linear dichroism in few-layer black phosphorus // [Nature Communications](#). — 2014. — Vol. 5, no. 1. — P. 4475.
43. Rodin A. S., Carvalho A., and Castro Neto A. H. Strain-Induced Gap Modification in Black Phosphorus // [Physical Review Letters](#). — 2014. — May. — Vol. 112. — P. 176801.
44. Lin Y.-C., Komsa H.-P., Yeh C.-H., Björkman T., Liang Z.-Y., Ho C.-H., Huang Y.-S., Chiu P.-W., Krasheninnikov A. V., and Suenaga K. Single-Layer ReS₂: Two-Dimensional Semiconductor with Tunable In-Plane Anisotropy // [ACS Nano](#). — 2015. — Vol. 9, no. 11. — P. 11249–11257.
45. Chenet D. A., Aslan B., Huang P. Y., Fan C., van der Zande A. M., Heinz T. F., and Hone J. C. In-Plane Anisotropy in Mono- and Few-Layer

- ReS₂ Probed by Raman Spectroscopy and Scanning Transmission Electron Microscopy // [Nano Letters](#). — 2015. — Vol. 15, no. 9. — P. 5667–5672.
46. Dai J. and Zeng X. C. Titanium Trisulfide Monolayer: Theoretical Prediction of a New Direct-Gap Semiconductor with High and Anisotropic Carrier Mobility // [Angewandte Chemie](#). — 2015. — Vol. 127, no. 26. — P. 7682–7686.
47. Saeed Y., Kachmar A., and Carignano M. A. First-Principles Study of the Transport Properties in Bulk and Monolayer MX₃ (M = Ti, Zr, Hf and X = S, Se) Compounds // [The Journal of Physical Chemistry C](#). — 2017. — Vol. 121, no. 3. — P. 1399–1403.
48. Shayegan M., De Poortere E. P., Gunawan O., Shkolnikov Y. P., Tutuc E., and Vakili K. Two-dimensional electrons occupying multiple valleys in AlAs // [Physica Status Solidi \(b\)](#). — 2006. — Vol. 243, no. 14. — P. 3629–3642.
49. Low T., Roldán R., Wang H., Xia F., Avouris P., Moreno L. M., and Guinea F. Plasmons and Screening in Monolayer and Multilayer Black Phosphorus // [Physical Review Letters](#). — 2014. — Sep. — Vol. 113. — P. 106802.
50. Ahn S. and Das Sarma S. Theory of anisotropic plasmons // [Physical Review B](#). — 2021. — Jan. — Vol. 103. — P. L041303.
51. Nemilentsau A., Low T., and Hanson G. Anisotropic 2D Materials for Tunable Hyperbolic Plasmonics // [Physical Review Letters](#). — 2016. — Feb. — Vol. 116. — P. 066804.
52. Ma W., Alonso-González P., Li S., Nikitin A. Y., Yuan J., Martín-Sánchez J., Taboada-Gutiérrez J., Amenabar I., Li P., Vélez S., et al. In-plane anisotropic and ultra-low-loss polaritons in a natural van der Waals crystal // [Nature](#). — 2018. — Vol. 562, no. 7728. — P. 557–562.
53. Muravev V. M., Andreev I. V., Belyanin V. N., Gubarev S. I., and Kukushkin I. V. Observation of axisymmetric dark plasma excitations in

- a two-dimensional electron system // [Physical Review B](#). — 2017. — Jul. — Vol. 96. — P. 045421.
54. Muravev V. M., Jiang C., Kukushkin I. V., Smet J. H., Umansky V., and Von Klitzing K. Spectra of magnetoplasma excitations in back-gate Hall bar structures // [Physical Review B](#). — 2007. — Vol. 75, no. 19. — P. 193307.
55. Khisameeva A., Muravev V., and Kukushkin I. Piezoplasmonics: Strain-induced tunability of plasmon resonance in AlAs quantum wells // [Applied Physics Letters](#). — 2020. — Vol. 117, no. 9. — P. 093102.
56. Zagorodnev I. V., **Rodionov D. A.**, Zabolotnykh A. A., and Volkov V. A. Microwave Absorption by Axisymmetric Plasmon Mode in 2D Electron Disk // [Semiconductors](#). — 2019. — Vol. 53. — P. 1873.
57. Zagorodnev I. V., **Rodionov D. A.**, and Zabolotnykh A. A. Effect of retardation on the frequency and linewidth of plasma resonances in a two-dimensional disk of electron gas // [Physical Review B](#). — 2021. — Vol. 103, no. 19. — P. 195431.
58. **Rodionov D. A.** and Zagorodnev I. V. Oscillations in radiative damping of plasma resonances in a gated disk of a two-dimensional electron gas // [Physical Review B](#). — 2022. — Dec. — Vol. 106. — P. 235431.
59. Zagorodnev I. V., Zabolotnykh A. A., **Rodionov D. A.**, and Volkov V. A. Two-Dimensional Plasmons in Laterally Confined 2D Electron Systems // [Nanomaterials](#). — 2023. — Vol. 13, no. 6. — P. 975.
60. **Rodionov D. A.** and Zagorodnev I. V. Plasmons in a strip with an anisotropic two-dimensional electron gas fully screened by a metal gate // [JETP Letters](#). — 2023. — Vol. 118, no. 2. — P. 100–104.
61. **Rodionov D. A.**, Zagorodnev I. V., Zabolotnykh A. A., and Volkov V. A. [Axisymmetric plasma mode in disk with two-dimensional electron gas](#) // *Journal of Physics: Conference Series* / IOP Publishing. — 2020. — Vol. 1686. — P. 012052.
62. **Rodionov D. A.** and Zagorodnev I. V. [Axisymmetric plasma mode in](#)

- two-dimensional disk // AIP Conference Proceedings / AIP Publishing. — 2021. — Vol. 2359. — P. 020028.
63. Загороднев И. В., **Родионов Д. А.** и Заболотных А. А. Двумерные плазменные колебания в ограниченных структурах двумерного электронного газа // Труды 14-ой Международной научно-практической конференции по физике и технологии наногетероструктурной СВЧ-электроники "Мокеровские чтения". — 2023. — С. 23.
64. **Родионов Д. А.**, Загороднев И. В. и Заболотных А. А. Магнитоплазменные колебания в полосе с анизотропным двумерным электронным газом в случае сильного экранирования металлическим затвором // Сборник тезисов Пятой школы молодых ученых "Новые материалы и технологии для систем безопасности". — 2023. — С. 8.
65. Загороднев И. В., **Родионов Д. А.** и Заболотных А. А. Затухание плазменных колебаний в латерально ограниченных двумерных электронных системах // Сборник тезисов Пятой школы молодых ученых "Новые материалы и технологии для систем безопасности". — 2023. — С. 38.
66. **Родионов Д. А.** и Загороднев И. В. Магнитодисперсия плазмонов в анизотропной полосе с двумерным электронным газом // Труды XXVI Международного симпозиума «Нанозифика и нанозлектроника». — 2023. — Т. 2. — С. 733.
67. **Родионов Д. А.** и Загороднев И. В. О плазменных резонансах в проводящем диске: роль эффектов запаздывания // Труды 13-ой Международной научно-практической конференции по физике и технологии наногетероструктурной СВЧ-электроники "Мокеровские чтения". — 2022. — С. 20.
68. **Родионов Д. А.** и Загороднев И. В. Плазменные колебания в диске // Сборник научных трудов VIII Международной конференции "Лазерные, плазменные исследования и технологии" ЛАПЛАЗ-2022, посвященной 100-летию со дня рождения лауреата Нобелевской премии по физике

- Басова Николая Геннадиевича. — 2022. — С. 262.
69. **Родионов Д. А.** и Загороднев И. В. Плазменные резонансы в экранированной двумерной электронной системе в форме диска // Тезисы докладов XV Российской конференции по физике полупроводников. — 2022. — С. 315.
70. Загороднев И. В., **Родионов Д. А.** и Заболотных А. А. Плазмон-поляритонные моды проводящего диск // Тезисы докладов XV Российской конференции по физике полупроводников. — 2022. — С. 303.
71. Загороднев И. В., **Родионов Д. А.** и Заболотных А. А. Эффекты запаздывания в плазменных колебаниях 2D диска // Труды XXVI Международного симпозиума «Наноп физика и наноэлектроника». — 2022. — Т. 2. — С. 801.
72. **Родионов Д. А.**, Загороднев И. В. и Заболотных А. А. Плазменные резонансы в диске с 2D электронным газом // Труды 12-ой Международной научно-практической конференции по физике и технологии наногетероструктурной СВЧ-электроники "Мокеровские чтения". — 2021. — С. 91.
73. Загороднев И. В., **Родионов Д. А.** и Заболотных А. А. Плазменные резонансы в диске с 2D электронным газом: роль эффектов запаздывания // Тезисы II Международной конференции ФКС-2021, посвященной 90-летию со дня рождения академика Ю. А. Осипьяна (1931-2008). — 2021. — С. 18.
74. **Родионов Д. А.**, Загороднев И. В. и Заболотных А. А. Магнитоплазменное поглощение электромагнитного излучения 2D электронным диском // Труды XXV Международного симпозиума «Наноп физика и наноэлектроника». — 2021. — Т. 2. — С. 822.
75. Загороднев И. В., **Родионов Д. А.**, Заболотных А. А. и Волков В. А. Резонансное поглощение микроволнового излучения в диске с 2D электронным газом // Труды 11-ой Международной научно-практической

- конференции по физике и технологии наногетероструктурной СВЧ-электроники "Мокеровские чтения". — 2020. — С. 17.
76. Загороднев И. В., **Родионов Д. А.** и Заболотных А. А. Резонансное поглощение микроволнового излучения в больших проводящих 2D дисках // Сборник научных трудов VI Международной конференции "Лазерные, плазменные исследования и технологии"ЛАПЛАЗ-2020. — 2020. — Т. 1. — С. 196.
77. **Родионов Д. А.**, Загороднев И. В., Заболотных А. А. и Волков В. А. Микроволновое поглощение «темными» плазменными модами в диске // Труды XXIV Международного симпозиума «Наноп физика и наноэлектроника». — 2020. — Т. 2. — С. 721.
78. Загороднев И. В., **Родионов Д. А.** и Заболотных А. А. Влияние эффектов запаздывания на плазменные моды 2D диска // Труды XXIV Международного симпозиума «Наноп физика и наноэлектроника». — 2020. — Т. 2. — С. 581.
79. Ritchie R. H. Plasma Losses by Fast Electrons in Thin Films // [Physical Review](#). — 1957. — Jun. — Vol. 106. — P. 874–881.
80. Ferrell R. A. Predicted Radiation of Plasma Oscillations in Metal Films // [Physical Review](#). — 1958. — Sep. — Vol. 111. — P. 1214–1222.
81. Chaplik A. V. Possible crystallization of charge carriers in low-density inversion layers // Soviet Physics JETP. — 1972. — Vol. 35. — P. 395.
82. Finnigan C., Kargarian M., and Efimkin D. K. Equatorial magnetoplasma waves // [Physical Review B](#). — 2022. — Vol. 105, no. 20. — P. 205426.
83. Rodionov D. A. and Zagorodnev I. V. Fully screened two-dimensional magnetoplasmons and rotational gravity shallow water waves in a rectangle // [Physical Review B](#). — 2024. — Jun. — Vol. 109. — P. L241402.
84. Chiu K. W. and Quinn J. J. Plasma oscillations of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field // [Physical Review B](#). — 1974. — Jun. — Vol. 9. — P. 4724–4732.

85. Nakayama M. Theory of surface waves coupled to surface carriers // [Journal of the Physical Society of Japan](#). — 1974. — Vol. 36, no. 2. — P. 393–398.
86. Jin D., Lu L., Wang Z., Fang C., Joannopoulos J. D., Soljačić M., Fu L., and Fang N. X. Topological magnetoplasmon // [Nature Communications](#). — 2016. — Vol. 7, no. 1. — P. 13486.
87. Chaplik A. V. Retardation effects in plasma oscillations of a bilayer structure // [JETP Letters](#). — 2015. — Vol. 101. — P. 545–548.
88. Margetis D., Maier M., Stauber T., Low T., and Luskin M. Nonretarded edge plasmon-polaritons in anisotropic two-dimensional materials // [Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical](#). — 2020. — Vol. 53, no. 5. — P. 055201.
89. Sokolik A. A., Kotov O. V., and Lozovik Y. E. Plasmonic modes at inclined edges of anisotropic two-dimensional materials // [Physical Review B](#). — 2021. — Apr. — Vol. 103. — P. 155402.
90. Zabolotnykh A. A. and Volkov V. A. Edge plasmon polaritons on a half-plane // [JETP letters](#). — 2016. — Vol. 104. — P. 411–416.
91. Zabolotnykh A. A. and Volkov V. A. Interaction of gated and ungated plasmons in two-dimensional electron systems // [Physical Review B](#). — 2019. — Vol. 99, no. 16. — P. 165304.
92. Popov V., Polischuk O., Nikitov S., Ryzhii V., Otsuji T., and Shur M. Amplification and lasing of terahertz radiation by plasmons in graphene with a planar distributed Bragg resonator // [Journal of Optics](#). — 2013. — Vol. 15, no. 11. — P. 114009.
93. Schmidt F.-P., Ditlbacher H., Hohenester U., Hohenau A., Hofer F., and Krenn J. R. Dark Plasmonic Breathing Modes in Silver Nanodisks // [Nano Letters](#). — 2012. — Vol. 12, no. 11. — P. 5780–5783.
94. Plasmons in inversion layers // [Surface Science](#). — 1980. — Vol. 98, no. 1. — P. 515–532.

95. Andreev I. V., Muravev V. M., Semenov N. D., and Kukushkin I. V. Observation of acoustic plasma waves with a velocity approaching the speed of light // [Physical Review B](#). — 2021. — Mar. — Vol. 103. — P. 115420.
96. Andreev I. V., Muravev V. M., Belyanin V. N., and Kukushkin I. V. Measurement of cyclotron resonance relaxation time in the two-dimensional electron system // [Applied Physics Letters](#). — 2014. — Vol. 105, no. 20. — P. 202106.
97. Mikhailov S. A. Radiative decay of collective excitations in an array of quantum dots // [Physical Review B](#). — 1996. — Vol. 54, no. 15. — P. 10335.
98. Zheng X., Volskiy V., Valev V. K., Vandenbosch G. A. E., and Moshchalkov V. V. Line Position and Quality Factor of Plasmonic Resonances Beyond the Quasi-Static Limit: A Full-Wave Eigenmode Analysis Route // [IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics](#). — 2013. — Vol. 19, no. 3. — P. 4600908.
99. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
100. Bergman D. J. and Stroud D. Theory of resonances in the electromagnetic scattering by macroscopic bodies // [Physical Review B](#). — 1980. — Vol. 22, no. 8. — P. 3527.
101. Forestiere C. and Miano G. Material-independent modes for electromagnetic scattering // [Physical Review B](#). — 2016. — Nov. — Vol. 94. — P. 201406.
102. Duan J., Alfaro-Mozaz F. J., Taboada-Gutiérrez J., Dolado I., Álvarez-Pérez G., Titova E., Bylinkin A., Tresguerres-Mata A. I. F., Martín-Sánchez J., Liu S., et al. Active and Passive Tuning of Ultranarrow Resonances in Polaritonic Nanoantennas // [Advanced Materials](#). — 2022. — Vol. 34, no. 10. — P. 2104954.
103. Mylnikov D. and Svintsov D. Limiting capabilities of two-dimensional plasmonics in electromagnetic wave detection // [Physical Review Applied](#). —

2022. — Vol. 17. — P. 064055.
104. Tretyakov S. Maximizing absorption and scattering by dipole particles // [Plasmonics](#). — 2014. — Vol. 9, no. 4. — P. 935–944.
105. Chung Y. J., Villegas Rosales K., Baldwin K., Madathil P., West K., Shayegan M., and Pfeiffer L. Ultra-high-quality two-dimensional electron systems // [Nature Materials](#). — 2021. — Vol. 20, no. 5. — P. 632–637.
106. Falson J., Kozuka Y., Uchida M., Smet J. H., Arima T.-h., Tsukazaki A., and Kawasaki M. MgZnO/ZnO heterostructures with electron mobility exceeding 1×10^6 cm²/Vs // [Scientific Reports](#). — 2016. — Vol. 6, no. 1. — P. 1–8.
107. Tschirky T., Mueller S., Lehner C. A., Fält S., Ihn T., Ensslin K., and Wegscheider W. Scattering mechanisms of highest-mobility InAs/Al_xGa_{1-x}Sb quantum wells // [Physical Review B](#). — 2017. — Vol. 95. — P. 115304.
108. Abramowitz M. and Stegun I. A. Handbook of mathematical functions. — 10 ed. — National Bureau of Standards, 1972.
109. Lax B., Zeiger H., and Dexter R. Anisotropy of cyclotron resonance in germanium // [Physica](#). — 1954. — Vol. 20, no. 7-12. — P. 818–828.
110. Semenov N. D., Muravev V. M., Andreev I., and Kukushkin I. V. Renormalization of the cyclotron frequency in a screened two-dimensional electron system with strong retardation // [JETP Letters](#). — 2021. — Vol. 114, no. 10. — P. 616–619.
111. Zabolotnykh A. A. and Volkov V. A. Electrically controllable cyclotron resonance // [Physical Review B](#). — 2021. — Mar. — Vol. 103. — P. 125301.

Приложение А

Энергия осесимметричной моды

При частоте плазменного резонанса суммарное электромагнитное поле будет определяться, главным образом, индуцированным вкладом. Рассчитаем его в предположении, что нам известна плотность тока $j_r(r)$. В этом приложении будут опущены индексы *ind* у полей для краткости изложения.

Зная вектор-потенциал во всем пространстве (1.18), мы можем найти электрическое и магнитное поле. Отметим, что при возбуждении осесимметричной плазменной моды внешним электромагнитным излучением, содержащим только радиальную компоненту электрического поля в плоскости ДЭС, индуцированные поля тоже будут таковыми и описываться только компонентой A_r вектор-потенциала.

Магнитное поле является ротором вектор-потенциала и в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} H_r(r, z) \\ H_\theta(r, z) \\ H_z(r, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r(r, z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

В свою очередь, используя калибровку Лоренца и определение электрического поля через потенциалы, мы можем явно написать, что

$$\begin{pmatrix} E_r(r, z) \\ E_\theta(r, z) \\ E_z(r, z) \end{pmatrix} = i \frac{c}{\varepsilon \omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \\ 0 & \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r(r, z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Таким образом, электрическое поле осесимметричной моды содержит только радиальную E_r и осевую E_z компоненты.

Выражая вектор потенциал из (1.18) и учитывая наличие только радиальной компоненты плотности тока j_r , выписываем выражения для электромагнитных полей осесимметричной моды $l = 0$ через плотность тока в

системе:

$$\mathbf{E}(r, z) = i \frac{2\pi}{\varepsilon\omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \\ 0 \\ \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \int_0^R \left(\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} |z|}}{\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}} J_1(pr) J_1(pr') p dp \right) j_r(r') r' dr', \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{H}(r, z) = \frac{2\pi}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} \int_0^R \left(\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} |z|}}{\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}} J_1(pr) J_1(pr') p dp \right) j_r(r') r' dr', \quad (\text{A.4})$$

где явно выписано интегральное ядро (1.19) в случае отсутствия металла под ДЭС ($d \rightarrow \infty$).

Для дальнейшего так же удобно переписать полученные выражения через образ Ганкеля (1.10) плотности тока

$$F(p) = \mathcal{H}_1[j_r(r)](p) = \int_0^R J_1(pr) j_r(r) r dr. \quad (\text{A.5})$$

В таком случае, проекции электромагнитных полей могут быть записаны в следующем виде:

$$E_r(r, z) = -i \frac{2\pi}{\varepsilon\omega} \int_0^\infty \sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} e^{-\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} |z|} J_1(pr) F(p) p dp, \quad (\text{A.6})$$

$$E_z(r, z) = -i \frac{2\pi}{\varepsilon\omega} \text{sign}(z) \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} |z|} p J_0(pr) F(p) p dp, \quad (\text{A.7})$$

$$H_\theta(r, z) = -\frac{2\pi}{c} \text{sign}(z) \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} |z|} J_1(pr) F(p) p dp, \quad (\text{A.8})$$

где мы воспользовались свойствами функций Бесселя [108]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) J_1(pr) = -p^2 J_1(pr), \quad (\text{A.9})$$

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) J_1(pr) = p J_0(pr). \quad (\text{A.10})$$

Рассмотрим вклад от электрического и магнитного поля в суммарную электромагнитную энергию (1.50) отдельно. Чтобы успешно сосчитать возникающие интегралы, необходимо вспомнить про ортогональность функций Бесселя целого порядка

$$\int_0^{\infty} J_n(p_1 r) J_n(p_2 r) r dr = \frac{\delta(p_1 - p_2)}{p_1}. \quad (\text{A.11})$$

Электрическая составляющая энергии

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dz dr r |E_r(r, z)|^2 = \\ & \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dz dr r \left(\int_0^{\infty} dp_1 p_1 \sqrt{p_1^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} e^{-\sqrt{p_1^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} |z|} J_1(p_1 r) F(p_1) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \int_0^{\infty} dp_2 p_2 \left[\sqrt{p_2^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \right]^* e^{-\left[\sqrt{p_2^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \right]^* |z|} J_1(p_2 r) F^*(p_2) \right) = \\ & \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dz dp p \cdot \left| \sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \right|^2 e^{-2\text{Re} \left[\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \right] |z|} |F(p)|^2 = \\ & \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \int_0^{\infty} dp p \cdot \frac{\left| \sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \right|^2}{\text{Re} \left[\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \right]} |F(p)|^2 = \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \int_{\sqrt{\varepsilon} \frac{\omega}{c}}^{\infty} dp p \cdot \sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} |F(p)|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dz dr r |E_z(r, z)|^2 &= \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dz dp p^3 \cdot e^{-2\operatorname{Re}\left[\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}\right]|z|} |F(p)|^2 = \\
&\frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\int_0^{\sqrt{\varepsilon \frac{\omega}{c}}} dp p^3 \cdot |F(p)|^2 + \int_{\frac{\omega}{c}}^{\infty} dp p^3 \cdot e^{-2\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}|z|} |F(p)|^2 \right) = \\
&\frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\sqrt{\varepsilon \frac{\omega}{c}}} dz dp p^3 \cdot |F(p)|^2 + \frac{4\pi^2}{\omega^2} \int_{\frac{\omega}{c}}^{\infty} dp p \cdot \frac{p^2}{\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}} |F(p)|^2. \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

Магнитная составляющая энергии

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |H_{\theta}(r, z)|^2 r dr dz &= \\
&= \frac{4\pi^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p_1^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}|z|} \operatorname{sign}(z) J_1(p_1 r) F(p_1) p_1 dp_1 \cdot \right. \\
&\cdot \left. \int_0^{\infty} e^{-\left[\sqrt{p_2^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}\right]^* |z|} \operatorname{sign}(z) J_1(p_2 r) F^*(p_2) p_2 dp_2 \right) r dr dz = \\
&\frac{4\pi^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dz dp p \cdot e^{-2\operatorname{Re}\left[\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}\right]|z|} |F(p)|^2 = \\
&\frac{4\pi^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\int_0^{\sqrt{\varepsilon \frac{\omega}{c}}} dp p \cdot |F(p)|^2 + \int_{\sqrt{\varepsilon \frac{\omega}{c}}}^{\infty} dp p \cdot e^{-2\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}|z|} |F(p)|^2 \right) = \\
&\frac{4\pi^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\sqrt{\varepsilon \frac{\omega}{c}}} dz dp p \cdot |F(p)|^2 + \frac{4\pi^2}{c^2} \int_{\sqrt{\varepsilon \frac{\omega}{c}}}^{\infty} dp p \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}} |F(p)|^2. \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в каждом вкладе присутствует слагаемое с расходящимся по z интегралом. Этот вклад соответствует бесконечной энергии излучения, удаляющегося от плоскости ДЭС, и должен быть исключен из

рассмотрения.

В конечном итоге, выражение для электромагнитной энергии приобретает вид

$$W_{em} = \frac{\pi^2}{\varepsilon\omega^2} \int_{\sqrt{\varepsilon}\frac{\omega}{c}}^{\infty} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 - \varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}} |F(p)|^2 p dp. \quad (\text{A.15})$$

Используя плотность тока в виде (1.36) и раскладывая выражение для электромагнитной энергии по степеням ω , через безразмерные параметры получаем

$$W_{em} = \frac{\pi^2 R^3}{\tilde{\omega}^2 c^2} \left(\frac{16}{35\pi} + \frac{64}{2835\pi} \tilde{\omega}^2 + \frac{256}{51975\pi} \tilde{\omega}^4 - \frac{1024}{945945\pi} \tilde{\omega}^6 + \dots \right) |\alpha_1|^2 \quad (\text{A.16})$$

Подставляя частоту осесимметричного резонанса $\tilde{\omega}_{0,1}$ (1.39) мы имеем разложение электромагнитной энергии по параметру запаздывания (1.51).

Приложение Б

Базисные функции для плотности тока

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= 3\sqrt{\frac{3}{14}} \left(1 - \tilde{r}^2, \quad i \left(1 - \frac{\tilde{r}^2}{3} \right) \right)^T, \\ \mathbf{f}_2 &= 11\sqrt{\frac{5}{238}} \left(1 - \frac{81\tilde{r}^2 - 70\tilde{r}^4}{11}, \quad i \left(1 - \frac{27\tilde{r}^2 - 14\tilde{r}^4}{11} \right) \right)^T, \\ \mathbf{f}_3 &= 23\sqrt{\frac{7}{1054}} \left(1 - \frac{378\tilde{r}^2 - 950\tilde{r}^4 + 595\tilde{r}^6}{23}, \quad i \left(1 - \frac{126\tilde{r}^2 - 190\tilde{r}^4 + 85\tilde{r}^6}{23} \right) \right)^T, \\ \mathbf{f}_4 &= \frac{117}{7\sqrt{62}} \left(1 - \frac{370\tilde{r}^2 - 1750\tilde{r}^4 + 2695\tilde{r}^6 - 1302\tilde{r}^8}{13}, \quad i \left(1 - \frac{370\tilde{r}^2 - 1050\tilde{r}^4 + 1155\tilde{r}^6 - 434\tilde{r}^8}{39} \right) \right)^T, \\ \mathbf{f}_5 &= \frac{59}{7} \sqrt{\frac{11}{142}} \left(1 - \frac{2565\tilde{r}^2 - 19250\tilde{r}^4 + 51940\tilde{r}^6 - 57834\tilde{r}^8 + 22638\tilde{r}^{10}}{59}, \right. \\ &\quad \left. i \left(1 - \frac{855\tilde{r}^2 - 3850\tilde{r}^4 + 7420\tilde{r}^6 - 6426\tilde{r}^8 + 2058\tilde{r}^{10}}{59} \right) \right)^T, \tag{Б.1}\end{aligned}$$

где $\tilde{r} = r/R$.

Приложение В

Коэффициенты разложения

Здесь через $K(k)$ и $E(k)$ обозначаются полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [108].

Осесимметричная мода

$$\begin{aligned} a_0(\tilde{d}) &\approx 1 + 9.16\tilde{d} - \tilde{d} \left(1 - 27.7\tilde{d}^2 - 33.8\tilde{d}^4 - 14.2\tilde{d}^6 \right) E \left(-\frac{1}{\tilde{d}^2} \right) - \\ &\quad \tilde{d} \left(17 + 43.7\tilde{d}^2 + 40.9\tilde{d}^4 + 14.2\tilde{d}^6 \right) K \left(-\frac{1}{\tilde{d}^2} \right), \\ a_2(\tilde{d}) &\approx 1 + 11.6\tilde{d} + 247\tilde{d}^3 - \tilde{d} \left(1 + 60.5\tilde{d}^2 - 364\tilde{d}^4 - 268\tilde{d}^6 + 80\tilde{d}^8 \right) E \left(-\frac{1}{\tilde{d}^2} \right) + \\ &\quad \tilde{d} \left(0.5 - 265\tilde{d}^2 - 493\tilde{d}^4 - 308\tilde{d}^6 - 80\tilde{d}^8 \right) K \left(-\frac{1}{\tilde{d}^2} \right), \\ a_4(\tilde{d}) &\approx 1 - 106\tilde{d}^3 - 1021\tilde{d}^5 - \\ &\quad \tilde{d} \left(1 - 20.9\tilde{d}^2 - 343\tilde{d}^4 + 993\tilde{d}^6 + 520\tilde{d}^8 + 120\tilde{d}^{10} \right) E \left(-\frac{1}{\tilde{d}^2} \right) + \\ &\quad \tilde{d} \left(0.5 - 10.4\tilde{d}^2 + 775\tilde{d}^4 + 125\tilde{d}^6 + 580\tilde{d}^8 + 120\tilde{d}^{10} \right) K \left(-\frac{1}{\tilde{d}^2} \right), \\ a_5(\tilde{\omega}\tilde{d}) &\approx \frac{1 + 3.75\tilde{d}\tilde{\omega} \left(\tilde{d}^2\tilde{\omega}^2 - 3 \right) \cos \left(2\tilde{d}\tilde{\omega} \right) + 9.38 \left(0.6 - \tilde{d}^2\tilde{\omega}^2 \right) \sin \left(2\tilde{d}\tilde{\omega} \right)}{\tilde{d}^5\tilde{\omega}^5} + \\ &\quad 1.88i \frac{3 + \tilde{d}^2\tilde{\omega}^2 + 5 \left(\tilde{d}^2\tilde{\omega}^2 - 0.6 \right) \cos \left(2\tilde{d}\tilde{\omega} \right) + 2\tilde{d}\tilde{\omega} \left(\tilde{d}^2\tilde{\omega}^2 - 3 \right) \sin \left(2\tilde{d}\tilde{\omega} \right)}{\tilde{d}^5\tilde{\omega}^5}. \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Фундаментальная мода

$$\begin{aligned}
 a_0(\tilde{d}) &\approx 1 + 5.89\tilde{d} - \tilde{d} \left(1 - 9\tilde{d}^2 - 4\tilde{d}^4\right) E\left(-\frac{1}{\tilde{d}^2}\right) \\
 &\quad - \tilde{d} \left(7 + 11\tilde{d}^2 + 4\tilde{d}^4\right) K\left(-\frac{1}{\tilde{d}^2}\right), \\
 a_2(\tilde{d}) &\approx 1 + 4.02\tilde{d} + 8.05\tilde{d}^3 - \tilde{d} \left(1 - 2.17\tilde{d}^2 - 11.3\tilde{d}^4 - 3.9\tilde{d}^6\right) E\left(-\frac{1}{\tilde{d}^2}\right) - \\
 &\quad \tilde{d} \left(3.34 + 12.7\tilde{d}^2 + 13.3\tilde{d}^4 + 3.9\right) K\left(-\frac{1}{\tilde{d}^2}\right), \\
 a_3(\tilde{\omega}\tilde{d}) &\approx \frac{\tilde{\omega}^3\tilde{d}^3 - 0.375\tilde{\omega}\tilde{d} \cos(2\tilde{\omega}\tilde{d}) + 0.188 \left(1 - 4\tilde{\omega}^2\tilde{d}^2\right) \sin(2\tilde{\omega}\tilde{d})}{\tilde{\omega}^3\tilde{d}^3} + \\
 &\quad 0.188i \frac{1 - 2\tilde{\omega}^2\tilde{d}^2 - \left(1 - 4\tilde{\omega}^2\tilde{d}^2\right) \cos(2\tilde{\omega}\tilde{d}) - 2 \sin(2\tilde{\omega}\tilde{d})}{\tilde{\omega}^3\tilde{d}^3}. \quad (\text{B.2})
 \end{aligned}$$

Приложение Г

Индукцированное электрическое поле в декартовых координатах

Установим связь между напряженностью электрического поля в плоскости ДЭС и плотностью тока. Считаем, что плотность заряда и тока, а также индуцированные ими электромагнитные поля пропорциональны $e^{-i\omega t}$, где ω есть частота колебаний. В таком случае уравнения Максвелла примут вид:

$$\text{rot } \mathbf{E}_{3D}(x, y, z) = i\frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{3D}(x, y, z), \quad (\text{Г.1})$$

$$\text{rot } \mathbf{H}_{3D}(x, y, z) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(x, y) \delta(z) - i\frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}_{3D}(x, y, z), \quad (\text{Г.2})$$

где \mathbf{E}_{3D} и \mathbf{H}_{3D} – напряженности электрического и магнитного полей, ρ и \mathbf{J} – плотность заряда и тока в двумерной электронной системе ($\mathbf{J} = (\mathbf{j}, 0)^T$), $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака. Через ε обозначена диэлектрическая проницаемость среды. В конечном счёте из полного вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}_{3D} = (\mathbf{E}, E_z)^T$ мы будем интересоваться только его компонентой \mathbf{E} в плоскости (x, y) . Используя (Г.1) и (Г.2), мы получаем следующее уравнение:

$$\left[\text{rot rot} - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right] \mathbf{E}_{3D}(x, y, z) = i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{J}(x, y) \delta(z). \quad (\text{Г.3})$$

Применив преобразование Фурье по координатам x и y к обеим частям уравнения (Г.3), мы получаем:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} + \left(q^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) I & i\mathbf{q} \frac{\partial}{\partial z} \\ i\mathbf{q}^T \frac{\partial}{\partial z} & q^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{q}, z) \\ E_z(\mathbf{q}, z) \end{pmatrix} = i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j}(\mathbf{q}) \delta(z). \quad (\text{Г.4})$$

где \mathbf{q} – параметр преобразования Фурье (волновой вектор), \otimes – тензорное произведение, а I – единичная матрица размера 2×2 . Из третьей строчки

полученного уравнения выразим компоненту E_z и подставим в первые две:

$$\left(\frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}}{q^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} - I \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E}(\mathbf{q}, z) + \left[\left(q^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) I - \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \right] \mathbf{E}(\mathbf{q}, z) = i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j}(\mathbf{q}) \delta(z). \quad (\text{Г.5})$$

Итак, мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение. Чтобы решить его, рассмотрим сначала электрическое поле отдельно в области $z > 0$ и $z < 0$:

$$\left(-I + \frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}}{\beta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \beta^2 \right) \mathbf{E}(\mathbf{q}, z \neq 0) = 0, \quad (\text{Г.6})$$

Здесь введено обозначение $\beta_i^2 = q^2 - \varepsilon_i \frac{\omega^2}{c^2}$. Решением полученного уравнения являются линейные комбинации функций $e^{\beta_i z}$ и $e^{-\beta_i z}$. Ища непрерывное решение, такое что при $z \rightarrow \infty$ оно убывает, а в плоскости $z = -d$ равно нулю, мы приходим к следующему виду решения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}, z) = \mathbf{E}_0(\mathbf{q}) \begin{cases} e^{-\beta z} \sinh \beta d, & z \geq 0, \\ \sinh \beta(z + d), & z < 0, \end{cases} \quad (\text{Г.7})$$

где ветвь корня в определении β выбрана так, что $\text{Re } \beta > 0$. Неизвестный коэффициент \mathbf{E}_0 определяется из условия, продиктованного наличием дельта-функции Дирака в уравнении (Г.5), а именно

$$\left(-I + \frac{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}}{\beta^2} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{q}, z)}{\partial z} \Big|_{z=+0} - \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{q}, z)}{\partial z} \Big|_{z=-0} \right) = i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j}(\mathbf{q}). \quad (\text{Г.8})$$

Извлекая \mathbf{E}_0 , подставляя его в (Г.7) и рассматривая плоскость $z = 0$, мы применяем обратное преобразование Фурье, что, в конечном итоге, приводит к уравнению (2.3).